

УДК 539.3: 534.1

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКОГО УДАРНОГО ФРОНТА В УПРУГОМ СЛОЕ

© 2022 г. А. В. Ильяшенко^{a,*}

^aМосковский Государственный строительный университет, Москва, Россия

*e-mail: avi_56@mail.ru

Поступила в редакцию 24.01.2022 г.

После доработки 03.02.2022 г.

Принята к публикации 04.02.2022 г.

Исследуется задача о волновом фронте в анизотропном упругом слое. Показано, что в случае упругой изотропии однородная волна с плоским фронтом в слое возможна лишь в одном частном случае, при нулевом коэффициенте Пуассона. В других случаях для существования волны с плоским фронтом, волна должна быть неоднородной по отношению к трансверсальной координате. Аналитическое решение, обеспечивающее существование плоского ударного волнового фронта, получено впервые.

Ключевые слова: анизотропия, волновой фронт, акустический тензор, упругий слой

DOI: 10.31857/S0572329922050075

1. Введение. В [1–17] исследовались задачи распространения гармонических дисперсионных и бездисперсионных волн в линейно-упругих средах. Определенная часть исследований выполняется численными методами на основе конечных элементов, обладающих спектральными свойствами [18–21]. Для решения волновых задач применяются так же конечно-разностные методы [22–26], используются методы граничных интегральных уравнений [27–29], а так же различные варианты безсеточных (meshless) методов, наиболее распространенными из которых являются SPH и DEM методы [30–32]. Проблема определения скоростей распространения упругих волн становится особенно сложной, когда в среде, или конструкции возникает дисперсия и волновой профиль начинает размываться из-за различия в скоростях распространения частотных составляющих волнового профиля. По-видимому, впервые этот факт теоретически исследован в [33], в дальнейшем, исследования в этом направлении продолжены в [34–39]. Применительно к исследуемым ниже дисперсионным волнам в пластинах, большое число работ посвящено исследованию длинноволновых пределов волн Лэмба, Рэлея–Лэмба и Лява [40–43], являющихся, по существу, бездисперсионными в окрестности нулевой частоты (для симметричной фундаментальной моды) [44, 45].

Нужно отметить, что имеется значительное число экспериментальных исследований, посвященных исследованию распространению ударных волн в стержнях [46–48], известны исследования по образованию и распространению ударного фронта в одномерных волноводах из бимодульных материалов [49, 50].

В этой связи особый интерес представляет исследование условий, при которых могут распространяться “плоские” волны, поперечный профиль которых остается плоским в процессе движения. Ниже, в линейной постановке исследуются вопросы существования волн в упругом анизотропном слое с поляризацией волны, не зависящей от поперечной координаты. На основе потенциалов для поля смещений построены ана-

литические решения, позволяющие описать условия для дисперсионных волн, у которых, несмотря на дисперсию, волновой фронт остается плоским. Условия существования таких волн, как показывает обзор литературы, получены впервые.

2. Волновой фронт в безграничной среде. Задача о распространении плоского ударного волнового фронта, рассматривается в упругой инфинитезимальной постановке.

2.1. *Анизотропная среда.* Уравнения движения в линейно-упругой анизотропной среде могут быть представлены в виде

$$\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.1)$$

где $\mathbf{u}$ — поле смещений, $\mathbf{x}$ — пространственная координата, t — время, ρ — плотность среды, $\mathbf{C}$ — четырехвалентный симметричный тензор упругости

$$\forall i, j, m, n \quad C_{imjn} = C_{imnj} = C_{mijn} = C_{jnim} \quad (2.2)$$

Условиями (2.2) из рассмотрения исключаются микрополярные среды.

Рассматривая тензор $\mathbf{C}$, как оператор, в шестимерном пространстве симметричных тензоров второго ранга, запишем условие его строгой эллиптичности

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} > 0 \quad (2.3)$$

Условие (2.3) выполняется для любых ненулевых разложимых тензоров вида $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — произвольные ненулевые векторы.

