ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2022, № 4, с. 38–50

УДК 531.391

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ *N* ТЕЛ В ПАРАМЕТРАХ РАСШИРЕННОЙ ГРУППЫ НЬЮТОНА

© 2022 г. В. Ф. Чуб[a,*]

[a] *Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королева, Королев, Россия*

**e-mail: post2@rsce.ru*

Поступила в редакцию 27.07.2020 г.
После доработки 10.07.2021 г.
Принята к публикации 17.07.2021 г.

Рассмотрен нерелятивистский аналог конформной группы – 15-параметрическая расширенная группа Галилея–Ньютона, включающая пространственно-временные переносы и гравитационные преобразования, пространственные повороты, бусты и масштабные преобразования. На основе ее 12-параметрической подгруппы (без поворотов) сформулирована нерелятивистская задача *n* тел с учетом известного эффекта замедления времени в гравитационном поле.

Ключевые слова: конформная группа, группа Галилея–Ньютона, масштабное преобразование, расширение группы, инерциальная навигация, масса фотона, гравитационное замедление времени, задача *n* тел

DOI: 10.31857/S0572329922030060

1. Введение. “Итак, если классическая механика представляет собой теорию движений тел, основанную на группе Галилея, то специальная теория относительности – это такая физическая теория, группой симметрии которой является группа Пуанкаре” [1, с. 142]. Упомянутые в приведенной цитате из школьного учебника 10-параметрические группы преобразований включают пространственно-временные переносы (3 + 1 = 4 параметра), пространственные повороты (3 параметра) и бусты (3 параметра). Различаются эти группы только бустами: нерелятивистскими для группы Галилея (преобразования Галилея в узком смысле) и релятивистскими для группы Пуанкаре (чистые преобразования Лоренца) [2].

Как широко известно [3, с. 12–13; 4, с. 338–339; 5, с. 139–140], Анри Пуанкаре считал Вселенную инвариантной еще и относительно масштабного преобразования, а группы Галилея и Пуанкаре легко расширить до соответствующих 11-параметрических групп за счет добавления масштабных преобразований (1 параметр).

В [6] группы Галилея и Пуанкаре были расширены (в рамках развития программы теоретико-группового подхода к постановке задачи инерциальной навигации) путем включения гравитационных **g**-преобразований (3 параметра). Расширенная (за счет добавления нерелятивистских **g**-преобразований) группа Галилея позднее [7, с. 150] была названа группой Галилея–Ньютона (этим термином иногда называют и саму группу Галилея). Группу же Пуанкаре пришлось сразу расширить до широко известной в физике конформной группы. Помимо преобразований из группы Пуанкаре в конформную группу входят релятивистские **g**-преобразования, w-преобразования (1 параметр) и масштабные преобразования.

Цель настоящей работы – найти и использовать для уточнения классической постановки задачи n тел нерелятивистский аналог 15-параметрической конформной группы, более близкий к ней, чем 13-параметрическая группа Галилея–Ньютона.

2. Расширение группы Галилея–Ньютона. Исходя из сказанного во введении, представляется естественным расширить 11-параметрическую группу Галилея (включающую масштабные преобразования) за счет добавления нерелятивистских **g**-преобразований или расширить 13-параметрическую группу Галилея–Ньютона за счет добавления масштабных преобразований. В обоих случаях получается одна и та же 14-параметрическая группа (с четырьмя векторными параметрами и двумя скалярными). В этом легко убедиться, вычисляя коммутаторы соответствующих инфинитезимальных операторов (генераторов преобразований); при записи генераторов используются сокращенные обозначения ($\partial_\tau = \partial/\partial\tau$, $\partial_x = \partial/\partial x$ и т.д.):

(1) временно́й перенос:

$$T = \partial_\tau$$

(2) пространственные переносы (по осям x, y, z):

$$R_x = \partial_x, \quad R_y = \partial_y, \quad R_z = \partial_z$$

(3) пространственные повороты:

$$\Theta_x = z\partial_y - y\partial_z, \quad \Theta_y = x\partial_z - z\partial_x, \quad \Theta_z = y\partial_x - x\partial_y$$

(4) нерелятивистские бусты:

$$V_x = \tau\partial_x, \quad V_y = \tau\partial_y, \quad V_z = \tau\partial_z$$

(5) нерелятивистские **g**-преобразования:

$$G_x = \frac{1}{2}\tau^2\partial_x, \quad G_y = \frac{1}{2}\tau^2\partial_y, \quad G_z = \frac{1}{2}\tau^2\partial_z$$

(6) масштабное преобразование:

$$\Gamma = \tau\partial_\tau + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$$

Нетривиальным оказывается следующий этап – расширение упомянутой 14-параметрической группы до 15-параметрической за счет включения w-преобразований. Приведенный в [6] генератор w-преобразования конформной группы

$$W = -\frac{1}{2}(\tau^2 - x^2 - y^2 - z^2)\partial_\tau + \tau\left(\tau\partial_\tau + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z\right)$$

не может быть использован: например, коммутатор

$$[G_x, W] = G_x W - W G_x = \frac{1}{2}\tau^2 x\partial_\tau - \tfrac{1}{2}\tau(x^2 + y^2 + z^2)\partial_x$$

не является линейной комбинацией генераторов (1)÷(6) и W, поскольку имеет уже третий порядок по компонентам вспомогательного 4-вектора $\mathrm{X} = (\tau, x, y, z)$. Естественно, поэтому назвать выписанный генератор w-преобразования конформной группы “релятивистским” и попытаться найти “нерелятивистский” генератор w-преобразования, исключив “релятивистские добавки”.

Согласно данной в [6] физической интерпретации, рассматриваемое скалярное w-преобразование представляет собой временну́ю составляющую гравитационного преобразования (пространственно-временного), при этом векторное **g**-преобразование – пространственная его часть. Аналогия с переходом от релятивистских **g**-преобразований к нерелятивистским подсказывает: оставить в генераторе нерелятивистского w-преобразования только один (первый) член:

$$W = -\frac{1}{2}\tau^2\partial_\tau$$

Но вычисление, например, коммутатора такого генератора с G_x

$$[G_x, W] = G_x W - W G_x = \frac{1}{2}\tau^3\partial_x$$

показывает ошибочность описанного подхода. К успеху же приводит использование следующего генератора (найденного методом проб и ошибок после осознания необходимости построения нерелятивистского аналога конформной группы той же размерности):

(7) нерелятивистское w-преобразование:

$$W = -\frac{1}{2}\tau^2\partial_\tau + \tau\left(\tau\partial_\tau + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z\right) = \frac{1}{2}\tau^2\partial_\tau + \tau x\partial_x + \tau y\partial_y + \tau z\partial_z$$

В табл. 1 выписаны коммутаторы $[U, V] = UV - VU$ инфинитезимальных операторов (1)÷(7) из левого столбца (U) и верхней строки (V). Поскольку в таблице не появилось никаких новых генераторов, рассматриваемые 15 генераторов порождают, согласно второй обратной теореме Ли, 15-параметрическую группу [8, с. 204] – расширенную группу Галилея–Ньютона. Генераторы пространственных поворотов в табл. 1 выписаны последними, чтобы легко выделялась ее 12-параметрическая подгруппа – расширенная группа Ньютона, использующаяся в шестом разделе статьи. В табл. 1 также легко выделяется сама группа Ньютона (10-параметрическая) и 11-параметрическая группа, получающаяся из группы Ньютона добавлением масштабного преобразования. Из таблицы также видно отсутствие 11-параметрической группы, включающей пространственно-временные переносы, нерелятивистские бусты и нерелятивистские пространственно-временные гравитационные преобразования, поскольку временны́е переносы и нерелятивистские w-преобразования незамкнуты и порождают масштабное преобразование: $[T, W] = \Gamma$.

