ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2022, № 5, с. 3–31

УДК 531.3

КВАТЕРНИОННЫЕ МЕТОДЫ И РЕГУЛЯРНЫЕ МОДЕЛИ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ И МЕХАНИКИ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА: ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭЙЛЕРА (РОДРИГА–ГАМИЛЬТОНА) ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОРБИТАЛЬНОГО (ТРАЕКТОРНОГО) ДВИЖЕНИЯ. I: ОБЗОР И АНАЛИЗ МЕТОДОВ И МОДЕЛЕЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЙ

© 2022 г.

Ю. Н. Челноков[a,*]

[a] *Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия*

**e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Поступила в редакцию 14.10.2021 г.
После доработки 05.12.2021 г.
Принята к публикации 07.12.2021 г.

Рассматривается проблема регуляризации классических уравнений небесной механики и механики космического полета (астродинамики), в которых используются переменные, характеризующие форму и размеры мгновенной орбиты (траектории) изучаемого движущегося тела, и углы Эйлера, описывающие ориентацию используемой вращающейся (промежуточной (intermediate)) системы координат или ориентацию мгновенной орбиты, или плоскости орбиты движущегося тела в инерциальной системе координат. Особенности типа сингулярности (деления на ноль) этих классических уравнений порождаются углами Эйлера и эффективно устраняются с помощью использования четырехмерных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватернионов поворотов (вращения) Гамильтона.

В работе дан обзор и анализ известных нам регулярных в указанном смысле моделей небесной механики и астродинамики, построенных с использованием параметров Эйлера и кватернионов поворота Гамильтона на основе дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел. Рассмотрены приложения этих моделей в задачах оптимального управления орбитальным движением космического аппарата, решаемых с использованием принципа максимума Понтрягина. Показано, что эффективность аналитического исследования и численного решения краевых задач оптимального управления траекторным (орбитальным) движением космических аппаратов может быть кардинально повышена за счет использования регулярных кватернионных моделей астродинамики.

Также дан обзор и анализ публикаций, в которых используются дуальные параметры Эйлера и дуальные кватернионы (бикватернионы Клиффорда) для решения задач управления общим пространственным движением твердого тела (космического аппарата), представляющим собой композицию вращательного (углового) и поступательного (орбитального) движений твердого тела, эквивалентную его винтовому движению, с использованием принципа обратной связи.

Ключевые слова: регуляризация, уравнения небесной механики и астродинамики (механики космического полета), задача двух тел, ориентация орбиты, параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), кватернион ориентации, оптимальное управление орбитальным движением, космический аппарат, пространственное движение твердого тела, бикватернион

DOI: 10.31857/S0572329922040043

1. Устранение особенностей типа сингулярности (деления на ноль) в классических моделях небесной механики и астродинамики, записанных во вращающихся системах координат и использующих углы Эйлера (угловые оскулирующие элементы орбиты) для описания орбитального движения изучаемого тела. В наших работах [1–5] даны краткие обзоры и анализ кватернионных методов и моделей регулярной небесной механики и астродинамики (механики космического полета), в которых используются четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля и параметры Эйлера, чаще называемые в России параметрами Родрига–Гамильтона, для регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел и возмущенного пространственного центрального движения материальной точки, а также обзоры их приложений к решению задач оптимального управления орбитальным движением космического аппарата (КА). С помощью этих методов и моделей устраняются особенности, порождаемые гравитационными силами и возникающие в уравнениях этих задач при соударении тел. Такого рода сингулярности создают не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности в небесной механике и астродинамике, в особенности при изучении движения небесных и космических тел по сильно вытянутым орбитам.

Эффективность решения задач небесной механики и астродинамики во многих случаях повышается за счет использования уравнений орбитального движения, записанных в той или иной вращающейся (промежуточной (intermediate)) системе координат с помощью использования таких понятий как форма, размеры и ориентация мгновенной орбиты изучаемого движущегося тела (например, КА). В уравнениях движения такого рода присутствуют переменные, характеризующие угловое движение используемой вращающейся системы координат или ориентацию мгновенной орбиты, или плоскости орбиты движущегося тела.

В качестве таких переменных в механике и астродинамике традиционно используются углы Эйлера или направляющие косинусы. Использование углов Эйлера позволяет записать уравнения орбитального движения в наглядной форме, но приводит к появлению в уравнениях движения громоздких тригонометрических выражений и дополнительных особых точек, в которых уравнения вырождаются. Так, в состав широко используемых уравнений Ньютона–Эйлера для оскулирующих элементов (медленно изменяющихся переменных) [6, 7] входят дифференциальные уравнения для угловых элементов: долготы восходящего узла, наклона (наклонения) орбиты, углового расстояния перицентра от узла. Эти уравнения вырождаются, когда угол наклона мгновенной орбиты изучаемого тела становится равным нулю или 180 град. Использование направляющих косинусов позволяет устранить указанную особенность уравнений движения изучаемого тела, однако приводит к существенному повышению размерности системы уравнений движения и к потере геометрической наглядности.

Этих недостатков использования углов Эйлера и направляющих косинусов удается избежать, если в качестве параметров ориентации используемой вращающейся системы координат или мгновенной орбиты изучаемого тела, или плоскости орбиты выбрать параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона). В этом случае для описания ориентации этой системы координат и орбиты изучаемого тела удобно использовать гиперкомплексную переменную – кватернион поворота Гамильтона, компонентами которого являются вещественные параметры Эйлера. При этом в составе уравнений траекторного (орбитального) движения появляется дифференциальное кватернионное уравнение углового движения используемой вращающейся системы координат или мгновенной орбиты, или плоскости орбиты изучаемого тела, имеющее компактную, симметричную и невырождающуюся структуру. Эти уравнения в настоящее время стали широко использоваться в небесной механике и астродинамике, также как и кватернионные уравнения в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и параметрах Эйлера, регулярные для орбитального движения тела в гравитационных и других центральных силовых полях.

Кватернион – четырехмерное гиперкомплексное число (или переменная) с одной вещественной и тремя мнимыми единицами. Был введен в математику и механику Гамильтоном (1843) [8]. Кватернионное исчисление, в отличие от матричного, обладает геометрической наглядностью векторного исчисления. В отличие от векторного исчисления, оно обладает большей общностью и гибкостью. Так, в кватернионном исчислении, в отличие от векторного, операция деления определена, причем она легко алгоритмизируема, а операция умножения обладает свойством ассоциативности. Кроме этого, в кватернионных уравнениях, в отличие от векторных, могут непосредственно использоваться векторные величины, определенные своими проекциями не в одной, а в разных системах координат. Все это вместе делает кватернионный аппарат более мощным и гибким средством решения многих задач механики, навигации и управления движением.

Наиболее эффективная регуляризация особенностей уравнений небесной механики и астродинамики, порождаемых гравитационными силами, достигается за счет перехода от трехмерного пространства декартовых координат к четырехмерному пространству новых координат (к переменным Кустаанхеймо–Штифеля (Kustaanheimo–Stiefel), 1964, 1965, 1971) [9–11], т.е. за счет перехода от пространства меньшей размерности к пространству большей размерности, а также за счет регуляризующего преобразования времени и использования дополнительных энергетических переменных. Четырехмерность нового используемого пространства делает естественным использование четырехмерных гиперкомплексных переменных (кватернионов Гамильтона) для описания движения в таком пространстве.

Кватернионы давно и успешно используются в механике, навигации и управлении движением для описания углового (вращательного) движения твердого тела. Использование параметров Эйлера и кватернионов Гамильтона для описания орбитального (поступательного, траекторного) движения и для построения кватернионных динамических уравнений такого движения стало распространенным сравнительно недавно.

2. Анализ регулярных моделей небесной механики и астродинамики, построенных с использованием параметров Эйлера другими исследователями. Регулярные модели орбитального движения, построенные в рамках возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона), рассматривались, например, Deprit (1976), Брумбергом (1980), Брагазиным, Бранцем и Шмыглевским (1986), Бранцем и Шмыглевским (1992), Pelaez, Hedo и Rodriguez de Andres (2007), Bau, Urrutxua и Pelaez (2014), Bau, Bombardelli, Pelaez и Lorenzini (2015), Libraro (2016), Roa и Kasdin (2017), Amato, Bombardelli, Bau, Morand, Aaron J. Rosengren (2019), Bau и Roa (2020) [12–22].

Deprit [12] вводит систему координат, две оси которой лежат в мгновенной плоскости орбиты, а третья направлена по нормали к ней. Рассматриваются возмущения, имеющие силовую функцию. Уравнения возмущенного кеплерового движения записываются во введенной системе координат в гамильтоновой форме с использованием пффафовой формы (the Pfaffian form). Далее уравнения записываются в орбитальной системе координат в традиционной форме (Andoyer 1923) [23], в которой в качестве переменных используются углы Эйлера (Eulerian angles): долгота восходящего узла (the longitude of the ascending node) h, наклонение I (the inclination), аргумент широты (the argument of the latitude) ς, расстояние до ньютоновского центра притяжения r, модуль G вектора момента орбитальной скорости. Затем уравнения возмущенного движения записываются в узловой системе координат (the nodal frame), одна из осей которой направлена вдоль линии узлов (линии пересечения плоскости орбиты и неподвижной плоскости (i, j)).

Вводится идеальная (совершенная) система координат (ideal frames), положение которой определяется углами Эйлера: долготой восходящего узла h, наклонением I и долготой σ, отсчитываемой в плоскости орбиты на восток. Отмечается, что ни орбитальная, ни узловая системы координат не являются идеальной системой координат. Записываются уравнения возмущенного кеплерового движения в идеальной системе координат, в которых в качестве переменных используются декартовые координаты x и y в идеальной системе координат, их первые производные по времени, долгота восходящего узла h, наклонение I и модуль G вектора момента орбитальной скорости. Отмечается, что эти уравнения были получены ранее Deprit (1975) [24] и что, если в этих уравнениях совершить переход в плоскости орбиты от декартовых координат к полярным, то эти уравнения превратятся в хорошо известные уравнения возмущенного кеплерового движения, записанные в идеальной системе координат Andoyer [23], Musen (1959) [25]. Их сравнение с уравнениями, записанными в орбитальной или узловой системе координат, позволяет установить, что главное преимущество идеальной системы координат состоит в исключении из уравнений, описывающих движение частицы в плоскости орбиты, производных от элементов, определяющих положение плоскости орбиты.

Отмечается также, что Brown и Shook (1933) [26] считают, что идеальные системы координат есть нечто, разделяющее движение в плоскости орбиты и вращение орбитальной плоскости в пространстве. Далее Deprit вводит параметры Эйлера так, как это впервые сделал Musen (1961, 1964) [27, 28] для описания положения апсидальной плоскости: параметры Эйлера определяются формулами через синусы и косинусы половинного угла наклонения I и половинной разности или суммы долготы восходящего узла h и долготы σ, которые являются медленными угловыми переменными. Выводятся скалярные дифференциальные уравнения для параметров Эйлера первого порядка, правые части которых содержат частные производные от возмущающего потенциала по параметрам Эйлера и компоненту непотенциального возмущающего ускорения, ортогональную плоскости мгновенной орбиты. Эти уравнения дополняются скалярными дифференциальными уравнениями для декартовых координат точки в плоскости ее мгновенной орбиты и их первыми производными по времени. В итоге Deprit получаются уравнения возмущенного кеплерового движения, записанные в идеальной системе координат, мгновенная ориентация которой в неподвижной (фиксированной) системе координат описывается параметрами Эйлера.

Deprit [12] отмечает, что случай отсутствия возмущающего потенциала уже был рассмотрен в орбитальной системе координат Broucke, Lass and Ananda (1971) [29] (при этом был применен элементарный геометрический подход), а в идеальной системе координат был рассмотрен Deprit [24]; случай отсутствия непотенциального возмущающего ускорения был изучен Musen [28] в апсидальной системе координат.

