ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2022, № 4, с. 103–113

УДК 539.3

ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© 2022 г. В. В. Васильев[a,*], Л. В. Федоров[b]

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
[b] *АО ВПК НПО Машиностроение, Реутов, Россия*
**e-mail: vvvas@dol.ru*

Поступила в редакцию 18.11.2021 г.
После доработки 21.11.2021 г.
Принята к публикации 22.11.2021 г.

Статья посвящена исследованию функций напряжений, позволяющих тождественно удовлетворить уравнения равновесия классической теории упругости и получить решение в напряжениях. Для получения зависимостей между напряжениями и функциями напряжений используется математический аппарат общей теории относительности, в частности, свойство тензора Эйнштейна тождественно удовлетворять уравнения закона сохранения, являющиеся применительно к теории упругости уравнениями равновесия. При этом метрические коэффициенты риманова пространства, определяемые уравнениями Эйнштейна, интерпретируются как функции напряжений теории упругости. В результате линеаризации уравнений Эйнштейна получены общие соотношения между напряжениями и функциями напряжений в ортогональной системе координат. Рассматриваются функции напряжений, соответствующие декартовой системе координат. Анализируются возможности удовлетворения уравнений равновесия с помощью различных комбинаций функций напряжений – известные системы Максвелла, Морера и другие возможные комбинации, образованные из одной, двух и трех функций. В качестве критерия разрешимости задачи теории упругости в напряжениях используется соответствие количества функций напряжений числу взаимно независимых уравнений совместности деформаций в напряжениях.

Ключевые слова: теория упругости, функции напряжений, общая теория относительности

DOI: 10.31857/S0572329922040122

1. Введение. Приведем кратко основные соотношения общей теории относительности (ОТО) [1], на которых основаны полученные ниже соотношения между напряжениями и функциями напряжений. Основная задача ОТО заключается в определении метрических коэффициентов g_{ij} риманова пространства с метрической формой

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \tag{1.1}$$

порождаемого материальным тензором T_{ij}. Компоненты тензоров g_{ij} и T_{ij} связаны уравнениями

$$E_{ij} = \chi T_{ij} \tag{1.2}$$

в которых

$$E_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \tag{1.3}$$

– тензор Эйнштейна, выражающийся через тензор кривизны Риччи R_{ij} и скалярную кривизну риманова пространства ($R = g^{ij}R_{ij}$). В равенство (1.2) входит постоянный коэффициент χ, который не является существенным для рассматриваемой в статье задачи и в дальнейшем принимается равным 1. Для задачи статики в трехмерном пространстве $T_{ij} = \sigma_{ij}$, где σ_{ij} – тензор напряжений. Таким образом, из равенств (1.1)–(1.3) имеем

$$\sigma_{ij} = E_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R \tag{1.4}$$

Тензор E_{ij} обладает важным свойством – согласно закону сохранения материального тензора T_{ij} его дивергенция равна нулю. Следовательно, согласно равенствам (1.2) и (1.4), этим свойством обладает и тензор напряжений, то есть

$$\nabla_j\sigma^{ij} = 0 \tag{1.5}$$

Для задачи статики в трехмерном пространстве эти уравнения являются уравнениями равновесия элемента материальной среды. Таким образом, соотношения (1.4) для напряжений, тождественно удовлетворяющие уравнения равновесия, можно считать выражениями, устанавливающими связь между напряжениями и функциями напряжений. Такими функциями являются компоненты метрического тензора g_{ij}, через которые выражается тензор R_{ij}.