Приведем теперь выражения для конечных элементарных преобразований расширенной группы Галилея–Ньютона (активная трактовка, $\mathrm{X} = \tau + \boldsymbol{\rho} \to \mathrm{X}' = \tau' + \boldsymbol{\rho}'$):

(1) временной перенос T_t:

$$\tau' = \tau + t, \quad \boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho}$$

(2) пространственный перенос $R_{\mathbf{r}}$:

$$\tau' = \tau, \quad \boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}$$

(3) пространственный поворот Θ_{Q} (или $\Theta_{\boldsymbol{\vartheta}}$):

$$\tau' = \tau, \quad \boldsymbol{\rho}' = \mathrm{Q} \circ \boldsymbol{\rho} \circ \mathrm{Q}^{-1}, \quad \mathrm{Q} = e^{i\boldsymbol{\vartheta}/2}$$

(4) нерелятивистский буст $V_{\mathbf{v}}$:

$$\tau' = \tau, \quad \boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}\tau$$

(5) нерелятивистское **g**-преобразование $G_{\mathbf{g}}$:

$$\tau' = \tau, \quad \boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{g}\tau^2/2$$

(6) масштабное преобразование Γ_γ (или Γ_α):

$$\tau' = \gamma\tau, \quad \boldsymbol{\rho}' = \gamma\boldsymbol{\rho}, \quad \gamma = e^\alpha$$

(7) нерелятивистское w-преобразование W_{w}:

Таблица 1. Алгебра Ли нерелятивистского аналога конформной группы

$U\backslash V$	T	R_x	R_y	R_z	V_x	V_y	V_z	G_x	G_y	G_z	Γ	W	Θ_x	Θ_y	Θ_z
T	0	0	0	0	R_x	R_y	R_z	V_x	V_y	V_z	T	Γ	0	0	0
R_x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	R_x	V_x	0	R_z	$-R_y$
R_y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	R_y	V_y	$-R_z$	0	R_x
R_z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	R_z	V_z	R_y	$-R_x$	0
V_x	$-R_x$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	G_x	0	V_z	$-V_y$
V_y	$-R_y$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	G_y	$-V_z$	0	V_x
V_z	$-R_z$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	G_z	V_y	$-V_x$	0
G_x	$-V_x$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-G_x$	0	0	G_z	$-G_y$
G_y	$-V_y$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-G_y$	0	$-G_z$	0	G_x
G_z	$-V_z$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-G_z$	0	G_y	$-G_x$	0
Γ	$-T$	$-R_x$	$-R_y$	$-R_z$	0	0	0	G_x	G_y	G_z	0	W	0	0	0
W	$-\Gamma$	$-V_x$	$-V_y$	$-V_z$	$-G_x$	$-G_y$	$-G_z$	0	0	0	$-W$	0	0	0	0
Θ_x	0	0	R_z	$-R_y$	0	V_z	$-V_y$	0	G_z	$-G_y$	0	0	0	Θ_z	$-\Theta_y$
Θ_y	0	$-R_z$	0	R_x	$-V_z$	0	V_x	$-G_z$	0	G_x	0	0	$-\Theta_z$	0	Θ_x
Θ_z	0	R_y	$-R_x$	0	V_y	$-V_x$	0	G_y	$-G_x$	0	0	0	Θ_y	$-\Theta_x$	0

$$\tau' = \frac{\tau}{1 + w\tau/2}, \quad \boldsymbol{\rho}' = \frac{\boldsymbol{\rho}}{(1 + w\tau/2)^2}$$

При описании поворотов в дальнейшем будет использоваться нормированный кватернион поворота Q вместо вектора ориентации $\boldsymbol{\vartheta}$, а при описании масштабного преобразования – масштабный множитель γ вместо канонического параметра α. При восстановлении [8, с. 205–207] конечного нерелятивистского w-преобразования по соответствующему генератору изменен знак параметра (так же, как это было сделано в [6]). Поэтому физическая интерпретация всех параметров – та же, что для соответствующих параметров конформной группы в [6, 7]. Отметим только, что в конформной группе, включающей релятивистские бусты, более естественным (каноническим) параметром оказывается не скорость $\mathbf{v}$, а быстрота $\boldsymbol{\psi}$ (параметр скорости, связанный с ней соотношением $\mathbf{v} = \operatorname{th} \boldsymbol{\psi}$), и появляется ограничение на величину скорости ($v = |\mathbf{v}| < 1$).

Перейдем к определяющим соотношениям 15-параметрической расширенной группы Галилея–Ньютона, то есть к формулам для композиции однотипных элементарных преобразований и перестановочным формулам для элементарных преобразований разных типов. Приведем табличку, позволяющую их систематизировать (см. табл. 2), и выпишем подряд в соответствии с принятой системой нумерации:

$$T_{t_2} T_{t_1} = T_t, \quad t = t_1 + t_2 \tag{2.1}$$

$$R_{\mathbf{r}} T_t = T_t R_{\mathbf{r}} \tag{2.2}$$

$$T_t R_{\mathbf{r}} = R_{\mathbf{r}} T_t \tag{2.3}$$

$$R_{\mathbf{r}_2} R_{\mathbf{r}_1} = R_{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \tag{2.4}$$

$$V_{\mathbf{v}} \circ T_t = T_t R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{v}t \tag{2.5}$$

$$T_t \circ V_{\mathbf{v}} = V_{\mathbf{v}} R_{\mathbf{r}} T_t, \quad \mathbf{r} = -\mathbf{v}t \tag{2.6}$$

$$V_{\mathbf{v}} R_{\mathbf{r}} = R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} \tag{2.7}$$

$$R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} = V_{\mathbf{v}} R_{\mathbf{r}} \tag{2.8}$$

$$V_{\mathbf{v}_2} V_{\mathbf{v}_1} = V_{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \tag{2.9}$$

$$G_{\mathbf{g}} \circ T_t = T_t R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} G_{\mathbf{g}}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{g}t^2/2, \quad \mathbf{v} = \mathbf{g}t \tag{2.10}$$