Брумбергом (1980) [13] рассматриваются уравнения возмущенной задачи двух тел в переменных Кустаанхеймо—Штифеля, в ганзеновских координатах и параметрах Эйлера. Брумбергом отмечается, что среди математических проблем небесной механики актуальны вопросы регуляризации и стабилизации уравнений небесной механики, в частности, развитие регуляризации Кустаанхеймо—Штифеля, которая сводит кеплеровское движение в трехмерном пространстве к задаче гармонического осциллятора в четырехмерном пространстве. Им также отмечается, что правые части дифференциальных уравнений небесной механики принимают симметричную форму, приближающуюся к полиномиальной, и становятся более удобными для вычислений, если вместо трех углов Эйлера вводятся четыре параметра Эйлера, которые можно рассматривать как компоненты единичного четырехмерного вектора. Такая модификация классических методов, по мнению Брумберга, была начата Musen (1963) и постепенно приобретает все большую популярность.

Брумбергом [13] описано применение параметров Эйлера к выводу уравнений возмущенного движения в ганзеновских координатах. В правые части полученных им уравнений в параметрах Эйлера входит в качестве общего множителя величина, обратно пропорциональная модулю вектора момента орбитальной скорости, а также входят частные производные от возмущающего потенциала по параметрам Эйлера и компонента непотенциального возмущающего ускорения, ортогональная плоскости мгновенной орбиты. Брумберг отмечает, что уравнения, аналогичные этим уравнениям, были выведены другим способом Deprit [12]. Он также отмечает, что в зависимости от специфики конкретной задачи полученную им систему уравнений для описания движения в ганзеновских координатах можно подвергнуть дальнейшему преобразованию. В частности, левые части этих уравнений можно привести к линейному виду переходом к параболическим координатам Леви-Чивиты и введением новой независимой переменной типа эксцентрической аномалии.

В работах Брагазина, Бранца и Шмыглевского (1986, 1992) [14, 15] дается вывод уравнений орбитального движения, например, искусственного спутника Земли, записанных в орбитальной системе координат. Орбитальные параметры разделяются на две группы: на внутренние параметры, определяющие форму и размер орбиты, а также положение спутника на орбите, и внешние, определяющие пространственную ориентацию орбиты в инерциальной системе координат. В качестве внутренних параметров выбираются расстояние r спутника до центра масс Земли (модуль радиус-вектора спутника), отношение модуля H вектора момента орбитальной скорости к расстоянию r и отношение гравитационной постоянной μ к модулю H. В качестве внешних параметров выбираются параметры Родрига—Гамильтона (Эйлера), т.е. компоненты кватерниона, определяющего ориентацию орбитальной системы координат в инерциальной системе координат. Предложенные дифференциальные уравнения в параметрах Родрига—Гамильтона, записываются в скалярной и кватернионной формах. Коэффициентами в этих уравнениях являются проекции вектора абсолютной угловой скорости орбитальной системы координат на ее же координатные оси. Первая проекция этого вектора равна нулю, вторая проекция равна взятому со знаком “минус” отношению расстояния r к модулю H, умноженному на проекцию возмущающего ускорения, ортогональную плоскости мгновенной орбиты спутника, третья проекция равна взятому со знаком “минус” отношению модуля H к квадрату расстояния r спутника (вторая и третья проекции записываются этими авторами в более сложном виде, выраженном через введенные ими внутренние параметры и содержащем гравитационную постоянную μ).

В работе [16] (2007) рассмотрен специальный метод возмущений, в котором, по словам авторов, объединяется простота компьютерной реализации, скорость и точность вычислений, и который может использоваться для описания движения по орбите любой материальной частицы. В статье описывается эволюция некоторых орбитальных элементов на основе параметров Эйлера, которые являются постоянными в невозмущенной задаче, но которые изменяются под действием наложенного возмущения. Используется метод вариации параметров для получения выражений для производных семи элементов для общего случая, который включает любой тип возмущения. Эти основные дифференциальные уравнения немного изменены введением одного дополнительного уравнения для времени и имеют общий порядок, равный восьми. Метод был разработан в Grupode Dinamicade Tethers (GDT) UPM, как инструмент для динамического моделирования, ограниченного в известных пределах. Тем не менее, по словам авторов, он может быть использован в любой другой области и с любым видом орбиты и возмущения. Он не имеет особенностей, связанных с небольшим наклоном и (или) эксцентриситетом. Использование параметров Эйлера делает его устойчивым. Силами возмущения управляют очень простым способом: метод требует, чтобы их компоненты (возмущения) были определены в орбитальной или в инерциальной системе координат. В статье проводится сравнение с другими схемами, чтобы показать хорошую производительность предлагаемого метода.

В работе [17] предложен метод для специальных возмущений для распространения эллиптических орбит в возмущенной задаче двух тел: EDromo. Вектор состояния (неособых орбитальных элементов) состоит из элемента времени и семи пространственных элементов, а независимая переменная представляет собой обобщенную эксцентричную аномалию, введенную посредством преобразования времени Sundman. Ключевую роль в методе играет промежуточная система отсчета, которая обладает свойством оставаться неподвижной в пространстве, пока возмущения отсутствуют. Три элемента EDromo характеризуют динамику в орбитальной системе отсчета и ее ориентацию относительно промежуточной системы отсчета, а параметры Эйлера, связанные с промежуточной системой отсчета, представляют собой четыре других пространственных элемента. Производительность EDromo была проанализирована с учетом некоторых типичных проблем в астродинамике. Практически во всех приведенных авторами тестах метод является лучшим среди других популярных формулировок, основанных на элементах.

В работе [18] предложены семь пространственных элементов и элемент времени в качестве переменных состояния нового специального метода возмущений для задачи двух тел. Новые элементы сохраняют нулевой эксцентриситет и наклон, а также отрицательные значения полной энергии. Они развиваются путем объединения пространственного преобразования в проективные координаты (как в регуляризации Burdet–Ferrandiz) с временным преобразованием, в котором показатель радиуса орбиты равен единице вместо двух (как это обычно делается в литературе). Следуя этому подходу, авторы обнаруживают новую линеаризацию задачи двух тел, из которой орбитальные элементы могут быть получены методом вариации параметров. Геометрическая значимость пространственных величин проявляется в новой промежуточной системе отсчета, которая отличается от локальной вертикальной локальной горизонтальной системы на одно вращение в мгновенной плоскости орбиты. Четыре элемента параметризуют ориентацию в пространстве этой системы отсчета, которая, в свою очередь, определяет ориентацию плоскости орбиты и фиксирует направление вылета для долготы движущегося тела. Оставшиеся три элемента определяют движение вдоль вектора радиальной единицы и орбитальной долготы. Эффективность метода, протестированного с использованием ряда эталонных сценариев распространения орбиты, является, по мнению авторов, чрезвычайно хорошей по сравнению с несколькими регуляризованными составами, некоторые из которых были изменены и улучшены здесь впервые.

Дополнительно отметим, что этими авторами используются уравнения движения, записанные в орбитальной системе координат. Для описания ее ориентации используются параметры Эйлера, уравнения для которых записываются в скалярной и матричной формах. В качестве переменных также используются временной элемент, элемент $\lambda_3 = -1/(2\varepsilon)$ и элементы λ_1 and λ_2 (первые интегралы невозмущенного движения). Вместо времени используется новая переменная φ: $dt/d\varphi = r/(-2\varepsilon)^{1/2}$, где ε – полная энергия, r – расстояние. Сравниваются результаты численного решения предлагаемых уравнений и других уравнений, в том числе уравнений в *KS*-переменных. Показывается, что лучшую точность дают уравнения в *KS*-переменных и уравнения, предложенные авторами, причем решения новых уравнений для рассмотренных примеров имеют меньшие погрешности, чем решения уравнений в *KS*-переменных.

Libraro (2016) [19] отмечается, что обычный маневр космического корабля по поднятию орбиты с помощью электрического двигателя должен иметь дело с четырьмя основными ограничивающими факторами: более продолжительное время полета, множественные затмения, запрещающие непрерывную тягу, длительное воздействие излучения пояса Ван Аллена (Van Allen) и высокие требования к мощности электродвигателей. Чтобы оптимизировать передачу малой тяги с учетом этих проблем, выбор координат и соответствующих уравнений движения, используемых для описания кинематического и динамического поведения спутника, имеют решающее значение. Этот выбор потенциально может повлиять на процесс численной оптимизации, а также ограничить набор сценариев миссии, которые можно исследовать. Чтобы повысить способность определять возможный набор сценариев миссии, способных решить полностью проблемы электрического поднятия орбиты, требуется набор уравнений, свободный от каких-либо сингулярностей, для рассмотрения полностью произвольной орбиты инжекции. С этой целью Libraro была разработана новая кватернионная формулировка поступательной динамики космического аппарата, которая является глобально невырожденной. Задача минимального времени и малой тяги была решена с использованием новой системы уравнений движения внутри схемы прямой оптимизации для исследования оптимальных траекторий малой тяги во всем диапазоне углов наклона орбиты от 0 до 90 градусов. В состав этой системы уравнений входят кинематические уравнения в параметрах Эйлера.

Roa and Kasdin [20] предложили альтернативный набор неособых кватернионных орбитальных элементов (alternative set of nonsingular quaternionic orbital elements), с помощью которых описывается движение материальной точки (the particle) в инерциальной системе координат. Ими в рамках возмущенной пространственной задачи двух тел предложены уравнения (15)–(20) [20] орбитального движения частицы, записанные во вращающейся (промежуточной (intermediate frame)) системе координат Q, третья ось которой направлена вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$ частицы, а проекция ω_3 вектора абсолютной угловой скорости которой на направление вектора $\mathbf{r}$ равна нулю (такая система координат в авиации называется свободной в азимуте). Для описания вращения системы координат Q используются кватернион $\mathbf{q}$ и кватернионное кинематическое уравнение в параметрах Эйлера q_{j} – компонентах кватерниона $\mathbf{q}$. Переменными в предложенных уравнениях являются величина $u = 1/r$ (r – расстояние до центра притяжения (the radial distance)), проекции ω_1 и ω_2 абсолютной угловой скорости промежуточной системы координат на ее же координатные оси, кватернион $\mathbf{q}$, модуль h вектора момента орбитальной скорости (the module h of the angular momentum vector), реальное время t. Выбранная новая независимая переменная ν является истинной аномалией (the true anomaly) для невозмущенного кеплеровского движения. Эти уравнения близки (в отношении используемых переменных) к регулярным уравнениям возмущенной задачи двух тел, полученным нами в работе [30] (1984). В этих уравнениях в качестве переменных выбраны (в принятых в этой работе обозначениях) расстояние r, две проекции ω_2 и ω_3 вектора абсолютной угловой скорости азимутально свободной системы координат η на ее же координатные оси (ее проекция $\omega_1 = 0$), кеплеровская энергия h, кватернион $\boldsymbol{\lambda}$ ориентации системы координат η в инерциальной системе координат и реальное время t. В качестве новой независимой переменной выступает переменная τ, связанная с временем t дифференциальным соотношением $dt = rd\tau$. Отметим, однако, что уравнения Roa and Kasdin (15)–(20) [20], в отличие от уравнений работы [30], не являются регулярными (в отношении расстояния) для движения в ньютоновском гравитационном поле.

Из выше описанных уравнений (15)–(20) Roa and Kasdin получены регулярные дифференциальные уравнения (37)–(42) [20] в оскулирующих (медленно изменяющихся) переменных. Уравнения получены методом вариации произвольных постоянных интегрирования λ_1 и λ_2 линейного дифференциального уравнения второго порядка для переменной $u = 1/r$ в случае кеплеровского движения, введением вместо проекций ω_1 и ω_2 двух новых переменных $\lambda_3 = \omega_1/u^2$ и $\lambda_4 = \omega_2/u^2$ (λ_3 и λ_4 – интегралы (постоянные площадей) для невозмущенного кеплеровского движения) и мультипликативным введением новой кватернионной переменной $\mathbf{g}$, которая является кватернионной постоянной интегрирования кватернионного дифференциального уавнения ориентации системы координат Q в случае кеплеровского движения частицы. Эти уравнения являются регулярными, за исключением случая, когда модуль вектора момента орбитальной скорости $h = 0$. Эта особенность появляется, когда радиус-вектора $\mathbf{r}$ частицы и вектор ее скорости становятся параллельными или когда любой из этих двух векторов равен нулю.