2. Тензор функций напряжений. Для приложения приведенных выше соотношений к линейной теории упругости проведем линеаризацию выражений (1.4). Представим компоненты метрического тензора в виде $g_{ij} = g^0_{ij} + \varphi_{ij}$, где g^0_{ij} – метрические коэффициенты ненапряженной среды, а φ_{ij} – малые возмущения, порождаемые напряженным состоянием среды. Будем также читать, что в начальном состоянии среда отнесена к ортогональной системе координат, то есть $g^0_{ii} = H_i^2$ и $g^0_{ij} = 0 (i \neq j)$. Осуществляя в равенствах (1.4) линеаризацию по φ_{ij}, получим

$$\begin{gathered}
H_2H_3\sigma_{11} = \frac{1}{2H_2H_3}\left(\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial\varphi_{33}}{\partial x_2^2}\right) + \frac{1}{2H_1^2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial x_1} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_{33}}{\partial x_1}\right) - \\
-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{H_2^3}\frac{\partial H_3}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial x_2} + \frac{1}{H_3^3}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\frac{\partial\varphi_{33}}{\partial x_3}\right) - \frac{1}{H_2H_3}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \frac{1}{2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_3}\right)\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial x_3} - \\
-\frac{1}{H_2H_3}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial x_2} + \frac{1}{2H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\varphi_{33}}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\frac{\varphi_{11}}{H_1^4} + \left[\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_2}\frac{\partial H_3}{\partial x_2} + \frac{1}{H_3}\left(\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\right)^2\right]\frac{\varphi_{22}}{H_2^3} + \\
+\left[\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_3} + \frac{1}{H_2}\left(\frac{\partial H_3}{\partial x_2}\right)^2\right]\frac{\varphi_{33}}{H_3^3} - \frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_2\partial x_3} + \frac{1}{H_2H_3}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_3}\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_2} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_3}\right) - \\
-\frac{1}{H_1^2H_2}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_2} - \frac{1}{H_1^2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial x_3} + \left(\frac{\partial H_2}{\partial x_2}\frac{\partial H_3}{\partial x_1} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial H_3}{\partial x_2}\right)\frac{\varphi_{12}}{H_1^2H_2^2} + \\
\left(\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial H_3}{\partial x_3} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\right)\frac{\varphi_{13}}{H_1^2H_3^2} + \left(\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_2}\frac{\partial H_3}{\partial x_3}\right)\frac{\varphi_{23}}{H_2^2H_3^2} \quad (1,\ 2,\ 3)
\end{gathered} \tag{2.1}$$

$$2H_1H_2H_3^2\sigma_{12} = -\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{H_3^2}{H_1^2}\left[\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\varphi_{33}}{\partial x_2} + \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_2} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\varphi_{33}}{\partial x_1}\right] +$$

$$+\frac{H_3^3}{H_1^2}\left(\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x_2}+\frac{\partial H_3}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_{22}}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\frac{H_3}{H_1^5}\varphi_{11}-\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial H_3}{\partial x_2}\frac{H_3}{H_1^2H_2^3}\varphi_{22}-\frac{\varphi_{33}}{H_1^2H_3}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_2}+\frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_3}\right)+\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}+\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_3}\right)\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x_3}+$$

$$+\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}-\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_3}\right)\frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_2}+\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_3}-\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_3}\right)\frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_1}-$$

$$-\frac{2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi_{13}}{\partial x_3}-\frac{2}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_{23}}{\partial x_3}+\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\frac{\partial H_3}{\partial x_3}-\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\frac{\partial H_3}{\partial x_2}\right)\frac{2\varphi_{13}}{H_1H_3}+\left(\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial H_3}{\partial x_3}-\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}\right)\frac{2\varphi_{23}}{H_2H_3}-$$

$$-\left(\frac{H_3}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\frac{\partial H_3}{\partial x_2}+\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\frac{\partial H_2}{\partial x_3}+\frac{H_3}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\right)\frac{2\varphi_{12}}{H_1H_2} \quad (1,\ 2,\ 3) \qquad (2.2)$$

Символ (1, 2, 3) обозначает круговую перестановку индексов, с помощью которой можно получить еще два уравнения. Непосредственной проверкой можно установить, что напряжения (2.1) и (2.2) тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия теории упругости, записанным в ортогональных криволинейных координатах, то есть