$$T_t \circ G_{\mathbf{g}} = G_{\mathbf{g}} V_{\mathbf{v}} R_{\mathbf{r}} T_t, \quad \mathbf{r} = \mathbf{g}t^2/2, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{g}t \tag{2.11}$$

$$G_{\mathbf{g}} R_{\mathbf{r}} = R_{\mathbf{r}} G_{\mathbf{g}} \tag{2.12}$$

$$R_{\mathbf{r}} G_{\mathbf{g}} = G_{\mathbf{g}} R_{\mathbf{r}} \tag{2.13}$$

$$G_{\mathbf{g}} V_{\mathbf{v}} = V_{\mathbf{v}} G_{\mathbf{g}} \tag{2.14}$$

$$V_{\mathbf{v}} G_{\mathbf{g}} = G_{\mathbf{g}} V_{\mathbf{v}} \tag{2.15}$$

$$G_{\mathbf{g}_2} G_{\mathbf{g}_1} = G_{\mathbf{g}}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2, \tag{2.16}$$

$$\Gamma_\gamma \circ T_t = T_{t'} \circ \Gamma_\gamma, \quad t' = \gamma t \tag{2.17}$$

$$T_t \circ \Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma \circ T_{t'}, \quad t' = \gamma^{-1} t \tag{2.18}$$

$$\Gamma_\gamma \circ R_{\mathbf{r}} = R_{\mathbf{r}'} \circ \Gamma_\gamma, \quad \mathbf{r}' = \gamma \mathbf{r} \tag{2.19}$$

$$R_{\mathbf{r}} \circ \Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma \circ R_{\mathbf{r}'}, \quad \mathbf{r}' = \gamma^{-1} \mathbf{r} \tag{2.20}$$

$$\Gamma_\gamma V_{\mathbf{v}} = V_{\mathbf{v}} \Gamma_\gamma \tag{2.21}$$

$$V_{\mathbf{v}} \Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma V_{\mathbf{v}} \tag{2.22}$$

$$\Gamma_\gamma \circ G_{\mathbf{g}} = G_{\mathbf{g}'} \circ \Gamma_\gamma, \quad \mathbf{g}' = \gamma^{-1} \mathbf{g} \tag{2.23}$$

$$G_{\mathbf{g}} \circ \Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma \circ G_{\mathbf{g}'}, \quad \mathbf{g}' = \gamma \mathbf{g} \tag{2.24}$$

$$\Gamma_{\gamma_2} \Gamma_{\gamma_1} = \Gamma_\gamma, \quad \gamma = \gamma_2 \gamma_1 \tag{2.25}$$

$$W_w \circ T_t = T_{t'} \circ \Gamma_\gamma \circ W_{w'}, \quad t' = \frac{t}{1 + wt/2}, \quad \gamma = \frac{1}{(1 + wt/2)^2}, \quad w' = \frac{w}{1 + wt/2} \tag{2.26}$$

$$T_t \circ W_w = W_{w'} \circ \Gamma_\gamma \circ T_{t'}, \quad t' = \frac{t}{1 + wt/2}, \quad \gamma = (1 + wt/2)^2, \quad w' = \frac{w}{1 + wt/2} \tag{2.27}$$

$$W_w \circ R_{\mathbf{r}} = R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} G_{\mathbf{g}} W_w, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{r}w, \quad \mathbf{g} = \mathbf{r}\, w^2/2 \tag{2.28}$$

$$R_{\mathbf{r}} \circ W_w = W_w G_{\mathbf{g}} V_{\mathbf{v}} R_{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{r}w, \quad \mathbf{g} = \mathbf{r}w^2/2 \tag{2.29}$$

$$W_w \circ V_{\mathbf{v}} = V_{\mathbf{v}} G_{\mathbf{g}} W_w, \quad \mathbf{g} = -\mathbf{v}w \tag{2.30}$$

$$V_{\mathbf{v}} \circ W_w = W_w G_{\mathbf{g}} V_{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{v}w \tag{2.31}$$

$$W_{\mathrm{w}} G_{\mathbf{g}} = G_{\mathbf{g}} W_{\mathrm{w}} \tag{2.32}$$

$$G_{\mathbf{g}} W_{\mathrm{w}} = W_{\mathrm{w}} G_{\mathbf{g}} \tag{2.33}$$

$$W_w \circ \Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma \circ W_{w'}, \quad w' = \gamma w \tag{2.34}$$

$$\Gamma_\gamma \circ W_w = W_{w'} \circ \Gamma_\gamma, \quad w' = \gamma^{-1} w \tag{2.35}$$

$$W_{w_2} W_{w_1} = W_w, \quad w = w_1 + w_2 \tag{2.36}$$

$$\Theta_Q T_t = T_t \Theta_Q \tag{2.37}$$

$$T_t \Theta_Q = \Theta_Q T_t \tag{2.38}$$

$$\Theta_Q \circ R_{\mathbf{r}} = R_{\mathbf{r}'} \circ \Theta_Q, \quad \mathbf{r}' = Q \circ \mathbf{r} \circ Q^{-1} \tag{2.39}$$

$$R_{\mathbf{r}} \circ \Theta_Q = \Theta_Q \circ R_{\mathbf{r}'}, \quad \mathbf{r}' = Q^{-1} \circ \mathbf{r} \circ Q \tag{2.40}$$

$$\Theta_Q \circ V_{\mathbf{v}} = V_{\mathbf{v}'} \circ \Theta_Q, \quad \mathbf{v}' = Q \circ \mathbf{v} \circ Q^{-1} \tag{2.41}$$

$$V_{\mathbf{v}} \circ \Theta_Q = \Theta_Q \circ V_{\mathbf{v}'}, \quad \mathbf{v}' = Q^{-1} \circ \mathbf{v} \circ Q \tag{2.42}$$

$$\Theta_Q \circ G_{\mathbf{g}} = G_{\mathbf{g}'} \circ \Theta_Q, \quad \mathbf{g}' = Q \circ \mathbf{g} \circ Q^{-1} \tag{2.43}$$

$$G_{\mathbf{g}} \circ \Theta_Q = \Theta_Q \circ G_{\mathbf{g}'}, \quad \mathbf{g}' = Q^{-1} \circ \mathbf{g} \circ Q \tag{2.44}$$

$$\Theta_Q \Gamma_\gamma = \Gamma_\gamma \Theta_Q \tag{2.45}$$

$$\Gamma_\gamma \Theta_Q = \Theta_Q \Gamma_\gamma \tag{2.46}$$

$$\Theta_Q W_w = W_w \Theta_Q \tag{2.47}$$

$$W_w \Theta_Q = \Theta_Q W_w \tag{2.48}$$

$$\Theta_{Q_2} \circ \Theta_{Q_1} = \Theta_Q, \quad Q = Q_2 \circ Q_1 \tag{2.49}$$

Для наглядности символ ($\circ$) между сомножителями (преобразованиями или числами – параметрами преобразований) опускался только в случае, если операция перестановки этих сомножителей коммутативна.