Введем волновой потенциал для плоской бегущей волны

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m} \psi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct) \quad (2.4)$$

В представлении (2.4) $\mathbf{n}$ — волновой вектор, определяющий направление распространения волны, c — скорость, $\mathbf{m}$ — нормализованная поляризация волны ($\|\mathbf{m}\| = 1$), определяющая движение на фронте волны, ψ — скалярный потенциал, с помощью которого задается профиль волны. Ниже предполагается, что потенциал ψ — достаточно гладкий [48]

$$\psi \in C^{k-1}(\mathbb{R}) \quad \& \quad \partial \psi \notin C^{k-1}(\mathbb{R}), \quad k \geq 1 \quad (2.5)$$

Заметим, что в отношении волновых фронтов применяется следующая классификация: в случае, когда $k = 1$, то есть потенциал ψ непрерывен, а его первая производная разрывная, волновой фронт считается сильным, — в этом случае при распространении волны напряжения являются разрывными на фронте волны, в то время как, перемещения являются непрерывными функциями пространственной координаты. В случае, когда $k \geq 2$, волновой фронт считается слабым, для слабого волнового фронта и напряжения и перемещения являются непрерывными функциями пространственной координаты. В случае, когда $k < 1$, волновой фронт считается сверхсильным, такой волновой фронт сопровождается разрывами в перемещениях. Помимо условия (2.5), обычно вводят следующее условие, предполагающее отсутствие смещений перед фронтом волны и ненулевую кривизну волнового потенциала за фронтом волны

$$\psi(s) = \begin{cases} 0, & s > 0 \\ \partial^2 \psi \neq 0, & s < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Таким образом, предполагается, что перед фронтом материал находится в естественном недеформированном состоянии. Кроме того, движение плоской волны описывается условием

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct = 0 \quad (2.7)$$

Уравнения движения (2.1) совместно с представлением (2.4) и условием (2.6) дают алгебраическое уравнение Кристоффеля для определения векторной амплитуды $\mathbf{m}$

$$(\mathbf{A}(\mathbf{n}) - \rho c^2 \mathbf{I}) \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (2.8)$$

В уравнении (2.8) $\mathbf{I}$ — единичный тензор (единичная диагональная матрица), $\mathbf{A}(\mathbf{n})$ — акустический тензор, определяемый волновым вектором $\mathbf{n}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \quad (2.9)$$

Уравнение (2.8) показывает, что для любого волнового вектора $\mathbf{n}$ акустический тензор (2.9) симметричен и строго эллиптичен. Это обеспечивает существование трех действительных и положительных собственных чисел в Жордановой нормальной форме тензора (2.9)

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}) = \mathbf{Q}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{Q}'(\mathbf{n}) \quad (2.10)$$

где $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$ — ортогональный тензор, зависящий от вектора $\mathbf{n}$, а $\mathbf{D}(\mathbf{n})$ — диагональный тензор, состоящий из собственных чисел акустического тензора, верхний индекс в (2.10) обозначает транспонирование соответствующего тензора (матрицы). Возвращаясь к уравнению Кристоффеля, заметим, что поляризация (векторная амплитуда) является собственным вектором акустического тензора и корневым собственным вектором тензора в левой части уравнения (2.8). Симметрия акустического тензора обеспечивает существование трех взаимно ортогональных собственных векторов и, следовательно, поляризации, соответствующие собственным значениям акустического тензора взаимно ортогональны. Более того, даже в случае, когда акустический тензор не является простым, например в случае изотропной среды, он — полупростой, тем не менее он обладает тремя взаимно ортогональными собственными векторами.

Замечания 2.1. а) Уравнения (2.4)–(2.8) обеспечивают постоянство скоростей распространения, в случае сильных или слабых ударных волновых фронтов.

б) Уравнения движения (2.1) и представление для поля смещений (2.4) показывают, что какова бы ни была функция ψ , которая, вообще говоря, может не удовлетворять условиям, заданным уравнениями (2.5), (2.6), она определяет некоторое поле движений в безграничной среде. Однако, если тело имеет границы, то функция ψ , уже не является произвольной.