В аннотации статьи говорится, что кватернионные элементы в орбитальной механике обычно связываются с преобразованием Кустаанхеймо—Штифеля или с определением орбитальной плоскости. Новый набор регулярных элементов, представленный в этой статье, происходит от формы уравнений движения вращающегося тела, которые моделируют эволюцию кватерниона, определяющего ориентацию связанной с телом системы координат и изменение угловой скорости такой системы кординат. Заменяя связанную с телом систему координат специальной орбитальной системой координат и составляя уравнения для радиального движения отдельно, можно построить эквивалентное решение для орбитального движения. Изменение (вариация) параметров радиального движения поставляет новый набор элементов, который является независимым от описания орбитальной плоскости. Преобразованием Sundman второго порядка вводится фиктивное время, которое заменяет физическое время в качестве новой независимой переменной. Эта техника улучшает числовую работу метода. Использование временного элемента приводит к еще более гладкому изменению орбитальных элементов под действием возмущений. Как только скобки Lagrange и Poisson получены, самая общая неособая (nonosculating) версия набора элементов оказывается представленной. Относительно числовых экспериментов авторами показано, что метод сопоставим с другими формулировками, использующими подобную стабилизацию и методы регуляризации.

В статье [21] сравниваются полуаналитические и неусредненные регуляризованные методы. Показывается, что эффективные реализации неусредненных регуляризованных формулировок уравнений движения, и особенно методов неособых элементов, являются привлекательными кандидатами для долгосрочного изучения высотного и высокоэллиптического спутника Земли. Также показывается, что специальные методы возмущения, основанные на регуляризованных формулировках, могут конкурировать и даже работать лучше, чем полуаналитические методы для долгосрочного движения (порядка десятилетий) объектов, вращающихся вокруг Земли и что для такого рода применений формулировка Cowell никогда не используется из-за малых требуемых размеров шагов, которые вызывают сильное накопление ошибки округления и длительное время вычислений. Для выполнения этого исследования авторы разработали код Fortran, названный THALASSA, который включает метод Cowell's, EDromo, регуляризацию Кустаанхеймо—Штифеля (KS-регуляризацию) [10], и набор регулярных элементов, которые были получены Stiefel и Scheifele [11] из KS-переменных.

Как известно, три элемента EDromo характеризуют динамику в орбитальной системе отсчета и ее ориентацию относительно промежуточной системы отсчета, а параметры Эйлера, связанные с промежуточной системой отсчета, представляют собой четыре других пространственных элемента.

В работе Bau и Roa [22] представлен новый метод вычисления орбит в возмущенной задаче двух тел: векторы положения и скорости движущегося объекта в декартовых координатах заменяются восемью орбитальными элементами, которые являются константами для невозмущенного движения. Предлагаемые элементы равномерно действительны для любого значения суммарной энергии. Их определение вытекает из идеи применения временного преобразования Sundman's в рамках проективного разложения движения, которое является отправной точкой линеаризации Burdet—Ferrandiz в сочетании с функциями Штумпфа (Stumpff). По аналогии с идеальными элементами Деприта, формулировка опирается на специальную (промежуточную) систему координат, которая медленно вращается под действием внешних возмущений. Отсюда и название элементов, два из них связаны с радиальным движением, следующие четыре, параметры Эйлера, задают ориентацию промежуточной системы координат. Полная энергия и элемент времени завершают вектор состояния. Предоставлены все необходимые формулы для расширения метода для определения орбиты и “распространения” неустойчивости (uncertainty propagation). Например, частные производные положения и скорости по отношению к промежуточным элементам получены явно вместе с обратными частными производными. Численные тесты включены для оценки эффективности предлагаемого специального метода возмущений при движении по орбите комет C/2003 T4 (LINEAR) и C/1985 K1 (Machholz).

3. Регулярные модели небесной механики и астродинамики, построенные автором статьи с использованием параметров Эйлера. *3.1. Параметры Эйлера и проблема регуляризации уравнений задачи двух тел.* В работах [31, 30] (1981, 1984) получены более общие (в сравнении с уравнениями Кустаанхеймо—Штифеля) матричные [31] (с использованием кватернионных матриц) и кватернионные [30] (с использованием кватернионов Гамильтона) регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в четырехмерных *KS*-переменных в предположении, что хорошо известное билинейное соотношение, лежащее в основе построения регулярных уравнений Кустаанхеймо—Штифеля, не выполняется.

Для получения этих уравнений нами были использованы восьмимерные параметры винтового движения λ_j и λ_j^0 ($j = 0, 1, 2, 3$) введенной поступательно перемещающейся и вращающейся в инерциальном пространстве системы координат η, а также полученные в этих переменных матричные [31] и кватернионные [30] дифференциальные уравнения возмущенного движения материальной точки в ньютоновском гравитационном поле, записанные в промежуточной системе координат η. Ось η_1 этой системы координат направлена вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$ второго (рассматриваемого) тела, а ее начало находится в центре масс этого тела. Переменные λ_j являются параметрами Эйлера и характеризуют ориентацию системы координат η в инерциальной системе координат, а переменные λ_j^0 характеризуют поступательное движение системы координат η в инерциальной системе координат.

В этих работах отмечается, что дуальные переменные $\Lambda_j = \lambda_j + s\lambda_j^0$ являются дуальными параметрами Эйлера (Родрига—Гамильтона), которые, в свою очередь, являются компонентами бикватерниона конечного перемещения Клиффорда (Clifford 1873) [32] $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0$, описывающего пространственное движение (вращательное и поступательное) промежуточной системы координат η. (В дуальных переменных Λ_j символ s — комплексность Клиффорда, обладающая свойством $s^2 = 0$.) В нашей работе [30] также отмечено, что использованные кватернионные дифференциальные уравнения в переменных $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^0$ эквивалентны одному бикватернионному (дуальному кватернионному) кинематическому уравнению (Челноков 1980) [33] движения свободного твердого тела (системы координат η).

Декартовые координаты x, y, z рассматриваемого тела в инерциальной системе координат связаны с параметрами винтового движения λ_j и λ_j^0 системы координат η соотношениями, которые в кватернионной записи имеют вид [33]

$$\mathbf{r}_{in} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\lambda}^0 \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}}$$

В [31] установлено, что из этих соотношений получается регуляризующее *KS*-преобразование координат

$$\mathbf{r}_{in} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$

если параметры λ_j и λ_j^0 положить равными

$$\lambda_0 = r^{-1/2}u_0, \quad \lambda_i = -r^{-1/2}u_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\lambda_0^0 = (1/2)\, r^{1/2}u_1, \quad \lambda_1^0 = (1/2)\, r^{1/2}u_0, \quad \lambda_2^0 = -(1/2)\, r^{1/2}u_3, \quad \lambda_3^0 = (1/2)\, r^{1/2}u_2$$

т.е. когда параметры λ_j и λ_j^0 связаны соотношениями

$$\lambda_0^0 = -(1/2)\, r\lambda_1, \quad \lambda_1^0 = (1/2)\, r\lambda_0, \quad \lambda_2^0 = (1/2)\, r\lambda_3, \quad \lambda_3^0 = -(1/2)\, r\lambda_2$$

Здесь r – модуль радиус-вектора $\mathbf{r}$, u_j – переменные Кустаанхеймо–Штифеля; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – векторные мнимые единицы Гамильтона, $\circ$ – символ кватернионного произведения, верхняя черта – символ сопряжения.

Поэтому *KS*-преобразование заключается в переходе от декартовых координат x, y, z рассматриваемого тела к новым переменным u_j, которые являются параметрами Эйлера λ_j, нормированными с помощью множителя $r^{1/2}$, содержащего расстояние r от рассматриваемого тела до центра притяжения.

Проекции η_i радиус-вектора $\mathbf{r}$ рассматриваемого тела, проводимого из центра притяжения, на оси системы координат η связаны с параметрами λ_j и λ_j^0 кватернионным соотношением [33]

$$\mathbf{r}_\eta = \eta_1\mathbf{i} + \eta_2\mathbf{j} + \eta_3\mathbf{k} = 2\bar{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda}^0$$

Из этого соотношения с учетом выше приведенных связей переменных λ_j и λ_j^0 вытекает, что в рассматриваемом случае отображение $\mathbf{r}_\eta$ радиус-вектора $\mathbf{r}$ на базис η определяется соотношением

$$\mathbf{r}_\eta = \eta_1\mathbf{i} = r\mathbf{i}$$

и, следовательно, ось η_1 системы координат η направлена вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$.

Таким образом, нами было показано, что регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в переменных Кустаанхеймо–Штифеля могут быть получены с помощью записи уравнений этой задачи во введенной вращающейся системе координат η, использования в качестве параметров ориентации этой системы координат параметров Эйлера и дальнейшей их нормировкой в соответствии с выше приведенными соотношениями.

Было также показано, что билинейное соотношение Кустаанхеймо–Штифеля

$$u_1 du_0/d\tau - u_0 du_1/d\tau + u_3 du_2/d\tau - u_2 du_3/d\tau = 0$$

связывающее между собой *KS*-переменные u_j и их первые производные $du_j/d\tau$ по новой независимой переменной τ и играющее, по словам Штифеля и Шейфеле [11], основную роль в их построении регулярной небесной механики, накладывает на движение системы координат η дополнительное (неголономное) условие, заключающееся в равенстве нулю проекции ω_1 вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости этой системы координат на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ (ось η_1):

$$\omega_1 = 2(\lambda_0\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_0 - \lambda_2\dot{\lambda}_3 + \lambda_3\dot{\lambda}_2) = 2r^{-1}\left(-u_0\dot{u}_1 + u_1\dot{u}_0 - u_2\dot{u}_3 + u_3\dot{u}_2\right) = 0$$

Здесь верхняя точка – символ дифференцирования по времени t.

3.2. Регуляризация уравнений возмущенного центрального движения. Идеи в области кватернионной регуляризации уравнений задачи двух тел были использованы нами [34–37] (1985, 1993) для разработки общей кватернионной теории регуляризующих и стабилизирующих преобразований уравнений возмущенного центрального движения материальной точки, имеющих вид векторного дифференциального уравнения второго порядка для возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле с потенциалом $\Pi(r)$ под действием возмущающей силы с потенциалом $\Pi^*(\mathbf{r})$ и возмущающего ускорения $\mathbf{p}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r}/\mathrm{d}t)$. Здесь $\mathbf{r}$ – радиус-вектора точки, проводимый из центра силового поля, потенциал $\Pi(r)$ полагается произвольной дифференцируемой функцией расстояния r от материальной точки до центра этого силового поля.

В работах [34–37] получены общие кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного центрального движения материальной точки второго порядка с тремя регуляризующими функциями, условия приводимости кватернионных уравнений возмущенного центрального движения к удобному для аналитического и численного исследования осцилляторному виду (к виду уравнений движения четырехмерного возмущенного осциллятора, совершающего в случае невозмущенного центрального движения гармонические колебания с одинаковой частотой), а также кватернионные уравнения возмущенного центрального движения в нормальной форме. Из этих уравнений получены [37], как частные, системы регулярных кватернионных уравнений возмущенного центрального движения, в которых используются переменные Кустаанхеймо–Штифеля или параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера), а также системы кватернионных уравнений возмущенного движения, содержащие обобщенное уравнение Бинэ. Эти уравнения были также получены нами [38, 39] другим путем.

Полученные кватернионные системы уравнений возмущенного центрального движения отличаются своей структурой, размерностью, используемыми зависимыми и независимыми переменными и свойствами, описанными в этих работах.

Основное достоинство систем дифференциальных уравнений возмущенного центрального движения, полученных с использованием параметров Эйлера и независимой переменной τ ($d\tau = r^{-2}dt$) или независимой переменной φ ($d\varphi = cr^{-2}dt$), заключается в том, что каждое из входящих в эти системы уравнений дифференциальное кватернионное уравнение в параметрах Эйлера второго порядка является регулярным для возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле с любым видом потенциала $\Pi(r)$ (здесь c – модуль вектора момента количества движения точки).