Если хотя бы одно из исходных преобразований бесконечно малое (а только такие случаи встречаются при выводе уравнений инерциальной навигации и задачи *n* тел), то особенности, имеющиеся в соотношениях (2.26) и (2.27), становятся несущественными.

3. Вывод уравнений инерциальной навигации. Будем использовать следующую последовательность элементарных преобразований в разложении преобразования общего вида из расширенной группы Галилея–Ньютона на элементарные:

$$\Lambda = T_t R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} \Gamma_\gamma \Theta_Q \circ G_{\mathbf{g}} W_w$$

Таблица 2. Принятая система нумерации определяющих соотношений

	T	R	V	G	Γ	W	Θ
T	(2.1)	(2.2)	(2.5)	(2.10)	(2.17)	(2.26)	(2.37)
R	(2.3)	(2.4)	(2.7)	(2.12)	(2.19)	(2.28)	(2.39)
V	(2.6)	(2.8)	(2.9)	(2.14)	(2.21)	(2.30)	(2.41)
G	(2.11)	(2.13)	(2.15)	(2.16)	(2.23)	(2.32)	(2.43)
Γ	(2.18)	(2.20)	(2.22)	(2.24)	(2.25)	(2.34)	(2.45)
W	(2.27)	(2.29)	(2.31)	(2.33)	(2.35)	(2.36)	(2.47)
Θ	(2.38)	(2.40)	(2.42)	(2.44)	(2.46)	(2.48)	(2.49)

(она совпадает со стандартной последовательностью элементарных преобразований, принятой в [6, 7] для преобразования общего вида из конформной группы).

Процедура теоретико-группового вывода уравнений инерциальной навигации сводится к нахождению стандартного разложения на элементарные преобразования композиции конечного и бесконечно малого преобразований (подробности см., например, в [6, 7]). С учетом выписанных в предыдущем разделе определяющих соотношений (для наглядности подчеркиваниями показаны места, в которых они применяются на каждом шаге выкладок) получаем:

$$\begin{gathered}
T_{t+dt}R_{\mathbf{r}+d\mathbf{r}}V_{\mathbf{v}+d\mathbf{v}}\Gamma_{\gamma+d\gamma}\Theta_{\mathrm{Q}+d\mathrm{Q}}\circ G_{\mathbf{g}+d\mathbf{g}}W_{\mathrm{w}+d\mathrm{w}} = \\
= \left(T_t R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} \Gamma_\gamma \Theta_{\mathrm{Q}} \circ G_{\mathbf{g}} W_{\mathrm{w}}\right) \circ \left(T_{d\tau} V_{\mathbf{a}d\tau} \Gamma_{1+\mu d\tau} \Theta_{\mathrm{S}} G_{\mathbf{n}d\tau} W_{\nu d\tau}\right) = \\
= T_t R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} \Gamma_\gamma \Theta_{\mathrm{Q}} \circ G_{\mathbf{g}} \underleftrightarrow{W_{\mathrm{w}} \circ T_{d\tau}} V_{\mathbf{a}d\tau} \Gamma_{1+\mu d\tau} \Theta_{\mathrm{S}} G_{\mathbf{n}d\tau} W_{\nu d\tau} = \\
= T_t R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} \Gamma_\gamma \Theta_{\mathrm{Q}} \circ \underleftrightarrow{G_{\mathbf{g}} \circ T_{d\tau}} \Gamma_{1-\mathrm{w}d\tau} \underleftrightarrow{W_{\mathrm{w}-\mathrm{w}^2 d\tau/2} \circ V_{\mathbf{a}d\tau}} \Gamma_{1+\mu d\tau} \Theta_{\mathrm{S}} G_{\mathbf{n}d\tau} W_{\nu d\tau} = \\
= T_t R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} \Gamma_\gamma \underleftrightarrow{\Theta_{\mathrm{Q}} T_{d\tau}} V_{\mathbf{g}d\tau} G_{\mathbf{g}} \underleftrightarrow{\Gamma_{1-\mathrm{w}d\tau} V_{\mathbf{a}d\tau}} G_{-\mathbf{a}\mathrm{w}d\tau} \underleftrightarrow{W_{\mathrm{w}-\mathrm{w}^2 d\tau/2} \circ \Gamma_{1+\mu d\tau}} \Theta_{\mathrm{S}} G_{\mathbf{n}d\tau} W_{\nu d\tau} = \\
= T_t R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} \underleftrightarrow{\Gamma_\gamma \circ T_{d\tau}} \underleftrightarrow{\Theta_{\mathrm{Q}} \circ V_{\mathbf{g}d\tau}} \underleftrightarrow{G_{\mathbf{g}} V_{\mathbf{a}d\tau}} \Gamma_{1-\mathrm{w}d\tau} \underleftrightarrow{G_{-\mathbf{a}\mathrm{w}d\tau} \Gamma_{1+\mu d\tau}} \underleftrightarrow{W_{\mathrm{w}+(\mu\mathrm{w}-\mathrm{w}^2/2)d\tau} \Theta_{\mathrm{S}}} G_{\mathbf{n}d\tau} W_{\nu d\tau} = \\
= T_t R_{\mathbf{r}} \underleftrightarrow{V_{\mathbf{v}} \circ T_{\gamma d\tau}} \circ \underleftrightarrow{\Gamma_\gamma V_{\mathrm{Q}\circ\mathbf{g}\circ\mathrm{Q}^{-1}d\tau}} \underleftrightarrow{\Theta_{\mathrm{Q}} \circ V_{\mathbf{a}d\tau}} G_{\mathbf{g}} \circ \underleftrightarrow{\Gamma_{1-\mathrm{w}d\tau} \Gamma_{1+\mu d\tau}} \underleftrightarrow{G_{-\mathbf{a}\mathrm{w}d\tau} \Theta_{\mathrm{S}}} \underleftrightarrow{W_{\mathrm{w}+(\mu\mathrm{w}-\mathrm{w}^2/2)d\tau} G_{\mathbf{n}d\tau}} W_{\nu d\tau} = \\
= T_t \underleftrightarrow{R_{\mathbf{r}} T_{\gamma d\tau}} R_{\gamma\mathbf{v}d\tau} \underleftrightarrow{V_{\mathbf{v}} V_{\mathrm{Q}\circ\mathbf{g}\circ\mathrm{Q}^{-1}d\tau}} \underleftrightarrow{\Gamma_\gamma V_{\mathrm{Q}\circ\mathbf{a}\circ\mathrm{Q}^{-1}d\tau}} \circ \Theta_{\mathrm{Q}} \circ \underleftrightarrow{G_{\mathbf{g}} \circ \Gamma_{1+(\mu-\mathrm{w})d\tau}} \Theta_{\mathrm{S}} \underleftrightarrow{G_{-\mathbf{a}\mathrm{w}d\tau} G_{\mathbf{n}d\tau}} \underleftrightarrow{W_{\mathrm{w}+(\mu\mathrm{w}-\mathrm{w}^2/2)d\tau} W_{\nu d\tau}} = \\
= \underleftrightarrow{T_t T_{\gamma d\tau}} \underleftrightarrow{R_{\mathbf{r}} R_{\gamma\mathbf{v}d\tau}} \underleftrightarrow{V_{\mathbf{v}+\mathrm{Q}\circ\mathbf{g}\circ\mathrm{Q}^{-1}d\tau} V_{\mathrm{Q}\circ\mathbf{a}\circ\mathrm{Q}^{-1}d\tau}} \Gamma_\gamma \underleftrightarrow{\Theta_{\mathrm{Q}} \Gamma_{1+(\mu-\mathrm{w})d\tau}} \circ \underleftrightarrow{G_{\mathbf{g}+\mathbf{g}(\mu-\mathrm{w})d\tau} \circ \Theta_{\mathrm{S}}} G_{(\mathbf{n}-\mathbf{a}\mathrm{w})d\tau} W_{\mathrm{w}+(\nu+\mu\mathrm{w}-\mathrm{w}^2/2)d\tau} = \\
= T_{t+\gamma d\tau} R_{\mathbf{r}+\gamma\mathbf{v}d\tau} V_{\mathbf{v}+\mathrm{Q}\circ(\mathbf{a}+\mathbf{g})\circ\mathrm{Q}^{-1}d\tau} \underleftrightarrow{\Gamma_\gamma \Gamma_{1+(\mu-\mathrm{w})d\tau}} \underleftrightarrow{\Theta_{\mathrm{Q}} \circ \Theta_{\mathrm{S}}} \circ \underleftrightarrow{G_{\mathrm{S}^{-1}\circ\mathbf{g}\circ\mathrm{S}+\mathbf{g}(\mu-\mathrm{w})d\tau} G_{(\mathbf{n}-\mathbf{a}\mathrm{w})d\tau}} W_{\mathrm{w}+(\nu+\mu\mathrm{w}-\mathrm{w}^2/2)d\tau} = \\
= T_{t+\gamma d\tau} R_{\mathbf{r}+\gamma\mathbf{v}d\tau} V_{\mathbf{v}+\mathrm{Q}\circ(\mathbf{a}+\mathbf{g})\circ\mathrm{Q}^{-1}d\tau} \Gamma_{\gamma+\gamma(\mu-\mathrm{w})d\tau} \Theta_{\mathrm{Q}\circ\mathrm{S}} \circ G_{\mathrm{S}^{-1}\circ\mathbf{g}\circ\mathrm{S}+\mathbf{n}-\mathbf{a}\mathrm{w}+\mathbf{g}(\mu-\mathrm{w})d\tau} W_{\mathrm{w}+(\nu+\mu\mathrm{w}-\mathrm{w}^2/2)d\tau}
\end{gathered}$$