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(H_2H_3\sigma_{11})-H_3\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\sigma_{22}-H_2\frac{\partial H_3}{\partial x_1}\sigma_{33}+\frac{\partial}{\partial x_2}(H_1H_3\sigma_{21})+H_3\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\sigma_{12}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_3}(H_1H_2\sigma_{31})+H_2\frac{\partial H_1}{\partial x_3}\sigma_{13}=0 \quad (1,\ 2,\ 3) \qquad (2.3)$$

В декартовых координатах равенства (2.1)–(2.3) принимают вид

$$\sigma_{11}=\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_2^2}-2\frac{\partial^2\varphi_{23}}{\partial x_2\partial x_3}, \quad \sigma_{12}=-\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_3}\right)$$

$$\sigma_{22}=\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_3^2}-2\frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial x_1\partial x_3}, \quad \sigma_{23}=-\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_3}-\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_1}\right) \qquad (2.4)$$

$$\sigma_{33}=\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial x_1\partial x_2}, \quad \sigma_{13}=-\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_3}-\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial x_2}\right)$$

и

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}=0 \quad (1,\ 2,\ 3) \qquad (2.5)$$

Использовав математический аппарат ОТО для получения соотношений (2.4), будем далее считать, что они справедливы для трехмерного евклидова пространства, в котором сформулированы уравнения классической теории упругости. Функции напряжений определяются в этой теории из уравнений совместности деформаций, которые записываются в декартовых координатах следующим образом:

$$L_{11}=\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_2^2}-2\frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial x_2\partial x_3}=0,$$
$$L_{12}=\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3}-\frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x_2}-\frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1}\right)=0 \quad (1,2,3) \qquad (2.6)$$

Уравнения (2.6), как известно, требуют чтобы деформированная среда обладала геометрией, соответствующей евклидову пространству. Правые части уравнений (2.6) удовлетворяют соотношениям, которые имеют вид [2]

$$\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial L_{13}}{\partial x_3}=0 \quad (1,\ 2,\ 3) \tag{2.7}$$

Еще одним условием, обеспечивающим евклидову геометрию деформированной среды, является существование перемещений $u(x_1, x_2, x_3)$, через которые выражаются деформации, то есть

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{2.8}$$

Деформации (2.8) тождественно удовлетворяют уравнениям (2.6). Наличие трех уравнений (2.7), связывающих правые части уравнений (2.6), и трех функций u_i, которые удовлетворяют этим уравнениям, позволяет заключить, что из шести уравнений (2.6) независимыми являются только три уравнения. Соответствующим является и число независимых функций напряжений, что и демонстрируется в следующем разделе.

Для определения функций напряжений деформации, входящие в уравнения (2.6), выражаются через напряжения с помощью обобщенного закона Гука

$$2\mu\varepsilon_{ij}=\sigma_{ij}-\frac{\nu}{1+\nu}\delta_{ij}\sigma, \quad \sigma=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33} \tag{2.9}$$

где μ и ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона, а δ_{ij} – символы Кронекера. Подстановка в уравнения (2.6) деформаций (2.9) и далее напряжений (2.4) приводит к следующим уравнениям для функций напряжений:

$$L_{11}=\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial x_1\partial x_3}-\frac{\nu\sigma}{1+\nu}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\nu\sigma}{1+\nu}\right)-$$

$$-2\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial x_2}-\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2\partial x_3}\right]=0 \quad (1,\ 2,\ 3) \tag{2.10}$$

$$L_{12}=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\nu\sigma}{1+\nu}\right)-\frac{\partial^3}{\partial x_3^3}\left(\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial^4}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3^2}(\varphi_{33}-$$

$$-\varphi_{11}-\varphi_{22})+\frac{\partial^3}{\partial x_2^2\partial x_3}\left(\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_3}-\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial^3}{\partial x_1^2\partial x_3}\left(\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial x_2}-\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_1}\right)=0 \quad (1,2,3) \tag{2.11}$$