Кроме этого, в случае невозмущенного центрального движения каждое из этих кватернионных уравнений в параметрах Эйлера становится эквивалентным уравнению движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора с частотой колебаний, равной $c/2$ во "времени" τ, или с частотой, равной $1/2$ во "времени" φ (параметры Эйлера осциллируют с указанными частотами "во времени" τ и φ), что является удобным для решения ряда задач методами нелинейной механики. При этом дифференциальные уравнения для полной энергии и модуля вектора момента количества движения точки, входящие в состав этих систем уравнений, также являются регулярными для любого вида потенциала $\Pi(r)$. Уравнения же для расстояния r регулярны лишь для потенциала $\Pi(r)$, имеющего четвертый порядок относительно величины r^{-1}, обратной расстоянию до центра притяжения, т.е. для потенциала

$$\Pi(r) = -a_1 r^{-1} - a_2 r^{-2} - a_3 r^{-3} - a_4 r^{-4} \qquad (a_i = \text{const})$$

В отличие от этих уравнений уравнения Кустаанхеймо–Штифеля имеют более простой вид, однако они регулярны лишь для потенциала, имеющего первый порядок относительно величины r^{-1}, когда $\Pi(r) = -a_1 r^{-1}$.

Полученные нами системы регулярных уравнений могут быть использованы, в частности, для изучения движения материальной точки в искривленном пространстве-времени, описываемом метрикой Шварцшильда. Траектории точки в таком пространстве соответствуют траекториям при движении в поле центральной силы с потенциалом

$$\Pi(r) = -a_1 r^{-1} - a_3 r^{-3} \qquad (a_i = \text{const})$$

Поэтому эти регулярные уравнения могут быть использованы для прогноза движения планет с учетом эффектов общей теории относительности (ОТО).

В наших работах [40, 41] они были использованы для построения регулярных кватернионных уравнений возмущенного орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник (с регуляризацией слагаемых уравнений, содержащих отрицательные степени расстояния r до четвертого порядка включительно).

3.3. Уравнения орбитального движения в кватернионных оскулирующих элементах, соответствующих параметрам Эйлера и их первым производным. Из кватернионных дифференциальных уравнений возмущенного центрального движения нами получены (1993) [39] уравнения возмущенного орбитального движения спутника, в состав которых входят уравнения в кватернионных оскулирующих элементах (медленно изменяющихся переменных), соответствующих параметрам Эйлера и их первым производным по обобщенной истинной аномалии, а из кватернионных регулярных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля получены [1, 3] регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в кватернионных оскулирующих элементах, соответствующих KS-переменным и их первым производным по "фиктивному" времени. Эти уравнения получены с использованием метода вариации произвольных кватернионных постоянных интегрирования и удобны для применения методов нелинейной механики.

3.4. Регулярные уравнения орбитального движения и параметры Эйлера. Нами предложены новые, регулярные кватернионные уравнения небесной механики и астродинамики, в которых используются переменные, характеризующие форму и размеры орбиты материальной точки (частицы), и параметры Эйлера для описания вращения используемой вращающейся (промежуточной) системы координат или ориентации мгновенной орбиты или плоскости орбиты. Эти уравнения не имеют особенностей, порождаемых использованием углов Эйлера, и удобны для решения ряда задач небесной механики и астродинамики.

К таким моделям относятся уравнения задачи двух тел и орбитального движения космического аппарата, записанные с использованием кватернионов в неголономном (азимутально-свободном) координатном трехграннике [1, 2, 30, 31, 34–38, 42–44], в орбитальном координатном трехграннике [1, 2, 38, 42, 45, 46], в орбитальной и идеальной системах координат с использованием первого кватернионного оскулирующего элемента орбиты [38, 39, 45, 46], в идеальной системе координат с использованием первого кватернионного оскулирующего элемента орбиты и идеальных прямоугольных координат Ганзена [47], а также уравнения, записанные с использованием второго кватернионного оскулирующего элемента орбиты [47]. Все эти модели имеют свои достоинства, проявляющиеся при решении тех или иных задач небесной механики и астродинамики. Автором статьи с их помощью решен ряд задач оптимального управления орбитальным движением космического аппарата. В состав этих уравнений входит кватернионное дифференциальное уравнение ориентации или неголономной (азимутально-свободной), или орбитальной, или идеальной системы координат, или кватернионное дифференциальное уравнение мгновенной ориентации орбиты изучаемого тела в параметрах Эйлера.

В работе [47] рассматриваются особенности типа сингулярности (деления на ноль), порождаемые использованием в небесной механике и астродинамике классических уравнений в угловых переменных (в частности, в углах Эйлера) и устраняемые с помощью использования параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватернионов Гамильтона. Рассматриваются основные регулярные в указанном смысле кватернионные модели небесной механики и астродинамики: уравнения траекторного движения, записанные в неголономном, орбитальном и идеальном сопровождающих трехгранниках, для описания вращательного движения которых используются параметры Эйлера и кватернионы поворотов, а также кватернионные уравнения ориентации мгновенной орбиты небесного тела (космического аппарата). Выводятся новые кватернионные регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел (траекторного движения КА), построенные с использованием идеальных прямоугольных координат Ганзена, параметров Эйлера и кватернионных переменных и имеющие наряду с известными достоинствами регулярных уравнений Кустаанхеймо–Штифеля свои дополнительные достоинства.

3.5. Регулярные кватернионные уравнения орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли и параметры Эйлера. В наших работах [40, 41] предложены регулярные кватернионные модели возмущенного орбитального движения твердого тела, не имеющие особенностей, присущих классическим моделям, при движении тела в ньютоновском гравитационном поле и, в общем случае, при движении тела в центральном силовом поле, потенциал которого имеет вид полинома отрицательных степеней расстояния до центра притяжения четвертого порядка. Предложены также регуляризованные кватернионные модели возмущенного орбитального движения тела в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются не только центральная (ньютоновская), но и зональные, тессеральные и секториальные гармоники потенциала поля тяготения, учитывающие несферичность Земли. В этих моделях понижены на несколько порядков отрицательные степени расстояния до центра притяжения в слагаемых, описывающих влияние на орбитальное движение твердого тела зональных, тессеральных и секториальных гармоник потенциала поля тяготения Земли. Основными переменными являются параметры Эйлера (или соответствующая им кватернионная переменная), расстояние от центра масс тела до центра притяжения, полная энергия орбитального движения тела и квадрат модуля вектора момента орбитальной скорости тела (или проекции этого вектора). В моделях используется новая независимая переменная, связанная с временем дифференциальным соотношением, содержащим квадрат расстояния от центра масс тела до центра притяжения.

В случае орбитального движения тела в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются только его центральная и зональные гармоники, найдены первые интегралы полученных уравнений орбитального движения, предложены замены переменных и преобразования этих уравнений, позволившие получить для изучения движения тела замкнутые системы дифференциальных уравнений меньшей размерности, в частности, систему уравнений третьего порядка для расстояния, синуса геоцентрической широты и квадрата модуля вектора момента орбитальной скорости.

3.6. Регулярные уравнения движения точки в ньютоновском гравитационном поле Земли под действием силы, ортогональной плоскости орбиты и параметры Эйлера. Среди задач астродинамики важное место занимают задачи оптимального управления ориентацией орбиты, плоскости орбиты космического аппарата, рассматриваемого как материальная точка, и задачи коррекции угловых элементов орбиты КА посредством реактивного ускорения или реактивной тяги двигателя КА, ортогональных плоскости орбиты КА.

В случае реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты КА, дифференциальные уравнения движения центра масс КА в ньютоновском гравитационном поле, описывающие изменение размеров и формы мгновенной орбиты КА, интегрируются, давая уравнение конического сечения. Поэтому управляемое движение центра масс КА в этом случае описывается дифференциальными уравнениями, описывающими изменение мгновенной ориентации орбиты КА или используемой (например, орбитальной) вращающейся системы координат, в которой записываются исходные уравнения движения центра масс КА, и дифференциальным уравнением для истинной аномалии, характеризующей положение центра масс КА на орбите.

Для управления (или возмущения), ортогонального мгновенной плоскости орбиты КА, форма и размеры орбиты КА в процессе управления не изменяются, а орбита поворачивается в пространстве как неизменяемая (недеформируемая) фигура. Это ценное свойство такого процесса переориентации орбиты КА является полезным как при решении задачи коррекции угловых элементов орбиты КА, так и других задач механики космического полета.

Традиционно используемые классические дифференциальные уравнения ориентации орбиты КА в угловых элементах орбиты являются наглядными, но существенно нелинейными и содержат особые точки, в которых угол наклона мгновенной орбиты КА становится равным нулю или 180 градусам, и в которых эти уравнения вырождаются (становятся непригодными). Таких проблем не имеют кватернионные дифференциальные уравнения ориентации орбиты КА [4, 39, 47–49] и орбитальной системы координат [38, 47–49] в параметрах Родрига–Гамильтона (Эйлера), предложенные автором статьи.

Отметим также, что решение задачи оптимальной переориентации круговой орбиты КА как деформируемой фигуры (на основе общих уравнений движения центра масс КА, содержащих три компоненты вектора управления) оказывается несостоятельным из-за вырождаемости в этом случае дифференциального уравнения для истинной аномалии (из-за наличия особенности типа сингулярности в этом уравнении). Такая же проблема в случае круговой орбиты возникает и при решении задачи переориентации орбиты с использованием общих дифференциальных уравнений движения центра масс КА в классических оскулирующих элементах орбиты. Вместе с тем актуальность задачи оптимальной переориентации круговой орбиты КА имеет большое практическое значение из-за того, что спутниковые навигационные группировки располагаются на круговых орбитах.

Отметим, что проблема вырожденности классических орбитальных элементов орбиты движущегося тела (например, КА) частично решается в механике космического полета за счет использования так называемых “невырожденных” орбитальных элементов (иногда для них используют термин “equinoctial elements”) и соответствующих уравнений ориентации орбиты Battin [50]. Эти уравнения, также как и предложенные автором статьи кватернионные уравнения ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера, не имеют особой точки (деления на ноль при равенстве нулю угла наклона орбиты), однако в этих уравнениях сохраняется особое значение угла наклона орбиты, равное 180 град. К тому же уравнения Battin и сопряженные к ним уравнения задач оптимального управления орбитальным движением КА, решаемых с использованием принципа максимума, значительно сложнее предложенных нами кватернионных регулярных фазовых и сопряженных уравнений в задачах оптимального управления орбитальным движением КА (например, в задачах оптимальной переориентации орбиты КА), как с аналитической, так и вычислительной точек зрения.

Кроме этого, кватернионное уравнение ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера обладает свойством самосопряженности: оно с точностью до обозначения кватернионной переменной совпадает с кватернионным сопряженным ему уравнением, что позволяет понизить размерность краевых задач оптимизации (с одновременным их упрощением) на четыре единицы с использованием новой кватернионной переменной, являющейся мультипликативной композицией кватернионных фазовой и сопряженной переменных (в виде их кватернионного произведения). Таким свойством классические дифференциальные уравнения ориентации орбиты в угловых элементах орбиты и уравнения Battin не обладают, причем соответствующие им сопряженные уравнения гораздо сложнее фазовых.

4. Приложение регулярных кватернионных уравнений астродинамики, в которых используются параметры Эйлера, к решению задач оптимального управления орбитальным движением космического аппарата. *4.1. Задачи оптимального управления о встрече в ньютоновском гравитационном поле управляемого космического аппарата с неуправляемым аппаратом и параметры Эйлера.* С использованием принципа максимума Понтрягина и различных вариантов регулярных кватернионных уравнений орбитального движения, записанных во вращающихся системах координат с использованием параметров Родрига—Гамильтона (Эйлера) и кватернионных переменных для описания ориентаций этих систем координат и орбиты КА, нами решены [1, 2, 4, 42, 44—46, 51, 52] в различных постановках (с использованием различных кватернионных моделей орбитального движения КА и различных критериев качества) задачи оптимального управления о мягкой или жесткой встрече в ньютоновском гравитационном поле управляемого космического аппарата с неуправляемым аппаратом, движущимся по кеплеровской орбите.