Выше для сокращения записи было принято обозначение $\mathrm{S} = e^{i\boldsymbol{\omega}d\tau/2} = 1 + i\boldsymbol{\omega}d\tau/2$, поэтому (везде сохраняются члены только первого порядка малости по $d\tau$):

$$\mathrm{Q} \circ \mathrm{S} = \mathrm{Q} + \mathrm{Q} \circ (i\boldsymbol{\omega})\, d\tau/2, \quad \mathrm{S}^{-1} \circ \mathbf{g} \circ \mathrm{S} = \mathbf{g} + [\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}]d\tau,$$

В результате получается следующая система нерелятивистских уравнений инерциальной навигации (для расширенной группы Галилея—Ньютона):

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma, \quad \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \gamma\mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \mathrm{Q} \circ (\mathbf{a} + \mathbf{g}) \circ \mathrm{Q}^{-1}, \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma(\mu - \mathrm{w})$$

$$\frac{d\mathrm{Q}}{d\tau} = \frac{1}{2}\mathrm{Q} \circ (i\boldsymbol{\omega}), \quad \frac{d\mathbf{g}}{d\tau} = \mathbf{n} + \mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega} + \mu\mathbf{g} - \mathrm{w}(\mathbf{a} + \mathbf{g}), \quad \frac{d\mathrm{w}}{d\tau} = \nu - \frac{\mathrm{w}^2}{2} + \mu\mathrm{w}$$

Ее легко сравнить с соответствующей системой релятивистских уравнений (для конформной группы); с другой стороны, из нее можно получить (просто отбрасывая "лишние" параметры) систему уравнений инерциальной навигации для группы Галилея—Ньютона (13-параметрической) [6, 7].

4. Массы тел. Используемые в работе массы тел это положительные константы ($m > 0$).

В работе используется естественная система единиц Планка [9]. "Планковские величины (длина, время, масса, энергия, температура и т.д.) не представляют (по крайней мере до сих пор) существенного значения для метрологии, но, как оказалось, имеют исключительную важность для теоретической физики как *границы применимости современных физических теорий*" [10, с. 239]. Планковская масса составляет $\sim 10^{-8}$ кг. В небесной механике (масса Земли $\sim 10^{25}$ кг) и в механике космического полета обычно имеют дело с массами существенно больше планковской, а в теории элементарных частиц (масса электрона ~10^{-30} кг) – с массами на много порядков меньше планковской, которая там считается "экспериментально недостижимой" [11, с. 191].

"Физика не будет делиться на микроскопическую и космическую, она должна стать и станет единой и нераздельной" М.П. Бронштейн [12, с. 27]. В механике космического полета масса космического аппарата пренебрежимо мала по сравнению с массами небесных тел, поэтому его иногда называют "телом бесконечно малой массы" [13, с. 42]. Эта терминология никого не вводит в заблуждение, поскольку всем известно, что массы космических аппаратов заметно больше нуля. Сложнее ситуация с массами в теории элементарных частиц. Еще из школьного курса физики всем "известно", что по современным представлениям: "Фотон является безмассовой частицей, т.е. его масса равна нулю: $m = 0$" [14, с. 66]. Аналогичное утверждение ("Как известно, масса фотона равна нулю") имеется даже в книге специалиста по теории элементарных частиц академика Л.Б. Окуня, для которого "вопрос о массе фотона послужил отправной точкой в продумывании оснований теории относительности" [15, с. 94, 112]. Результаты упомянутого продумывания выражены следующими словами: "В пользу того, что масса фотона строго равна нулю, иногда приводят следующие аргументы:

1. Из существования электромагнитного дальнодействия следует, что масса фотона очень мала по сравнению с массами других частиц, а очень малых параметров в теории не должно быть.

2. Теория (теория относительности, квантовая электродинамика) требует, чтобы масса фотона равнялась нулю.