где

$$\sigma=\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_1^2}-2\left(\frac{\partial^2\varphi_{23}}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial x_1\partial x_2}\right)$$

В результате тождественных преобразований уравнения (2.10) и (2.11) можно привести к более компактной форме, которая и используется в дальнейшем

$$L_{11}=-\Delta_3\left(\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_2^2}-2\frac{\partial^2\varphi_{23}}{\partial x_2\partial x_3}\right)+\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_3^2}\right)=0 \quad (1,\ 2,\ 3) \tag{2.12}$$

$$L_{12}=-\Delta_3\left[-\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_3}\right)\right]-\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_1\partial x_2}=0 \quad (1,\ 2,\ 3) \tag{2.13}$$

Здесь $\Delta_3(\cdot)$ – трехмерный оператор Лапласа. Используя соотношения (2.4), можно записать уравнения (2.12), (2.13) через напряжения

$$L_{11} = -\Delta_3(\sigma_{11}) + \frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial x_3^2}\right) = 0, \quad L_{12} = -\Delta_3(\sigma_{12}) - \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

Эти уравнения известны как уравнения Бельтрами. В отличие от традиционного вывода они получены здесь без привлечения уравнений равновесия (2.5) поскольку функции напряжений тождественно удовлетворяют уравнениям равновесия.

Поскольку функции напряжений φ_{ij} являются составляющими метрического тензора g_{ij}, эти функции образуют симметричный тензор второго ранга. Это свойство функций напряжений непосредственно доказывается в работе [3]. В теории упругости традиционно используются две системы функций напряжений – функции Максвелла и Морера. Однако в принципе возможно существование множества таких систем. Тензор функций напряжений может быть получен как симметричный тензор второго ранга, дивергенция которого равна нулю [4]. В работе [5] получено пять возможных соотношений, связывающих напряжения с функциями напряжений. Рассматриваемая в настоящей работе линеаризация тензора Эйнштейна для получения функций напряжений предложена Н.А. Кильчевским [6], которым получены таким способом функции Максвелла. В работах [7, 8] эти результаты обобщены на случай ортогональных криволинейных координат.

3. Анализ функций напряжений. Использованный в разделе 2 подход к построению функций напряжений предполагает, что эти функции являются компонентами метрического тензора, порождаемого в среде тензором напряжений. Однако часть компонентов метрического тензора может принадлежать евклидову пространству. Соответствующая часть функций φ_{ij} при этом оказывается равной нулю. Аналогичная ситуация имеет место в ОТО, согласно которой гравитация порождает риманово пространство. Поскольку формально гравитация проявляется через структуру материального тензора T_{ij}, который совпадает в рассматриваемой задаче с тензором напряжений, естественно предположить, что напряжения также порождают риманово пространство. При описании таких пространств в ОТО часть компонентов метрического тензора, как правило, принимается соответствующими евклидову пространству.

Найдем минимальное число функций напряжений, позволяющее получить общее решение задачи теории упругости. При этом общим считается решение, в котором все компоненты тензора напряжений отличны от нуля. Критерием корректности постановки задачи считается совпадение числа функций напряжений с количеством уравнений, из которых они находятся.

Предположим, что только одна функция напряжений отлична от нуля. Анализ соотношений (2.4) показывает, что в этом случае часть напряжений заведомо оказывается равной нулю, то есть общего решения с одной функцией напряжений не существует.

Если отличны от нуля две функции напряжений, например φ_{11} и φ_{23}, соотношения (2.4) дают

$$\sigma_{11} = \frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_3^2}, \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2^2},$$
$$\sigma_{12} = \frac{\partial^2\varphi_{23}}{\partial x_1 \partial x_3}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{13} = \frac{\partial^2\varphi_{23}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

При двух функциях напряжений шесть уравнений (2.12), (2.13) не сводятся к двум, то есть общего решения с двумя функциями напряжений не существует.