В одном из вариантов уравнений движения кватернионная переменная характеризует ориентацию мгновенной орбиты КА и положение КА на орбите (то есть, характеризует ориентацию орбитального трехгранника), во втором — ориентацию плоскости мгновенной орбиты КА и положение обобщенного перицентра на орбите, в третьем — ориентацию мгновенной орбиты КА. Кватернионная переменная, используемая во втором и третьем вариантах уравнений движения, является кватернионным оскулирующим элементом орбиты КА, соответствующим постановке задачи. В качестве минимизируемого функционала используется интегральный функционал качества, характеризующий расход энергии и времени на перевод управляемого КА из начального в конечное состояние, или характеристическая скорость КА. Управление (вектор ускорения от тяги реактивного двигателя) полагается ограниченным по модулю.

4.2. Задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата, плоскости орбиты, коррекции угловых элементов орбиты посредством реактивного ускорения или реактивной тяги, ортогональных плоскости орбиты КА и параметры Эйлера. В наших работах [49, 53—60] решены задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата, плоскости орбиты, коррекции угловых элементов орбиты посредством реактивного ускорения или реактивной тяги (для КА с переменной массой), ортогональных плоскости орбиты КА, с использованием принципа максимума Понтрягина и кватернионных дифференциальных уравнений ориентации орбитальной системы координат или орбиты КА в параметрах Эйлера в непрерывной (с ограниченным по модулю управлением) или в импульсной постановке. При таком управлении форма и размеры орбиты КА остаются в процессе управляемого движения неизменными, а сама орбита поворачивается в инерциальной системе координат как неизменяемая (недеформируемая) фигура, что важно, например, при управлении спутниковой навигационной группировкой.

Решены задачи быстродействия, минимизации импульса реактивного ускорения или реактивной тяги, характеристической скорости КА, а также задачи минимизации комбинированных функционалов качества: времени и суммарного импульса величины ускорения или тяги, затраченных на процесс управления, времени и характеристической скорости КА.

Решение задач оптимальной переориентации орбиты и плоскости орбиты космического аппарата, коррекции угловых элементов орбиты КА посредством реактивного ускорения, ортогонального плоскости оскулирующей орбиты, с помощью уравнений в классических угловых элементах орбиты [61—66] в строгой нелинейной постановке достаточно сложно в силу нелинейности этих уравнений, наличия в них особых точек, в которых угол наклона орбиты $i = 0, \pi$, а также в силу громоздкости уравнений для сопряженных переменных. Поэтому для решения этих задач вместо угловых элементов орбиты целесообразно использовать параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона).

В наших работах [49, 54, 58—60] для решения указанных задач использовано кватернионное дифференциальное уравнение, описывающее ориентацию орбитальной системы координат в параметрах Эйлера, и скалярное дифференциальное уравнение для истинной аномалии, характеризующей положение центра масс КА на орбите. В других наших работах [53, 55—57] для решения задач использовано кватернионное дифференциальное уравнение мгновенной ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера, и скалярное дифференциальное уравнение для истинной аномалии. Использование кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат более удобно при аналитическом исследовании задачи оптимальной переориентации орбиты КА в непрерывной постановке (с использованием малой тяги реактивного двигателя), однако использование кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА имеет преимущество при численном решении задач оптимальной переориентации орбиты КА и ее плоскости и коррекции угловых элементов орбиты, так как кватернион ориентации орбиты КА является оскулирующим (медленно изменяющимся) элементом орбиты. Кватернион ориентации орбитальной системы координат таким свойством не обладает, так как является быстро меняющейся переменной.

В работах [49, 53–56, 58, 59] в качестве управления используется вектор реактивного ускорения центра масс КА (масса КА полагается постоянной), задачи оптимального управления решаются в непрерывной постановке (с использованием малой тяги, ограниченной по модулю) или в импульсной постановке (с использованием большой тяги). В работах [57, 60] в качестве управления используется вектор тяги реактивного двигателя КА (масса КА полагается переменной, ее изменение описывается соответствующим дифференциальным уравнением), задачи оптимального управления решаются в непрерывной постановке с ограниченной по модулю тягой.

В работе [57] с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера и принципа максимума решена в нелинейной постановке задача об оптимальном переводе орбиты космического аппарата с переменной массой на заданную плоскость. Управление движением аппарата производится с помощью ограниченной по модулю реактивной тяги, ортогональной к плоскости оскулирующей орбиты КА. Учитывается изменение массы аппарата за счет расхода рабочего тела на процесс управления. Функционал, определяющий качество процесса управления, представляет собой линейную свертку с весовыми множителями двух критериев: времени и суммарного импульса тяги, затраченных на процесс управления. Излагается теория решения задачи. Приводятся результаты расчетов оптимального управления для случаев, когда в минимизируемом комбинированном функционале качества процесса управления одновременно учитываются оба критерия, и для случаев, когда минимизируется лишь суммарный импульс тяги. Получены примеры оптимального управления, содержащие до 192 пассивных и активных этапов. Установлены закономерности оптимального управления поворотом плоскости орбиты КА.

В работе [60] решена в нелинейной постановке с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбитальной системы координат в параметрах Эйлера и принципа максимума Понтрягина задача оптимального поворота плоскости орбиты КА переменной массы в инерциальной системе координат. Рассмотрены задачи быстродействия, минимизации импульса тяги, характеристической скорости КА, а также задачи минимизации комбинированных функционалов качества: времени и суммарного импульса величины тяги, затраченных на процесс управления, времени и характеристической скорости КА. Управление поворотом плоскости орбиты КА на любые по величине углы производится с помощью ограниченной по модулю реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты КА. Учитывается изменение массы аппарата за счет расхода рабочего тела на процесс управления. Частным случаем изучаемой задачи является задача оптимальной коррекции угловых элементов орбиты КА. Приведены результаты расчетов оптимального управления плоскостью орбиты КА посредством малой ограниченной реактивной тяги с большим количеством пассивных и активных участков траектории.

4.3. Положительные стороны использования параметров Эйлера в задачах оптимального управления орбитальным движением КА. Нами показано, что кватернионные регулярные уравнения орбитального движения центра масс КА, в состав которых входят уравнения в параметрах Эйлера, в отличие от классических уравнений орбитального движения в угловых оскулирующих элементах, содержащих особые точки (деление на ноль), этих особых точек не имеют. Эти кватернионные уравнения позволяют кардинально повысить эффективность аналитического исследования и численного решения выше указанных (*пп. 4.1, 4.2*) задач оптимального управления орбитальным движением КА, а также улучшить сходимость итерационных процессов численного решения краевых задач оптимизации. Нами с использованием параметров Эйлера установлены новые свойства оптимального управления орбитальным движением космических аппаратов и новые кватернионные первые интегралы пространственных краевых задач оптимального управления орбитальным движением, содержащие параметры Эйлера и сопряженные им переменные.

Так, в задачах оптимального управления орбитальным движением космических аппаратов, решаемых с использованием параметров Эйлера и принципа максимума Понтрягина (*п. 4.1*), были установлены новые общие кватернионные первые интегралы для фазовых и сопряженных уравнений этих задач, справедливые для любого управления орбитальным движением КА (в том числе и для оптимального управления). Эти интегралы аналогичны кватернионным первым интегралам, существующим в задачах оптимального управления вращательным движением твердого тела, установленным впервые Бранцем и Шмыглевским [67], и являются мультипликативными композициями кватернионных переменных, сопряженных к кватернионам ориентации вводимых подвижных (вращающихся) систем координат, и этих (фазовых) кватернионов ориентации, компонентами которых являются параметры Эйлера. Они имеют ясный геометрический смысл: система координат ζ, ориентация которой в инерциальном пространстве характеризуется сопряженной кватернионной переменной (сопряженной к соответствующей кватернионной фазовой переменной) оказывается повернутой относительно мгновенной фазовой системы координат η для любого момента времени на один и тот же угол вокруг эйлеровой оси, сохраняющей свое направление в инерциальной системе координат неизменным. Использование кватернионных первых интегралов позволило нам ввести новые переменные, связанные преобразованиями вращения с кватернионными первыми интегралами, и понизить с их помощью размерности исходных кватернионных дифференциальных уравнений краевых задач оптимального управления орбитальным движением с одновременным их упрощением на 5 единиц. Известные векторные первые интегралы в этих задачах справедливы только для оптимального управления и являются частными случаями векторных первых интегралов, являющихся векторными частями наших общих кватернионных первых интегралов, для оптимального управления орбитальным движением. Они не позволяют эффективно понизить размерности исходных векторных уравнений краевых задач оптимизации, записанных с использованием декартовых координат, из-за равенства нулю определителя трехмерного кососимметрического матричного коэффициента в матричном уравнении, соответствующем векторным первым интегралам.

4.4. В работе [1] даны обзор и обобщение результатов, полученных автором статьи и Сапунковым в теории оптимального управления движением материальной точки в центральном ньютоновском гравитационном поле с использованием принципа максимума Понтрягина и кватернионных моделей орбитального движения, в которых используются параметры Эйлера или переменные Кустаанхеймо–Штифеля. Эта теория имеет важное значение в механике космического полета, являясь фундаментом решения задач оптимального управления движением центра масс космического аппарата. Приведен обзор кватернионных моделей движения материальной точки в центральном ньютоновском гравитационном поле, дан анализ их достоинств и недостатков. Рассмотрена постановка задачи оптимального управления движением материальной точки в центральном ньютоновском гравитационном поле и ее связь с задачей оптимального управления движением центра масс космического аппарата. Анализируются основные проблемы, возникающие при решении задач оптимального управления движением материальной точки с помощью принципа максимума, в том числе проблема неустойчивости в смысле Ляпунова решений сопряженных уравнений. Показано, что эффективность аналитического исследования и численного решения краевых задач оптимального управления движением материальной точки может быть повышена за счет использования кватернионных моделей орбитального движения.

4.5. В нашей работе [4] дан анализ основных проблем, возникающих при решении задач оптимального управления траекторным движением КА с помощью принципа максимума (в том числе неустойчивость в смысле Ляпунова решений сопряженных уравнений). Показано, что использование кватернионных моделей астродинамики в параметрах Эйлера или переменных Кустаанхеймо—Штифеля позволяет устранить особые точки в дифференциальных фазовых и сопряженных уравнениях и в их частных аналитических решениях; построить новые кватернионные первые интегралы, существенно уменьшить размерности систем дифференциальных уравнений краевых задач оптимизации с одновременным их упрощением за счет использования новых кватернионных переменных, связанных с кватернионными константами движения преобразованиями вращения; построить общие решения дифференциальных уравнений для фазовых и сопряженных переменных на участках пассивного движения КА в наиболее простой и удобной форме, что важно для решения задач оптимальных импульсных перелетов КА; расширить возможности аналитического исследования дифференциальных уравнений краевых задач с целью выявления основных закономерностей оптимального управления и движения КА; улучшить вычислительную устойчивость решения краевых задач; уменьшить необходимый объем вычислений.

5. Применение дуальных параметров Эйлера и бикватернионов Клиффорда в задачах управления пространственным движением твердого тела (космического аппарата). Дуальные параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона) Λ_j ($j = 0, 1, 2, 3$) были введены автором статьи [33, 68, 69] для описания общего пространственного движения твердого тела, представляющего собой композицию вращательного (углового) и поступательного (орбитального) движений твердого тела, эквивалентных его винтовому движению. Они определяются соотношениями

$$\Lambda_0 = \cos(\Phi/2), \quad \Lambda_k = \sin(\Phi/2)\cos\Gamma_k, \quad \Phi = \varphi + s\varphi^0$$
$$\Gamma_k = \gamma_k + s\gamma_k^0, \quad k = 1,2,3$$

$$\Lambda_j = \lambda_j + s\lambda_j^0, \quad j = 0,1,2,3$$

$$\lambda_0 = \cos(\varphi/2), \quad \lambda_k = \sin(\varphi/2)\cos\gamma_k$$
$$\lambda_0^0 = -(\varphi^0/2)\sin(\varphi/2), \quad \lambda_k^0 = (\varphi^0/2)\cos(\varphi/2)\cos\gamma_k - \gamma_k^0\sin(\varphi/2)\sin\gamma_k$$

Здесь Φ — дуальный угол поворота тела вокруг его оси винтового конечного перемещения ab, φ — обычный (вещественный) угол поворота тела вокруг оси ab, φ^0 — величина поступательного перемещения тела вдоль оси ab, γ_k — угол между осью ab и осью X_k системы координат X, в которой рассматривается положение и движение тела, $|\gamma_k^0|$ — кратчайшее расстояние между этими осями; s — комплексность (символ) Клиффорда, имеющая свойство $s^2 = 0$; λ_j — обычные (вещественные) параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона), характеризующие поворот тела вокруг оси ab в системе координат X, величины λ_j^0 характеризуют поступательное перемещение тела вдоль оси ab в системе координат X.