Легко видеть, однако, что оба эти аргумента неправильны" [16, с. 131]. С другой стороны: "Масса фотона настолько мала, что ни в каких экспериментах ее обнаружить не удалось. Поэтому обычно полагают, что масса фотона равна нулю" [17, с. 657]. В литературе приводятся различные экспериментальные ограничения на массу фотона ($m < 10^{-62}$ кг [18]; $m < 10^{-52}$ кг [19]).

В физике до сих пор распространены различные подходы к построению релятивистской механики или специальной теории относительности (СТО), использующей преобразования Лоренца (релятивистские бусты). Наиболее известные из них связаны с именами Пуанкаре, Эйнштейна и Минковского [20, с. 47–51]. При теоретико-групповом построении СТО на основе группы Пуанкаре скорость строго меньше предельной (в естественной системе единиц $\mathrm{v} = \operatorname{th}\psi < 1$), поэтому частицы с нулевой массой невозможны. При построении СТО на основе постулатов Эйнштейна помимо нормальных частиц приходится рассматривать безмассовые частицы, двигающиеся с предельной скоростью ($\mathrm{v} = 1$), а также обсуждать возможность существования тахионов ($\mathrm{v} > 1$) [21, с. 117]. При построении релятивистской механики на основе концепции пространства–времени Минковского принимают во внимание "основную аксиому Минковского", исключающую существование частиц с нулевой массой [22; 23, с. 171].

5. Гравитационное замедление времени. В классической задаче *n* тел постулируется, что тело (материальная точка) массы m создает на расстоянии $r = \sqrt{\mathbf{r}^2}$ гравитационный потенциал

$$\varphi = -\frac{m}{r}$$

(с которым связан вектор гравитационного ускорения $\mathbf{g} = -\operatorname{grad}\varphi = -\partial\varphi/\partial\mathbf{r}$) [24, с. 188], но не учитывается известный эффект замедления времени в гравитационном поле: "Всякий раз из двух часов, находящихся на разных расстояниях от тяготеющего тела, быстрее идут те, которые дальше от этого тела" [25, с. 120]. Расширенная группа Галилея–Ньютона, включающая масштабное преобразование, позволяет учесть этот эффект, если связать гравитационный потенциал с масштабным множителем. Гравитационный эффект замедления времени в поле тяготения (или эффект гравитационного смещения частоты) [26] следует отличать от релятивистского эффекта замедления времени в движущихся телах (эффекта СТО, который, как и эффект замедления времени в гравитационном поле, может быть измерен с использованием эффекта Мессбауэра) [27].

Пусть $d\tau$ — приращение собственного времени тела, находящегося в гравитационном поле, а dt — приращение координатного времени для наблюдателя, находящегося вне гравитационного поля. Тогда эффект замедления времени в поле тяготения означает, что $d\tau < dt$, то есть масштабный множитель должен быть, согласно первому из уравнений инерциальной навигации, больше единицы $\gamma = dt/d\tau > 1$. Поскольку, с другой стороны, $\varphi < 0$, то естественно принять $\gamma = 1 - \varphi$.

Воспользуемся теперь общепринятым положением квантовой (волновой) механики о том, что с каждой частицей связана волна [14, с. 79, 179], точнее, тем, что "частица характеризуется внутренними колебаниями, в силу чего можно рассматривать ее как некие часы бесконечно малых размеров" [28, с. 30]. Частота волны де Бройля частицы пропорциональна ее энергии (с учетом энергии покоя). В естественной системе единиц энергия покоящейся частицы равна ее массе m. С другой стороны, частота волны де Бройля (собственная частота колебаний частицы) обратно пропорциональна собственному периоду колебаний частицы T, который, соответственно, обратно пропорционален массе частицы $\mathrm{T} \sim 1/m$.

Рассмотрим две покоящиеся частицы с массами m_1 и m_2, причем $m_1 < m_2$. Тогда для их собственных периодов колебаний T_1 и T_2 выполняется $\mathrm{T}_1 > \mathrm{T}_2$. Пусть прошел промежуток времени Δt. За это время первая частица совершит $n_1 = \Delta t/\mathrm{T}_1$ колебаний, а вторая $n_2 = \Delta t/\mathrm{T}_2$ колебаний, поэтому $n_1 < n_2$. Естественно считать n_1 временем $\Delta\tau_1$, измеренным первой частицей (в ее масштабе), а n_2 временем $\Delta\tau_2$, измеренным второй частицей (в ее масштабе), поэтому $\Delta\tau_1 < \Delta\tau_2$. Переходя к масштабным множителям $\gamma_1 = \Delta t/\Delta\tau_1$ и $\gamma_2 = \Delta t/\Delta\tau_2$, получим $\gamma_1 > \gamma_2$. То есть масштабный множитель больше у легкой частицы и меньше у тяжелой. В общем случае получаем, что масштабный множитель частицы обратно пропорционален ее массе $\gamma \sim 1/m$.

Примем следующее выражение для гравитационного потенциала, создаваемого телом массы m на расстоянии r:

$$\varphi = -\frac{m}{\sqrt{m^4 + r^2}}$$

В пределе малых масс ($m \to 0$) или больших расстояний ($r \to \infty$) этот гравитационный потенциал стремится к классическому ($\varphi \to -m/r$). При нулевом расстоянии ($r = 0$) в принятом выражении[1] отсутствует характерная для классического (ньютоновского) потенциала сингулярность и при малых массах обеспечивается обратная пропорциональность масштабного множителя массе частицы ($\gamma = 1 - \varphi \to 1/m$).

Для построения гравитационного потенциала в задаче n тел используется принцип суперпозиции: "потенциалы полей от разных частиц складываются" [24, с. 188]. Гравитационный потенциал макроскопического тела создается гравитационными потенциалами составляющих его элементарных частиц. Условие малости гравитационного

[1] В докладе на ежегодной конференции МФТИ 25.11.2020 автор использовал выражение $\varphi = -m/(m^2 + r)$, удовлетворяющее тем же предельным условиям, см.: *Чуб В.Ф.* Уточнение постановки основной задачи небесной механики // Труды 63-й Всероссийской научной конференции МФТИ 23–29 ноября 2020 года. Аэрокосмические технологии. М.: МФТИ, 2020. С. 55–57 (тезисы доклада). Выписанная функция выглядит проще, но работать с ней неудобно из-за негладкости при $r = 0$.

потенциала ($|\varphi| \ll 1$), ограничивающее область применимости теории тяготения Ньютона, не накладывается.