Рассмотрим случай трех функций напряжений. Наиболее распространенными являются три функции Максвелла [4] φ_{11}, φ_{22} и φ_{33}. Из соотношений (2.4) имеем

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_3^2}, \quad \sigma_{33} = \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1^2}$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_1\partial x_2}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2\partial x_3}, \quad \sigma_{13} = -\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1\partial x_3} \tag{3.1}$$

Уравнения совместности деформаций (2.10), (2.11) в этом случае принимают вид

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_1^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1^2}\right) + 2\frac{\partial^4\varphi_{11}}{\partial x_2^2\partial x_3^2} - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial x_3^2}\right) = 0$$

$$L_{22} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_2^2}\right) + 2\frac{\partial^4\varphi_{22}}{\partial x_1^2\partial x_3^2} - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial x_3^2}\right) = 0$$

$$L_{33} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_3^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_3^2}\right) + 2\frac{\partial^4\varphi_{33}}{\partial x_1^2\partial x_2^2} - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial x_1^2}\right) = 0$$

$$L_{12} = -\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1^2}\right) + \frac{\partial^4}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3^2}(\varphi_{33} - \varphi_{22} - \varphi_{11}) + \frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_1\partial x_2} = 0$$

$$L_{23} = -\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\left(\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_2^2}\right) + \frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2\partial x_3}(\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33}) + \frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_2\partial x_3} = 0$$

$$L_{13} = -\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}\left(\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_3^2}\right) + \frac{\partial^4}{\partial x_1\partial x_2^2\partial x_3}(\varphi_{22} - \varphi_{11} - \varphi_{33}) + \frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_1\partial x_3} = 0$$

Подставляя в эту систему

$$\sigma = \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_1^2}$$

после довольно громоздких преобразований окончательно получим

$$L_{11} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2^2} = 0, \quad L_{22} = \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3^2} = 0, \quad L_{33} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1^2} = 0 \tag{3.2}$$

$$L_{12} = -\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1\partial x_2} = 0, \quad L_{23} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2\partial x_3} = 0, \quad L_{13} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1\partial x_3} = 0 \tag{3.3}$$

где

$$F_i = -\Delta_3(\varphi_{ii}) + \frac{\sigma}{1+\nu} \quad (i = 1,2,3) \tag{3.4}$$

Интегрируя уравнения (3.3), найдем

$$F_3 = \int f_1(x_1, x_3)dx_1 + f_2(x_2, x_3), \quad F_1 = \int f_3(x_1, x_2)dx_2 + f_4(x_1, x_3)$$

$$F_2 = \int f_5(x_2, x_3)dx_3 + f_6(x_1, x_2) \tag{3.5}$$

Здесь f_i – произвольные функции, которые связаны соотношениями, получаемыми в результате подстановки равенств (3.5) в уравнения (3.2), то есть

$$\frac{\partial f_5}{\partial x_3}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}=0,\quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 f_4}{\partial x_3^2}=0,\quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2}+\frac{\partial^2 f_6}{\partial x_1^2}=0 \tag{3.6}$$

Таким образом, с помощью функций напряжений Максвелла задача сводится к трем уравнениям (3.5) относительно трех функций напряжений и шести произвольных функций, связанных уравнениями (3.6).

В качестве примера рассмотрим случай плоской деформации. В этом случае функции напряжений не зависят от координаты x_3 и соотношения упругости (2.9) дают

$$2\mu\varepsilon_{11}=\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_2^2}-\frac{\nu\sigma}{1+\nu},\quad 2\mu\varepsilon_{22}=\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_1^2}-\frac{\nu\sigma}{1+\nu},\quad 2\mu\varepsilon_{12}=-\frac{\partial^2\varphi_{33}}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$2\mu\varepsilon_{33}=\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1^2}-\frac{\nu\sigma}{1+\nu},\quad \varepsilon_{23}=0,\quad \varepsilon_{13}=0 \tag{3.7}$$

где

$$\sigma=\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1^2}+\Delta_2(\varphi_{33}),\quad \Delta_2(\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} \tag{3.8}$$