Автором статьи также были введены для описания общего пространственного движения твердого тела бикватернионные матрицы и бикватернион (дуальный кватернион) конечного пространственного перемещения твердого тела Λ, определяемый как комплексная (дуальная) комбинация кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^0$:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i} + \Lambda_2\mathbf{j} + \Lambda_3\mathbf{k} = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0 = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k} + s(\lambda_0^0 + \lambda_1^0\mathbf{i} + \lambda_2^0\mathbf{j} + \lambda_3^0\mathbf{k})$$

а также различные матричные (в бикватернионных матрицах) и бикватернионные (в дуальных кватернионах) кинематические уравнения пространственного движения свободного твердого тела [49, 69, 48]. Одно из этих уравнений (наиболее часто используемое уравнение) имеет вид

$$2d\boldsymbol{\Lambda}/dt = \boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{U}_Y$$

$$\mathbf{U}_Y = U_1\mathbf{i} + U_2\mathbf{j} + U_3\mathbf{k} = \boldsymbol{\omega}_Y + s\mathbf{v}_Y, \quad \boldsymbol{\omega}_Y = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_Y = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

Здесь компонентами бикватерниона $\mathbf{U}_Y$ являются дуальные ортогональные проекции $U_k = \omega_k + sv_k$ кинематического винта $\mathbf{U}$ твердого тела на оси системы координат Y, связанной с твердым телом; ω_k и v_k – проекции векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}$ угловой и линейной скоростей тела на оси системы координат Y.

Это бикватернионное уравнение является дуальным аналогом кватернионного кинематического уравнения вращательного движения твердого тела

$$2d\boldsymbol{\lambda}/dt = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_Y$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\omega}_Y = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$$

Декартовые координаты x_k твердого тела в системе координат X находятся по кватернионной формуле

$$x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\lambda}^0 \circ \overline{\boldsymbol{\lambda}}$$

где верхняя черта – символ кватернионного сопряжения.

Кватернионы поворотов Гамильтона, компонентами которых являются широко известные вещественные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), и бикватернионы конечных перемещений Клиффорда (дуальные кватернионы), компонентами которых являются дуальные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), используются для описания вращательного (углового) и общего пространственного движения твердого тела (композиции вращательного и поступательного движений тела). Именно использование вещественных и дуальных параметров Эйлера, число которых равно четырем, в качестве кинематических параметров движения тела привело к широкому использованию в механике четырехмерных гиперкомплексных чисел (переменных): кватернионов Гамильтона и бикватернионов Клиффорда.

Кватернионные и бикватернионные кинематические уравнения в вещественных и дуальных параметрах Эйлера (Родрига–Гамильтона), входящие в состав используемых нами уравнений движения твердого тела и связывающие кватернион и бикватернион конечного перемещения тела, а также их первые призводные с вектором угловой скорости и кинематическим винтом тела в отображениях на связанный с телом базис, являются линейными (когда угловая и линейная скорости являются известными функциями времени) и не вырождаются ни при каком положении твердого тела в пространстве, в отличие от нелинейных кинематических уравнений в вещественных и дуальных углах Эйлера–Крылова, содержащих особые точки типа сингулярности (деления на ноль), появляющиеся при определенных положениях тела в пространстве. Такими же свойствами линейности и регулярности обладают кинематические уравнения движения твердого тела в вещественных и дуальных направляющих косинусах. Однако число параметров Эйлера равно четырем, поэтому они имеют одно уравнение связи, в отличие от шести уравнений связи для девяти направляющих косинусов (отметим, что кинематические уравнения в вещественных направляющих косинусах имеют размерность, равную девяти, и называются, как известно, уравнениями Пуассона).

Применение вещественных и дуальных параметров Эйлера позволяет исключить из рассмотрения операции с тригонометрическими функциями, что повышает эффективность аналитического и численного (особенно на бортовых компьютерах) решения задач механики и управления движением. Кватернионные и бикватернионные уравнения механики, в которых для описания движения используются вещественные и дуальные параметры Эйлера, имеют симметричные, компактные, а в ряде случаев и линейные или близкие к линейным структуры.

Кроме этого, параметры Эйлера (вещественные и дуальные), а с ними кватернионы и бикватернионы, позволяют наиболее эффективно решать многие вопросы теории конечных перемещений твердого тела, устойчивости и управления его движением. Отметим, что в настоящее время вещественные параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона) и кватернионы широко используются для решения геометрических и кинематических задач механики твердого тела и механических систем, а также задач управления их вращательным движением в кинематической и динамической постановках. Дуальные параметры Эйлера и бикватернионы конечных перемещений пока что такого широкого распространения не получили, хотя в последние годы в отечественной и зарубежной литературе опубликовано большое количество работ по применению дуальных параметров Эйлера и бикватернионов (дуальных кватернионов) для управления движением твердого тела, космического аппарата, а также роботов-манипуляторов (термин “бикватернион” был введен Клиффордом и широко использовался Котельниковым, на западе вместо него используется термин “дуальный кватернион”).

Также отметим, что в последнее время дуальные параметры Эйлера и бикватернионы нашли широкое применение в теории и алгоритмах инерциальной навигации, поэтому реализация бикватернионных законов управления движением может быть эффективно осуществлена с использованием этих алгоритмов.

Использование кватернионов поворотов Гамильтона в теории и практике управления вращательным движением движущихся объектов в настоящее время стало общепринятым, поскольку они, как уже отмечалось, являются наиболее простым и удобным средством математического описания вращательного движения твердого тела (например, космического аппарата, рассматриваемого как твердое тело). Применение дуальных параметров Эйлера и дуальных кватернионов (параболических бикватернионов Клиффорда [15, 32, 48, 70, 71]) в задачах управления пространственным движением твердого тела (управления винтовым движением тела, эквивалентным композиции его углового (вращательного) и поступательного (траекторного) движений) было начато в кинематических задачах управления движением твердого тела. В этих задачах управления в качестве математических моделей движения твердого тела используются бикватернионные кинематические уравнения пространственного движения тела в дуальных параметрах Эйлера, в которых в качестве фазовой переменной выступает бикватернион конечного перемещения Клиффорда, компонентами которого являются дуальные параметры Эйлера, а в качестве управления – кинематический винт тела. Цель кинематического управления – перевод тела из его заданного начального положения (углового и линейного) в требуемое конечное положение за счет сообщения телу требуемых угловой и линейной скоростей. Такая задача решается в классе задач построения программных (в частности, оптимальных) траекторий движения и программных управлений движением твердого тела или в классе задач построения нелинейных стабилизирующих (в частности, оптимальных стабилизирующих) управлений движением тела по принципу обратной связи.

Кинематическая задача построения оптимального в смысле быстродействия винтового перемещения свободного твердого тела из заданного начального положения в требуемое конечное в бикватернионной постановке изучалась Стрелковой и Маланиным [72, 73]. Для получения аналитического решения задачи ими было использовано бикватернионное кинематическое уравнение винтового движения свободного твердого тела в дуальных параметрах Эйлера, предложенное автором статьи [33, 69] (см. также его книгу [48]).

Кинематическое управление движением свободного твердого тела рассматривалось с использованием дуальных параметров Эйлера и дуальных кватернионов Dapeng Han, Qing Wei и Zexiang Li [74]. Введенное ими логарифмическое представление дуального кватерниона использовано для построения кинематического логарифмического закона управления движением свободного твердого тела по принципу обратной связи. Работы этих авторов [75] и [76] также посвящены решению кинематических задач управления движением механических систем и свободного твердого тела с использованием дуальных кватернионов и законов управления, построенных с использованием отрицательной бикватернионной логарифмической обратной связи. В работе [77] рассмотрено управление движением руки робота с использованием дуальных параметров Эйлера, дуальных кватернионов и кинематического бикватернионного стабилизирующего закона управления, предложенного в [74].

Автором статьи рассмотрена [78] в бикватернионной постановке с использованием дуальных параметров Эйлера кинематическая задача построения с использованием принципа обратной связи кинематического винта скоростей, сообщение которого свободному твердому телу обеспечивает его асимптотически устойчивый перевод из произвольного начального положения на любую выбранную программную траекторию винтового движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение по этой траектории с заданным (программным) кинематическим винтом скоростей. Стабилизирующее кинематическое управление формируется в виде нелинейной бикватернионной функции компонент бикватерниона ошибки по положению твердого тела (угловому и линейному) так, чтобы кинематические нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного движения свободного твердого тела, замкнутые построенными законами управления, принимали эталонный вид, инвариантный относительно любого выбранного программного движения: вид дуальных линейных стационарных дифференциальных уравнений первого или второго порядка относительно бикватернионной переменной, характеризующей конечные ошибки по угловому и линейному положению твердого тела. Постоянные коэффициенты (дуальные скалярные или матричные, или бикватернионные) этих (эталонных) уравнений имеют смысл коэффициентов усиления нелинейных обратных связей по положению тела, реализуемых системой управления движением тела, а сами уравнения описывают эталонную “динамику” переходных процессов. Это позволяет аналитически точно определять коэффициенты усиления нелинейных обратных связей, исходя из желаемых качественных и количественных характеристик переходного процесса.

В работе [79] нами было получено явное аналитическое решение в кинематической бикватернионной постановке (с использованием дуальных параметров Эйлера) задачи оптимальной (в смысле интегрального квадратичного функционала качества) нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела.

В последнее время дуальные параметры Эйлера и дуальные кватернионы стали широко использоваться для решения задач управления пространственным движением твердого тела, в частности, космического аппарата, рассматриваемого как твердое тело, в динамической постановке [80–95]. Уравнения динамики твердого тела записываются с использованием дуальных параметров Эйлера в бикватернионной форме, объединяющей динамические уравнения вращательного и поступательного движений твердого тела, и дополняются бикватернионным кинематическим уравнением в дуальных параметрах Эйлера. Для построения законов управления по принципу обратной связи часто используется один из современных методов теории управления – управление с прогнозирующей моделью (Model Predictive Control или MPC) [96]. MPC позволяет получить квазиоптимальное решение для нелинейных объектов при наличии ограничений на управление и фазовых ограничений, но имеет и ряд недостатков, среди которых – неаналитичность, достаточно высокое потребление вычислительных ресурсов, поскольку этот метод требует численного интегрирования дифференциальных уравнений движения. Для синтеза законов управления по принципу обратной связи также используется метод "бэкстеппинг" ("backstepping"). Это – рекурсивная процедура, в которой совмещены задачи нахождения функции Ляпунова и соответствующего ей закона управления. Метод был предложен Кокотовичем в 1990 году. В соответствии с этим методом задача построения закона управления для всей системы разбивается на последовательность соответствующих подзадач для систем меньшего порядка. Алгоритм бэкстеппинга заключается в том, чтобы сделать каждый интегратор объекта устойчивым путем добавления обратной связи, вычисленной по этому алгоритму, и представляет собой набор действий, выполняемых для каждого дифференциального уравнения математической модели объекта. Для задачи управления пространственным движением твердого тела на первом этапе рассматривается кинематическая задача управления движением тела, описываемая бикватернионным кинематическим уравнением в дуальных параметрах Эйлера. На этом этапе кинематический бикватернионный стабилизирующий закон управления часто берется в виде логарифмической обратной связи, т.е. в виде, использующем логарифмическое представление дуального кватерниона пространственного перемещения тела.