6. Формулировка задачи *n* тел. В [29] задача n тел была сформулирована на основе 10-параметрической группы, полученной из группы Галилея–Ньютона исключением пространственных поворотов. Позднее эта 10-параметрическая группа была названа [7, с. 150] группой Ньютона (чтобы подчеркнуть ее отличие от другой подгруппы группы Галилея–Ньютона – 10-параметрической группы Галилея). Преобразование общего вида из группы Ньютона имеет вид [7, 29]:

$$\Lambda = T_t R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} G_{\mathbf{g}}$$

Если исходить из 15-параметрической расширенной группы Галилея–Ньютона, то после исключения пространственных поворотов получится расширенная 12-параметрическая группа Ньютона с определяющими соотношениями (2.1)÷(2.36). Преобразование общего вида из расширенной группы Ньютона будем записывать в виде:

$$\Lambda = T_t R_{\mathbf{r}} V_{\mathbf{v}} G_{\mathbf{g}} W_{\mathrm{w}} \circ \Gamma_{\gamma}$$

Исключение пространственных поворотов и перемещение масштабного преобразования на последнее место позволяет существенно упростить правые части дифференциальных уравнений инерциальной навигации, которые теперь становятся такими:

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma, \quad \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \gamma\mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \mathbf{a} + \gamma\mathbf{g}$$

$$\frac{d\mathbf{g}}{d\tau} = \gamma^{-1}\mathbf{n} - \mathbf{a}\mathrm{w}, \quad \frac{d\mathrm{w}}{d\tau} = \gamma^{-1}\nu + \frac{1}{2}\gamma\mathrm{w}^2, \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = \gamma(\mu - \gamma\mathrm{w})$$

Выписанную систему уравнений можно получить обычной процедурой теоретико-группового вывода уравнений инерциальной навигации с принятым порядком расположения элементарных преобразований в преобразовании общего вида для расширенной группы Ньютона. С другой стороны, можно воспользоваться уже выведенными во втором разделе статьи уравнениями, отбросив в них члены, связанные с пространственными поворотами (положив $\mathrm{Q} = 1$ и $\boldsymbol{\omega} = 0$), и сделав замену параметров, соответствующую перестановке $\Gamma_{\gamma} \circ G_{\mathbf{g}} W_{\mathrm{w}} = G_{\mathbf{g}'} W_{\mathrm{w}'} \circ \Gamma_{\gamma}$.

Переходя к задаче n тел, будем считать, что положение i-го тела в момент его собственного времени τ_i определяется преобразованием, связывающим базовую систему отсчета I с мгновенно сопутствующей телу системой отсчета $E_i(\tau_i)$:

$$\Lambda_{IE_i(\tau_i)} = T_{t_i(\tau_i)} R_{\mathbf{r}_i(\tau_i)} V_{\mathbf{v}_i(\tau_i)} G_{\mathbf{g}_i(\tau_i)} W_{\mathrm{w}_i(\tau_i)} \circ \Gamma_{\gamma_i(\tau_i)}$$

Исключим теперь негравитационные ускорения тел ($\mathbf{a}_i = 0$) и негравитационные изменения масштабов ($\mu_i = 0$). Тогда система уравнений движения i-го тела еще заметно упростится:

$$\frac{dt_i}{d\tau_i} = \gamma_i, \quad \frac{d\mathbf{r}_i}{d\tau_i} = \gamma_i\mathbf{v}_i, \quad \frac{d\mathbf{v}_i}{d\tau_i} = \gamma_i\mathbf{g}_i$$

$$\frac{d\mathbf{g}_i}{d\tau_i} = \gamma_i^{-1}\mathbf{n}_i, \quad \frac{d\mathrm{w}_i}{d\tau_i} = \gamma_i^{-1}\nu_i + \frac{1}{2}\gamma_i\mathrm{w}_i^2, \quad \frac{d\gamma_i}{d\tau_i} = -\gamma_i^2\mathrm{w}_i$$

Перейдем от множества собственных времен тел τ_i к единому (системному) времени t как независимому параметру. Положение i-го тела в момент t запишем в виде:

$$\Lambda_{IE_i(t)} = T_t R_{\mathbf{r}_i(t)} V_{\mathbf{v}_i(t)} G_{\mathbf{g}_i(t)} W_{\mathrm{w}_i(t)} \circ \Gamma_{\gamma_i(t)}$$

(по определению $t_i = t$, поэтому $dt_i/d\tau_i = \gamma_i = dt/d\tau_i$; тривиальное уравнение $dt_i/dt = 1$ в дальнейшем выписывать не будем). Заменим в дифференциальных уравнениях движения i-го тела дифференцирование по τ_i на дифференцирование по t:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \quad \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{g}_i, \quad \frac{d\mathbf{g}_i}{dt} = \gamma_i^{-2}\mathbf{n}_i, \quad \frac{d\mathrm{w}_i}{dt} = \gamma_i^{-2}\nu_i + \frac{\mathrm{w}_i^2}{2}, \quad \frac{d\gamma_i}{dt} = -\gamma_i \mathrm{w}_i$$

Из последних трех уравнений получаем:

$$\mathrm{w}_i = -\gamma_i^{-1}\frac{d\gamma_i}{dt}, \quad \mathbf{n}_i = \gamma_i^2\frac{d\mathbf{g}_i}{dt}, \quad \nu_i = \gamma_i^2\left(\frac{d\mathrm{w}_i}{dt} - \frac{\mathrm{w}_i^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\gamma_i}{dt}\right)^2 - \gamma_i\frac{d^2\gamma_i}{dt^2}$$

В соответствии с изложенными в предыдущем разделе соображениями:

$$\gamma_i = 1 - \varphi_i, \quad \varphi_i = -\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{\sqrt{m_j^4 + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2}}$$

Полученная нетривиальная связь параметра w_i с гравитационным потенциалом φ_i:

$$\mathrm{w}_i = -\gamma_i^{-1}\frac{d\gamma_i}{dt} = (1 - \varphi_i)^{-1}\frac{d\varphi_i}{dt}$$

ставит под сомнение обычную формулу, связывающую гравитационный потенциал φ_i с гравитационным ускорением $\mathbf{g}_i$. Заменим ее (из соображений пространственно-временной симметрии для пространственной и временнóй составляющих гравитационного преобразования) на “уточненную”:

$$\mathbf{g}_i = \gamma_i^{-1}\frac{\partial\gamma_i}{\partial\mathbf{r}_i} = -(1 - \varphi_i)^{-1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{r}_i}$$