В случае плоской деформации $\varepsilon_{33}=0$. Тогда из первого соотношения (3.7) имеем

$$\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1^2}=\frac{\nu\sigma}{1+\nu} \tag{3.9}$$

Подставляя этот результат в равенство (3.8), получим

$$\Delta_2(\varphi_{33})-\frac{\sigma}{1+\nu}=0 \tag{3.10}$$

Для того, чтобы избежать интегрирования по x_3, воспользуемся вместо окончательных уравнений (3.5) уравнениями (3.2) и (3.3), которые дают

$$L_{11}=\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2^2}=0,\quad L_{22}=\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1^2}=0,\quad L_{12}=-\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1\partial x_2}=0,\quad L_{33}=\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1^2}=0 \tag{3.11}$$

Входящие сюда функции F_i определяются равенствами (3.4), то есть

$$F_i=-\Delta_2(\varphi_{ii})+\frac{\sigma}{1+\nu} \tag{3.12}$$

Учитывая равенство (3.10), можно заключить, что $F_3=0$. Таким образом, первые три уравнения (3.11) удовлетворяются тождественно. Преобразуя последнее уравнение с помощью равенства (3.9), получим $\Delta_2(\sigma)=0$. Учитывая этот результат и воздействуя оператором Δ_2 на уравнение (3.10), окончательно придем к уравнению $\Delta_2\Delta_2(\varphi_{33})=0$, то есть к известному бигармоническому уравнению плоской задачи для функции напряжений Эри.

Еще одну классическую систему функций напряжений составляют функции Мореpa [4] φ_{12}, φ_{23} и φ_{13}, для которых из соотношений (2.4) имеем

$$\sigma_{11}=-2\frac{\partial^2\varphi_{23}}{\partial x_2\partial x_3},\quad \sigma_{22}=-2\frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial x_1\partial x_3},\quad \sigma_{33}=-2\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial x_1\partial x_2},\quad \sigma_{12}=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_3}\right)$$

$$\sigma_{23}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial x_2}-\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_1}\right),\quad \sigma_{13}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_3}-\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial x_2}\right)$$

Уравнения совместности деформаций (2.12), (2.13) для этих функций напряжений имеют вид

$$L_{11} = \frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial x_3^2}\right) + 3\Delta_3\left(\frac{\partial^2\varphi_{23}}{\partial x_2\partial x_3}\right) = 0, \quad L_{22} = \frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial x_3^2}\right) + 2\Delta_3\left(\frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial x_1\partial x_3}\right) = 0$$

$$L_{33} = \frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial x_2^2}\right) + 2\Delta_3\left(\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial x_1\partial x_2}\right) = 0 \tag{3.13}$$

$$L_{12} = -\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_1\partial x_2} - \Delta_3\left(\frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial x_2\partial x_3} + \frac{\partial^2\varphi_{23}}{\partial x_1\partial x_3} - \frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial x_3^2}\right) = 0$$

$$L_{23} = -\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_2\partial x_3} - \Delta_3\left(\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_1^2}\right) = 0 \tag{3.14}$$

$$L_{13} = -\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_1\partial x_3} - \Delta_3\left(\frac{\partial^2\varphi_{23}}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial x_2\partial x_3} - \frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial x_2^2}\right) = 0$$

где

$$\sigma = -2\left(\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial^2\varphi_{23}}{\partial x_2\partial x_3}\right) \tag{3.15}$$

Складывая уравнения (3.13) и учитывая равенство (3.15), получим

$$L_{11} + L_{22} + L_{33} = \frac{2}{1+\nu}\Delta(\sigma) + 2\Delta\left(\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial^2\varphi_{23}}{\partial x_2\partial x_3}\right) = \frac{2\Delta(\sigma)}{1+\nu} + 2\Delta(\sigma) = 0$$