В нашей работе [97] разработан в нелинейной динамической постановке с использованием дуальных параметров Эйлера, нормированных бикватернионов Клиффорда и дуальных матриц новый метод аналитического построения управления пространственным движением твердого тела (управления винтовым движением, эквивалентным композиции углового (вращательного) и поступательного движений). Управления обеспечивают асимптотическую устойчивость в большом любого выбранного программного пространственного движения в инерциальной системе координат и желаемую динамику управляемого пространственного движения твердого тела. Для построения законов управления используются бикватернионные и дуальные матричные модели пространственного движения твердого тела, предложенные автором статьи, концепция решения обратных задач динамики, принцип управления с обратной связью и подход, основанный на приведении построенных нелинейных дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения твердого тела к эталонным линейным стационарным дифференциальным формам выбранной структуры за счет использования предложенных нелинейных обратных связей в законах управления. Рассмотрены бикватернионные модели пространственного движения твердого тела, дана постановка задачи управления движением твердого тела, приведены различные формы нелинейных дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения твердого тела в бикватернионных и винтовых переменных, удобные для построения законов управления. Предложены различные дуальные матричные (винтовые) законы управления пространственным движением твердого тела (в частности, космического аппарата, рассматриваемого как свободное твердое тело), для которых нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела принимают вид линейных стационарных дуальных матричных дифференциальных уравнений второго порядка (относительно винтовой части бикватерниона ошибки положения твердого тела), инвариантных относительно любого выбранного программного пространственного движения твердого тела. Постоянные коэффициенты (скалярные дуальные или матричные дуальные) этих уравнений являются коффициентами усиления нелинейных обратных связей в предлагаемых дуальных законах управления, обеспечивающих нужное качество переходных процессов управления. Обсуждено определение коэффициентов усиления нелинейных обратных связей, свойства управляемого движения твердого тела.

Отметим, что в задачах управления движением традиционно используются (как в наших работах [78, 97]) нормированные бикватернионы конечных перемещений тела и трехмерные винты скоростей и ускорений пространственного движения тела (бикватернионы скоростей и ускорений с нулевыми дуальными скалярными частями). Однако, как показали наши исследования [97–99], законы формирования стабилизирующих управлений пространственным движением твердого тела по принципу обратной связи, полученные с помощью приведения бикватернионных нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения тела в указанных переменных к дуальным линейным стационарным дифференциальным формам (за счет соответствующего выбора дуальных нелинейных обратных связей в законах управления), имеют особую точку (когда эйлеров угол поворота тела в его возмущенном угловом движении становится равным 180°), в которой эти законы управления вырождаются. В этой точке дуальные скалярные величины, фигурирующие в знаменателях полученных законов управления, становятся равными нулю. Поэтому такого рода законы стабилизирующих управлений обеспечивают (при соответствующем выборе постоянных коэффициентов усиления дуальных нелинейных обратных связей) асимптотическую устойчивость любого выбранного пространственного движения тела в большом, но не в целом.

Регулярные в целом (не содержащие особых точек) законы управления могут быть получены в нелинейной динамической постановке, как показано нами [98, 99], если в рамках предлагаемого нами подхода к синтезу стабилизирующих управлений использовать ненормированный бикватернион положения тела и "четырехмерные" скорости и ускорения пространственного движения тела (бикватернионы скоростей и ускорений с ненулевыми дуальными скалярными частями).

В работах [98, 99] разработан в нелинейной динамической постановке с использованием дуальных кватернионов (бикватернионов Клиффорда) новый метод аналитического построения управления пространственным движением твердого тела (в частности, космического аппарата, рассматриваемого как твердое тело). Управление обеспечивает асимптотическую устойчивость в целом любого выбранного программного движения в инерциальной системе координат и желаемую динамику управляемого движения тела. Для построения законов управления предложены новые бикватернионные дифференциальные уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела, в которых использованы ненормированные бикватернионы конечных перемещений, бикватернионы угловых и линейных скоростей и ускорений тела с ненулевыми дуальными скалярными частями; концепция решения обратных задач динамики, принцип управления с обратной связью и подход, основанный на приведении уравнений возмущенного движения тела к линейным стационарным дифференциальным формам выбранной структуры, инвариантным относительно любого выбранного программного движения, за счет соответствующего выбора дуальных нелинейных обратных связей в предложенных бикватернионных законах управления. Построены аналитические решения бикватернионных дифференциальных уравнений, описывающие динамику процесса управления пространственным движением тела с использованием предлагаемых бикватернионных законов управления. Проанализированы свойства и закономерности такого управления.

В нашей работе [98] рассмотрено два вида управляемого пространственного движения твердого тела: программное движение тела относительно инерциальной системы координат и движение тела относительно программной (неинерциальной) системы координат (относительное движение). В работе изложены бикватернионные дифференциальные уравнения и того и другого вида движения тела. Использование бикватернионов позволило записать и те и другие уравнения в компактном, удобном для решения задачи управления виде. Основное внимание в работе уделено бикватернионным дифференциальным уравнениям возмущенного движения тела и синтезу с их использованием стабилизирующих управлений движением твердого тела (т.е. управлений движением твердого тела по принципу обратной связи в неинерциальной системе координат).

В этой работе нами предложен аналитический метод построения законов управления пространственным движением твердого тела в нелинейной бикватернионной постановке и новые кватернионные и бикватернионные регулярные законы управления, обеспечивающие асимптотически устойчивый в целом перевод твердого тела, имеющего произвольные начальные угловую и линейную скорости, из его произвольного заранее незаданного начального углового и линейного положений на любую выбранную программную траекторию пространственного (углового и линейного) движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение тела по этой траектории с необходимыми (программными) угловыми и линейными скоростями и ускорениями. Переходный процесс управления при этом имеет желаемые качественные и количественные характеристики.

Отличительные черты предложенного метода — его аналитичность (возможность аналитического решения задачи синтеза управлений в нелинейной пространственной динамической постановке) и возможность обоснованного выбора необходимых дуальных коэффициентов усиления нелинейных обратных связей в законах управления, исходя из требуемой (желаемой) динамики процесса управления движением.

6. Заключение. Применение параметров Эйлера (Родрига—Гамильтона) и кватернионов поворотов Гамильтона в механике традиционно связывают с угловым (вращательным) движением твердого тела (в частности, космического аппарата). Однако в последние годы параметры Эйлера и кватернионы поворотов Гамильтона стали широко использоваться в механике для описания орбитального (траекторного) движения центра масс твердого тела (космического аппарата).

Особенности типа сингулярности (деления на ноль) классических уравнений небесной механики и механики космического полета (уравнений орбитального движения), порождаемые использованием углов Эйлера для описания ориентации мгновенной орбиты изучаемого тела или системы координат, в которой записываются уравнения орбитального движения, эффективно устраняются с помощью использования четырехмерных параметров Эйлера (Родрига—Гамильтона) и кватернионов поворотов Гамильтона. Это показывает проведенный нами в статье обзор и анализ регулярных моделей небесной механики и механики космического полета, построенных с использованием параметров Эйлера и кватернионов поворота Гамильтона на основе дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел. Рассмотренные нами приложения этих моделей в задачах оптимального управления орбитальным движением космического аппарата, решаемых с использованием принципа максимума Понтрягина, показывает, что эффективность аналитического исследования и численного решения пространственных краевых задач оптимального управления траекторным (орбитальным) движением космических аппаратов кардинально повышается за счет использования указанных регулярных кватернионных моделей механики космического полета.

Обзор и анализ публикаций, в которых используются дуальные параметры Эйлера и дуальные кватернионы (бикватернионы Клиффорда) для решения задач управления общим пространственным движением твердого тела (космического аппарата), представляющим собой композицию вращательного и траекторного движений, с использованием принципа обратной связи показал эффективность использования дуальных параметров Эйлера и дуальных кватернионов для решения этих задач управления.

Отметим, что обзор работ по кватернионной регуляризации (устранения) других особенностей (типа деления на ноль) классических уравнений небесной механики и механики космического полета, порождаемых гравитационными и другими центральными силами, с помощью использования параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона), четырехмерных переменных Кустаахеймо–Штифеля и других модифицированных четырехмерных переменных, двухмерных переменных Леви-Чивита, а также с помощью использования в качестве дополнительных переменных энергетических переменных и регуляризующего преобразования времени дан в нашей недавней работе [100].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Челноков Ю.Н.* Анализ оптимального управления движением точки в гравитационном поле с использованием кватернионов // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 5. С. 18–44.
2. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.
3. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. I // Косм. иссл. 2013. Т. 51. № 5. С. 389–401.
4. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. III // Косм. иссл. 2015. Т. 53. № 5. С. 430–446. https://doi.org/10.7868/S0023420615050040
5. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. I // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 24–54.
6. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 800 с.
7. *Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 864 с.
8. *Hamilton W.R.* Lectures on quaternions. Dublin: Hodges and Smith, 1853.
9. *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of the Kepler motion // Ann. Univ. Turku. 1964. V. 73. P. 3–7.
10. *Kustaanheimo P., Stiefel E.* Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // J. Reine Anqew. Math. 1965. V. 218. P. 204–219.
11. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971. 350 p. = *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.
12. *Deprit A.* Ideal frames for perturbed keplerian motions // Celest. Mech. 1976. V. 13. № 2. P. 253–263.
13. *Брумберг В.А.* Аналитические алгоритмы небесной механики. М.: Наука, 1980. 208 с.
14. *Брагазин А.Ф., Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Описание орбитального движения с использованием кватернионов и скоростных параметров // Анн. докл. шестого Всесоюзного съезда по теорет. и прик. механике. Ташкент: “Фан”, 1986. С. 133.
15. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
16. *Pelaez J., Hedo J.M., Rodriguez de Andres P.* A special perturbation method in orbital dynamics // Celest. Mech. Dyn. Astron. 97, 131–150 (2007). https://doi.org/10.1007/s10569-006-9056-3
17. *Bau G., Urrutxua H. and Pelaez J.* EDROMO: An accurate propagator for elliptical orbits in the perturbed two-body problem // Adv. Astronaut. Sci. 2014. V. 152. № 06. P. 379–399.
18. *Bau G., Bombardelli C., Pelaez J. and Lorenzini E.* Non-singular orbital elements for special perturbations in the two-body problem // MNRAS. 2015. V. 454. № 3. P. 2890–2908. https://doi.org/10.1093/mnras/stv2106
19. *Libraro P.*A Globally Nonsingular Quaternion-Based Formulation for All-Electric Satellite Trajectory Optimization. A Dissertation... for the Degree of Doctor of Philosophy. Princeton University. 2016. 153 p.