В результате математическую модель задачи n тел, основанную на расширенной 12-параметрической группе Ньютона, можно представить в виде системы из n уравнений:

$$\Lambda_{IE_i(r+dt)} = \Lambda_{IE_i(t)} \circ \Lambda_{E_i(t)E_i(t+dt)}, \quad i = 1 \div n$$

$$\Lambda_{IE_i(r+dt)} = T_{t+dt}R_{\mathbf{r}_i+d\mathbf{r}_i}V_{\mathbf{v}_i+d\mathbf{v}_i}G_{\mathbf{g}_i+d\mathbf{g}_i}W_{w_i+dw_i} \circ \Gamma_{\gamma_i+d\gamma_i}$$

$$\Lambda_{IE_i(t)} = T_tR_{\mathbf{r}_i}V_{\mathbf{v}_i}G_{\mathbf{g}_i}W_{w_i} \circ \Gamma_{\gamma_i}, \quad \Lambda_{E_i(t)E_i(t+dt)} = T_{\gamma_i^{-1}dt}G_{\mathbf{n}_i\gamma_i^{-1}dt}W_{\nu_i\gamma_i^{-1}dt}$$

$$\gamma_i = 1 + \sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{\sqrt{m_j^4 + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2}}$$

$$\mathbf{g}_i = \gamma_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{\left(\sqrt{m_j^4 + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2}\right)^3}, \quad \mathrm{w}_i = \gamma_i^{-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)\cdot(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{\left(\sqrt{m_j^4 + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2}\right)^3}$$

$$\mathbf{n}_i = \gamma_i\sum_{j=1}^{n}m_j\left\{\frac{\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i}{\left(\sqrt{m_j^4 + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2}\right)^3} - 3(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)\cdot(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\left(\sqrt{m_j^4 + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2}\right)^5}\right\}$$

$$\nu_i = \gamma_i \sum_{j=1}^{n} m_j \left\{ \frac{(\mathbf{g}_j - \mathbf{g}_i)\cdot(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) + (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)^2}{(\sqrt{m_j^4 + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2})^3} - 3\frac{((\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)\cdot(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i))^2}{(\sqrt{m_j^4 + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2})^5} \right\} + \\ + \frac{1}{2}\left\{ \sum_{j=1}^{n} m_j \frac{(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i)\cdot(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{(\sqrt{m_j^4 + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)^2})^3} \right\}^2$$

Предполагается, что наблюдатель (базовая система отсчета I) находится вне гравитационного поля (“на бесконечности”).

Отметим, что расширение группы Ньютона только за счет масштабного преобразования (то есть до 11-параметрической группы с определяющими соотношениями (2.1)÷(2.25)) не позволяет адекватно учесть эффект гравитационного замедления времени, поскольку при нулевых параметрах w_i масштабные множители γ_i не будут изменяться (так как $d\gamma_i/dt = -\gamma_i \mathrm{w}_i$).

7. Заключение. В работе исследован ранее неизвестный (насколько известно автору) нерелятивистский аналог конформной группы, совпадающий с ней по числу параметров: 15-параметрическая расширенная группа Галилея—Ньютона. Приведены определяющие соотношения этой группы и выведены соответствующие ей уравнения инерциальной навигации.

В части формулировки задачи n тел работа носит, по сути, методический характер. Приведенные результаты и соображения могут быть полезны при построении релятивистской теории гравитационного взаимодействия тел, основанной на конформной группе [7, с. 142, 153], и теории квантовой гравитации [30].

Благодарности. Автор признателен своему научному руководителю Г.И. Макарову [31, с. 375][2] за стимулирующие обсуждения и поддержку в конце XX века.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Громов С.В.* Физика: Механика. Теория относительности. Электродинамика. М.: Просвещение, 2003. 383 с.
2. *Чуб В.Ф.* Незамкнутость элементарных преобразований пространства—времени // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. 2005. № 2 (4). С. 153—160.
3. *Гарднер М.* Теория относительности для миллионов. М.: Атомиздат, 1967. 191 с.
4. *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1983. 560 с.
5. *Пуанкаре А.* Пространство и время // Метафизика. Век XXI. Альманах. Вып. 4: метафизика и математика. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. С. 133—147.
6. *Чуб В.Ф.* Применение конформной группы в теории инерциальной навигации // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 5. С. 3—17.
7. *Чуб В.Ф.* Основы инерциальной навигации. М.: URSS, 2014. 200 с.
8. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с.
9. *Смородинский Я.А.* Естественные системы единиц // Физическая энциклопедия. Т. 2. М.: Сов. энциклопедия, 1990. С. 29—30.
10. *Томилин К.А.* Фундаментальные физические постоянные в историческом и методологическом аспектах. М.: Физматлит, 2006. 368 с.
11. *Окунь Л.Б.* Фундаментальные константы физики // Успехи физических наук. 1991. Т. 161. № 9. С. 177—194.
12. *Горелик Г.* c×G×h=? // Знание-сила. 1988. № 2. С. 21—27.
13. *Балк М.Б.* Элементы динамики космического полета. М.: Наука, 1965. 339 с.
14. *Громов С.В.* Физика: Оптика. Тепловые явления. Строение и свойства вещества. М.: Просвещение, 2001. 287 с.
15. *Окунь Л.Б.* О движении материи. М.: Физматлит, 2012. 228 с.

[2] Г.И. Макаров сообщил, что окончил МФТИ в 1968 году (в [31] допущена опечатка).

16. *Кобзарев И.Ю., Окунь Л.Б.* О массе фотона // Успехи физических наук. 1968. Т. 95. Вып. 1. С. 131–137.
17. *Окунь Л.Б.* Теория относительности и теорема Пифагора // Успехи физических наук. 2008. Т. 178. № 6. С. 653–663.
18. *Тагиров Э.А.* Фотон // Физическая энциклопедия. Т. 5. М.: Большая Рос. энциклопедия, 1998. С. 354.
19. Как взвесить фотон // Природа. 2009. № 8. С. 81–82.
20. *Журавлев В.Ф.* Основания механики: О проблемах аксиоматики. М.: URSS, 2019. 100 с.
21. *Биланюк О., Сударшан Е.* Частицы за световым барьером // Эйнштейновский сборник, 1973. М.: Наука, 1974. С. 112–133.
22. *Герштейн С.С., Логунов А.А., Мествиришвили М.А.* Полевая теория гравитации и масса покоя частиц // Докл. РАН. 2005. Т. 405. № 6. С. 753–754.
23. *Минковский Г.* Пространство и время // Принцип относительности. Сб. работ по специальной теории относительности. М.: Атомиздат, 1973. С. 167–180.
24. *Новиков И.Д.* Тяготение // Физическая энциклопедия. Т. 5. М.: Большая Рос. энциклопедия, 1998. С. 188–193.
25. *Чернин А.Д.* Физика времени. М.: URSS, 2020. 230 с.
26. *Баранов А.Г.* Гравитационное смещение // Эйнштейновский сборник, 1967. М.: Наука, 1967. С. 215–232.
27. *Хенль Г., Бенневитц Ф.* Проверка замедления времени с помощью эффекта Мессбауэра // Эйнштейновский сборник, 1969–1970. М.: Наука, 1970. С. 170–176.
28. *Бройль де Л.* Об истинных идейных основаниях волновой механики // *Бройль де Л.* Соотношения неопределенности Гейзенберга и вероятностная интерпретация волновой механики. М.: Мир, 1986. С. 30–33.
29. *Чуб В.Ф.* Формулировка задачи двух тел в параметрах расширенной группы Галилея // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 4. С. 16–20.
30. *Горелик Г.Е.* Матвей Бронштейн и квантовая гравитация. К 70-летию нерешенной проблемы // Успехи физических наук. 2005. Т. 175. № 10. С. 1093–1108.
31. *Бранец В.Н.* Записки инженера. М.: Изд-во “РТСофт” – “Космоскоп”, 2018. 592 с.