Отсюда следует известный результат

$$\Delta_3(\sigma) = 0 \tag{3.16}$$

Воздействуя на уравнения (3.13) оператором Лапласа и учитывая уравнение (3.15), имеем

$$\Delta\Delta(\varphi_{12}) = 0, \quad \Delta\Delta(\varphi_{13}) = 0, \quad \Delta\Delta\varphi_{23} = 0 \tag{3.17}$$

Таким образом, функции Морера являются бигармоническими. После довольно громоздких преобразований с учетом равенств (3.15)–(3.17) уравнения (3.13) и (3.14) приводятся к форме

$$L_{11} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0, \quad L_{22} = -\frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 0, \quad L_{33} = -\frac{\partial F_3}{\partial x_3} = 0 \tag{3.18}$$

$$L_{12} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right) = 0, \quad L_{23} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_3} + \frac{\partial F_3}{\partial x^2}\right) = 0, \quad L_{13} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_3}\right) = 0 \tag{3.19}$$

Здесь

$$F_1 = 2\Delta_3\left(\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi_{13}}{\partial x_3}\right) + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial\sigma}{\partial x_1}, \quad F_2 = 2\Delta_3\left(\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_3}\right) + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial\sigma}{\partial x_2}$$

$$F_3 = 2\Delta_3\left(\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_{23}}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial\sigma}{\partial x_3} \tag{3.20}$$

Интегрируя уравнения (3.18), получим

$$F_1 = f_1(x_2, x_3), \quad F_2 = f_2(x_1, x_3), \quad F_3 = f_3(x_1, x_2) \tag{3.21}$$

где f_i – произвольные функции. Таким образом, задача сводится к трем уравнениям (3.21) относительно функций (3.20), включающим три функции напряжений, и к трем произвольным функциям, связь между которыми устанавливается в результате подстановки равенств (3.21) в уравнения (3.19), то есть

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial f_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_1}=0$$

Возможны и другие системы, состоящие из трех функций напряжений. Теоретически таких систем может быть 20 поскольку таковым является число сочетаний из шести элементов по три [5]. Однако следует учесть ограничения, накладываемые равенствами (2.4), из которых, в частности, следует, что если сохранить функции $\varphi_{11},\varphi_{12},\varphi_{13}$ (1, 2, 3), то одно из нормальных напряжений оказывается равным нулю. Таким образом, можно получить 17 соотношений, связывающих напряжения с тремя функциями напряжений с индексами

$$11,22,33;\quad 11,22,12;\quad 11,22,23;\quad 11,22,13;\quad 11,33,12;\quad 11,33,23;\quad 11,33,13$$

$$11,12,23;\quad 11,13,23;\quad 22,33,12;\quad 22,33,23;\quad 22,33,13;\quad 22,12,13;\quad 22,13,23$$

$$33,12,23;\quad 33,12,13;\quad 12,13,23$$

В качестве примера рассмотрим систему функций напряжений, состоящую из двух функций Максвелла φ_{11}, φ_{22} и одной функции Морера φ_{13}. Уравнения (2.10) и (2.11) принимают вид

$$L_{11}=\frac{\partial^3}{\partial x_3^3}\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x_3}-2\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1^2}\right)$$
$$-2\frac{\partial^3}{\partial x_2^2\partial x_3}\left(\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial x_1}-\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x_3}\right)-\frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_3^2}\right)=0$$

$$L_{22}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2^2}\right)+\frac{\partial^4\varphi_{22}}{\partial x_3^4}+2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}\left(\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial x_2^2}\right)-\frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_3^2}\right)=0$$

$$L_{33}=\frac{\partial^4\varphi_{22}}{\partial x_2^2\partial x_3^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_3^2}-2\frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial x_1\partial x_3}\right)+2\frac{\partial^4\varphi_{13}}{\partial x_1\partial x_2^2\partial x_3}-\frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_2^2}\right)=0$$