20. *Roa J. and Kasdin J.* Alternative set of nonsingular quaternionic orbital elements // J. Gui. Contr. Dyn. 2017. V. 40. № 11. 2737–2751.
https://doi.org/10.2514/1.G002753
21. *Amato D., Bombardelli C., Bau G., Morand V., Aaron J. Rosengren*. Non-averaged regularized formulations as an alternative to semi-analytical orbit propagation methods // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2019. V. 131. P. 21 (2019).
https://doi.org/10.1007/s10569-019-9897-1
22. *Bau G., Roa J.* Uniform formulation for orbit computation: the intermediate elements // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2020. V. 132. P. 10.
https://doi.org/10.1007/s10569-020-9952-y
23. *Andoyer H.* Cours de mecanigue celeste. Paris: Gauthier-Villars, 1923.
24. *Deprit A*. Ideal elements for perturbed Keplerian motions // J. Res. National Bureau Standards. s – B. Mat. Sci. 1975. V. 79B. № 1 and 2. P. 1–15.
https://doi.org/10.6028/JRES.079B.001
25. *Musen P.* Application of Hansen's theory to the motion of an artificial satellite in the gravitational field of the Earth // J. Geophys. Res. 1959. V. 64. № 12. P. 2271–2279.
https://doi.org/10.1029/JZ064i012p02271
26. *Brown E.W. and Shook C.A.* Panetary Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1933.
27. *Musen P.* On stromgren's method of special perturbations // J. Astron. Sciences. 1961. V. 8. P. 48–51.
28. *Musen P.* On the application of pfaff's method in the theory of variation of astronomical. constants // NASA Technical Note D-2301. 1964. 24 p.
29. *Broucke R., Lass H. and Ananda M.* Redundant variables in celestial mechanics // Astron. Astrophys. 1971. V. 13. P. 390–398.
30. *Челноков Ю.Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 151–158.
31. *Челноков Ю.Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 12–21.
32. *Clifford W.* Preliminary sketch of biquaternions // Proc. London Math. Soc. 1873. V. 4. P. 381–395.
33. *Челноков Ю.Н.* Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 32–39.
34. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 1: Общая теория. Приложения к задаче регуляризации и к задаче о движении ИСЗ. Деп. в ВИНИТИ 13.12.85. № 218628-В. М.: ВИНИТИ, 1985. 36 с.
35. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 2: Пространственная задача невозмущенного центрального движения. Задача с начальными условиями. Деп. в ВИНИТИ 13.22.85. № 8629–В. М.: ВИНИТИ, 1985. 18 с.
36. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 1 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 1. С. 20–30.
37. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 2 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 2. С. 3–11.
38. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I // Косм. иссл. 1992. Т. 30. Вып. 6. С. 759–770.
39. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. II // Косм. иссл. 1993. Т. 31. Вып. 3. С. 3–15.
40. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные регулярные модели возмущенного орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли // ПММ. 2019. Т. 83. № 4. С. 562–585.
https://doi.org/10.31857/S003282350002735-8
41. *Chelnokov Yu.N.* Regular quaternion models of perturbed orbital motion of a rigid body in the earth's gravitational field // Mech. Solids. 2020. V. 55. № 7. P. 40–58.
https://doi.org/10.3103/S0025654420070079
42. *Челноков Ю.Н.* Построение оптимальных управлений и траекторий движения космического аппарата, использующее кватернионное описание пространственной ориентации орбиты // Косм. иссл. 1997. Т. 35. № 5. С. 534–542.

43. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в механике космического полета // Гироск. навиг. 1999. № 4 (27). С. 47–66.
44. *Челноков Ю.Н.* Оптимальное управление движением космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле: Применение кватернионов для описания ориентации орбиты // Косм. иссл. 1999. Т. 37. № 4. С. 433–442.
45. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. Ч. 1 // Косм. иссл. 2001. Т. 39. № 5. С. 502–517.
46. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. Ч. 2 // Косм. иссл. 2003. Т. 41. № 1. С. 92–107.
47. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. II // Косм. иссл. 2014. Т. 52. № 4. С. 322–336. https://doi.org/10.7868/S0023420614030029
48. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
49. *Челноков Ю.Н.* Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // ПММ. Т. 76. Вып. 6. 2012. С. 895–912.
50. *Battin R.H.* An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics. N. Y.: AIAA Press, 1987. https://doi.org/10.2514/4.861543
51. *Афанасьева Ю.В., Челноков Ю.Н.* Задача о встрече в центральном ньютоновском гравитационном поле управляемого космического аппарата с неуправляемым космическим аппаратом, движущимся по эллиптической кеплеровской орбите // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 3. С. 164–179.
52. *Афанасьева Ю.В., Челноков Ю.Н.* Задача оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата как деформируемой фигурой // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 4. С. 125–138.
53. *Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф. 2012. Т. 12. № 3. С. 87–95.
54. *Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Решение задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата с использованием кватернионных уравнений ориентации орбитальной системы координат // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф. 2013. Т. 13. № 1–1. С. 84–92.
55. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Часть 1 // Мехатр. автомат. управл. 2016. Т. 17. № 8. С. 567–575. https://doi.org/10.17587/mau.17.567-575
56. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Часть 2 // Мехатр. автомат. управл. 2016. Т. 17. № 9. С. 633–643. https://doi.org/10.17587/mau.17.663-643
57. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Оптимальный поворот плоскости орбиты космического аппарата переменной массы в центральном гравитационном поле посредством ортогональной тяги // Автомат. телемех. 2019. № 8. С. 87–108.
58. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Импульсная оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. I // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 5. С. 70–89. https://doi.org/10.31857/S057232990002467-3
59. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Импульсная оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. II // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 1. С. 3–23. https://doi.org/10.1134/S0572329919010021
60. *Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Кватернионное решение задачи оптимального поворота плоскости орбиты космического аппарата переменной массы с помощью тяги, ортогональ-

ной плоскости орбиты // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 4. С. 110–129.
https://doi.org/10.1134/S057232991904007X

61. *Копнин Ю.М.* К задаче поворота плоскости орбиты спутника // Косм. иссл. 1965. Т. 3. Вып. 4. С. 22–30.
62. *Лебедев В.Н.* Расчет движения космического аппарата с малой тягой. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 108 с.
63. *Борщевский М.З., Иослович М.В.* К задаче о повороте плоскости орбиты спутника при помощи реактивной тяги // Косм. иссл. 1969. Т. 7. Вып. 6. С. 8–15.
64. *Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В.* Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975. 680 с.
65. *Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.* Основы механики космического полета: Уч. пос. М.: Наука, 1990. 445 с.
66. *Ишков С.А., Романенко В.А.* Формирование и коррекция высокоэллиптической орбиты спутника Земли с двигателем малой тяги // Косм. иссл. 1997. Т. 35. № 3. С. 287–296.
67. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
68. *Челноков Ю.Н.* Об одном винтовом методе описания движения твердого тела // Сб. науч.-метод. статей по теорет. мех. М.: Высшая школа, 1981. Вып. 11. С. 129–138.
69. *Челноков Ю.Н.* Об одной форме уравнений инерциальной навигации // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 20–28.
70. *Котельников А.П.* Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань, 1895. 215 с.
71. *Котельников А.П.* Винты и комплексные числа // Изв. физ.-матем. общества при Казанском ун-те. 1896. Сер. 2. № 6. С. 23–33.
72. *Стрелкова Н.А.* Оптимальное по быстродействию кинематическое управление винтовым перемещением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. 4. С. 73–76.
73. *Маланин В.В., Стрелкова Н.А.* Оптимальное управление ориентацией и винтовым движением твердого тела. М.–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004. 204 с.
74. *Han D., Qing Wei Q., Li Z.* Kinematic control of free rigid bodies using dual quaternions // Int. J. Automat. Comput. 2008. V. 5. № 3. P. 319–324.
https://doi.org/10.1007/s11633-008-0319-1
75. *Han D., Qing Wei, Li Z., Weimeng Sun.* Control of oriented mechanical systems: a method based on dual quaternion // IFAC Proc. Vols. 2008. V. 41. № 2. P. 3836–3841.
https://doi.org/10.3182/20080706-5-KR-1001.00645
76. *Han D., Qing Wei, Li Z.* A Dual-quaternion method for control of spatial rigid body. networking, sensing and control // IEEE Intern. Conf. Networking Sensing Control. 2008. P. 1–6.
https://doi.org/10.1109/ICNSC.2008.4525172
77. *Ozgur E., Mezouar Y.* Kinematic modeling and control of a robot arm using unit dual quaternions // Robot. Autonom. Syst. 2016. V. 77. P. 66–73.
78. *Челноков Ю.Н.* Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твердого тела и его приложение к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 1. С. 38–58.
79. *Челноков Ю.Н., Нелаева Е.И.* Бикватернионное решение кинематической задачи оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Мат. Мех. Инф. 2016. Т. 16. № 2. С. 198–206.
80. *Perez A., McCarthy J.M.* Dual quaternion synthesis of constrained robotic systems // J. Mech. Design. 2004. V. 126. № 3. P. 425–435.
81. *Han D., Wei Q., Li Z., Sun W.* Control of oriented mechanical systems: a method based on dual quaternions // IFAC Proc. Vols. 2008. V. 41. № 2. 2008. P. 3836–3841.
https://doi.org/10.3182/20080706-5-KR-1001.00645
82. *Schilling M.* Universally manipulable body models – dual quaternion representations in layered and dynamic MMCs // Auton. Robots. 2011. V. 30. P. 399–425.
https://doi.org/10.1007/s10514-011-9226-3
83. *Zhang F., Duan G.* Robust integrated translation and rotation finite-time maneuver of a rigid spacecraft based on dual quaternion // AIAA Guid. Navig. Control Conf. 2011. Portland, Oregon. USA.

AIAA, 2011. P. 6396.
https://doi.org/10.2514/6.2011-6396

84. *Wang J., Sun Z.* 6DOF Robust adaptive terminal sliding mode control for spacecraft formation flying // Acta Astron. 2012. V. 73. P. 76–87.
https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2011.12.005

85. *Wang J., Liang H., Sun Z., Zhang S., Liu M.* Finite-time control for spacecraft formation with dualnumber based description // J. Guid. Contr. Dyn. 2012. V. 35. № 3. P. 950–962.
https://doi.org/10.2514/1.54277

86. *Wang J., Yu C.* Unit dual quaternion-based feedback linearization tracking problem for attitude and position dynamics // Syst. Control Lett. 2013. V. 62. № 3. P. 225–233.
https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2012.11.019

87. *Filipe N., Tsiotras P.* Rigid body motion tracking without linear and angular velocity feedback using dual quaternions // IEEE. Europ. Control Conf. 2013. P. 329–334.
https://doi.org/10.23919/ECC.2013.6669564

88. *Lee U.* State-constrained rotational and translational motion control with applications to monolithic and distributed spacecraft. A dissertation... for the degree of Doctor of Philosophy. Univ. of Washington. 2014.

89. *Filipe N., Kontitsis M., Tsiotras P.* Extended Kalman filter for spacecraft pose estimation using dual quaternions // J. Guid. Contr. Dyn. 2015. V. 38. № 9. P. 1625–1641.
https://doi.org/10.2514/1.G000977

90. *Filipe N., Tsiotras P.* Adaptive position and attitude–tracking controller for satellite proximity operations using dual quaternions // J. Guid. Contr. Dyn. 2015. V. 38. № 4. P. 566–577.

91. *Lee U., Mesbahi M.* Optimal powered descent guidance with 6-DoF line of sight constraints via unit dual quaternions // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. 5–9 January 2015 Kissimmee, Florida. AIAA, 2015.
https://doi.org/10.2514/6.2015-0319

92. *Gui H., Vukovich G.* Cite as dual-quaternion-based adaptive motion tracking of spacecraft with reduced control effort // Nonlin. Dyn. 2016. V. 83. № 1–2. P. 597–614.

93. *Ахрамович С.А., Малышев В.В., Старков А.В.* Математическая модель движения беспилотного летательного аппарата в бикватернионной форме // Научно-техн. ж. "Полет". 2018. Т. 4. С. 9–20.

94. *Ахрамович С.А., Малышев В.В.* Применение бикватернионов в задачах управления летательными аппаратами // Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. М.: МАИ, 2018. С. 117–120.

95. *Ахрамович С.А., Баринов А.В.* Система управления движением БПЛА с прогнозирующей моделью в бикватернионной форме // Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. М.: МАИ, 2018. С. 120–122.

96. *Garcia C., Prett D.M., Morari M.* Model predictive control: theory and practice // Automatica. 1989. № 3. P. 335–348.

97. *Челноков Ю.Н.* Управление пространственным движением твердого тела с использованием бикватернионов и дуальных матриц // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 1. С. 17–43.
https://doi.org/10.31857/S0572329921010049

98. *Челноков Ю.Н.* Синтез управления пространственным движением твердого тела с использованием дуальных кватернионов // ПММ. 2019. Т. 83. № 5–6. С. 704–733.
https://doi.org/10.1134/S0032823519050035

99. *Chelnokov Yu.N.* Synthesis of Control of Spatial Motion of a Rigid Body Using Dual Quaternions // Mech. Solids. 2020. V. 55. № 7. P. 59–80.
https://doi.org/10.3103/S0025654420070080

100. *Chelnokov Y.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // Appl. Math. Mech. (Eng. Ed.). 2022. V. 43. № 1. P. 21–80.
https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9