$$L_{12}=-\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1^2}\right)-\frac{\partial^4\varphi_{13}}{\partial x_2\partial x_3^3}-\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\left(\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial x_2^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}\left(\frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2\partial x_3}\right)+$$
$$+\frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_1\partial x_2}=0$$

$$L_{23}=-\frac{\partial^4\varphi_{22}}{\partial x_2\partial x_3^3}+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2\partial x_3}-\frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial x_1\partial x_2}\right)+\frac{\partial^4\varphi_{13}}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3^3}-\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial x_2^2}\right)+\frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_2\partial x_3}=0$$

$$L_{13}=-\frac{\partial^3}{\partial x_1\partial x_3^2}\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x_3}-2\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial x_2^2}\right)+\frac{\partial^3}{\partial x_1\partial x_2^2}\left(\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial x_1}-\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial^4\varphi_{13}}{\partial x_2^2\partial x_3^2}+$$

$$+\frac{\nu}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_1\partial x_3} = 0$$

С учетом равенства

$$\sigma = \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi_{22}}{\partial x_3^2} - 2\frac{\partial^2\varphi_{13}}{\partial x_1\partial x_3}$$

и условия (3.16) после довольно громоздких преобразований окончательно получим

$$L_{11} = -\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right) = 0, \quad L_{22} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = 0, \quad L_{13} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = 0 \quad (3.22)$$

$$L_{33} = \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = 0, \quad L_{12} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0, \quad L_{23} = -\frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 0 \quad (3.23)$$

где

$$F_1 = \frac{\partial}{\partial x_3}\Delta_3(\varphi_{13}) + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial\sigma}{\partial x_1}, \quad F_2 = \Delta_3\left(\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x_3}\right) + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial\sigma}{\partial x_3}$$

$$F_3 = \Delta_3\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x_3} + \frac{\partial\varphi_{22}}{\partial x_3} - 2\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial\sigma}{\partial x_3} \quad (3.24)$$

Интегрируя уравнения (3.23), имеем

$$F_1 = f_1(x_1, x_3), \quad F_2 = f_2(x_1, x_3), \quad F_3 = f_3(x_1, x_2) \quad (3.25)$$

Таким образом, система сводится к трем уравнениям (3.25) относительно функций (3.24), включающих три функции напряжений. Произвольные функции f_i связаны тремя уравнениями (3.22), которые дают

$$-\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = 0$$

Первые два уравнения совпадают, то есть функции f_i связаны только двумя условиями.

Заключение. В результате линеаризации уравнений общей теории относительности получены выражения для напряжений через компоненты метрического тензора риманова пространства, которые ассоциируются с функциями напряжений классической теории упругости. Установлено, что минимальное количество функций напряжений, которые в принципе позволяют построить общее решение задачи теории упругости в напряжениях, равно трем. При этом существуют 17 различных вариантов соотношений, позволяющие выразить напряжения через три функции напряжений. Исследованы классические соотношения Максвелла и Морера, а также смешанные соотношения, включающие две функции Максвелла и одну функцию Морера. Показано, что для рассмотренных систем функций напряжений шесть уравнений совместности деформаций относительно трех функций напряжений сводятся к трем уравнениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Синг Д.Л.* Общая теория относительности. М.: Иностр. лит., 1963. 432 с.
2. *Washizu K.* A note on the conditions of compatibility // J. Math. Phys. 1958. V. 36. № 4. P. 306–311.
3. *Крутков Ю.А.* Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1949. 200 с.

4. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
5. *Блох В.И.* Теория упругости. Харьков: Изд. Харьковского университета, 1964. 484 с.
6. *Кильчевский Н.А.* Основы тензорного исчисления с приложениями к механике. Киев: Наукова думка, 1972. 148 с.
7. *Васильев В.В.* Напряженное состояние твердых тел и некоторые геометрические эффекты // Изв. РАН. МТТ. 1989. № 5. С. 30–34.
8. *Васильев В.В., Федоров Л.В.* К задаче теории упругости, сформулированной в напряжениях // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 82–92.