в) Имея ввиду Замечание 2.1.б, рассмотрим функцию ψ в виде гармонической по временной и пространственным переменным функции

$$\psi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct) = \exp(ir(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct)) \quad (2.11)$$

где r — волновое число. Функция (2.11) описывает плоскую гармоническую волну круговой частоты $\omega = rc$ и длины $l = 2\pi c/\omega$. Заметим, что в случае гармонической волны волновой фронт определяется в пространстве $\mathbb{R}^4$, как

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct = \text{const} \quad (2.12)$$

г) Особый интерес представляет поле напряжений на фронте волны

$$\sigma_{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \quad (2.13)$$

Подставляя в выражение (2.13) поле перемещений, определяемое представлением (2.4), получим

$$\sigma_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} \partial \psi(s) \Big|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct} \quad (2.14)$$

2.2. Упругая изотропия. Тензор упругости, рассматриваемый как оператор в пространстве симметричных тензоров, может быть записан в виде невырожденной симметрической матрицы размерности 6×6

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & 2\mu & & \\ & & & & 2\mu & \\ & & & & & 2\mu \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

В представлении (2.15) λ и μ – константы Ляме

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.16)$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона. Тензор упругости (2.15) позволяет записать закон Гука в терминах соответствующих шестимерных векторов $\vec{\sigma}_6 = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{12})$ и $\vec{\epsilon}_6 = (\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{13}, \epsilon_{23}, \epsilon_{12})$.

Векторное уравнение Кристоффеля (2.8) для тензора упругости изотропной среды (2.15) принимает вид

$$\left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho c^2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{\mu}{\rho c^2} (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (2.17)$$

Уравнение Кристоффеля в форме (2.17) имеет собственные числа, определяющие скорости продольной волны $c_1 = c_L$ и двух поперечных волн $c_{2,3} = c_T$

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.18)$$

Замечания 2.2. а) Матрица в левой части уравнения Кристоффеля (2.17) не является простой, поскольку два ее собственных числа совпадают. Однако, эта матрица остается полупростой, поскольку в ее структуре отсутствуют Жордановы блоки.

б) Анализ уравнений (2.14), (2.17) показывает, что напряжения на фронте волны представимы в виде

$$\sigma_{\mathbf{n}} = (\lambda + 2\mu) \mathbf{n} \partial \psi(s) \Big|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct} \quad (2.19)$$

Выражение (2.19) показывает, что напряжения на фронте продольной волны по направлению совпадают со смещениями. При этом, на плоскостях ортогональных фронту волны, т.е. на плоскостях с нормалью $\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = 0$ нормальные напряжения $\sigma_{\mathbf{p}}$, вообще говоря, тоже присутствуют

$$\sigma_{\mathbf{p}} = \lambda \mathbf{p} \partial \psi(s) \Big|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct} \quad (2.20)$$

При $\lambda = 0$ на плоскостях $\Pi_{\mathbf{p}}$ напряжений нет.

в) В случае поперечной волны напряжения на фронте волны определяются выражением

$$\sigma_{\mathbf{n}} = \mu \mathbf{n} \partial \psi(s) \Big|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct} \quad (2.21)$$

показывающим, что напряжения $\sigma_{\mathbf{n}}$ ортогональны волновому вектору $\mathbf{n}$ и совпадают с направлением смещений. На ортогональных плоскостях $\Pi_{\mathbf{m}}$ с нормалью $\mathbf{m}$ (напомним, что в рассматриваемом случае $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$) напряжения $\sigma_{\mathbf{m}}$ представимы в виде

$$\sigma_{\mathbf{m}} = \mu \mathbf{n} \partial \psi(s) \Big|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct} \quad (2.22)$$

г) В случае, если $\lambda = 0$ тензор упругости (2.15) диагонален и тензор $\mathbf{A}(\mathbf{n})$ принимает вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}) = \mu (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{I}) \quad (2.23)$$

Кроме того, при $\lambda = 0$ на плоскостях ортогональных фронту волны как нормальные, так и касательные компоненты поверхностных напряжений оказываются нулевыми.

3. Волновой фронт в слое. Рассмотрим пластину со свободными поверхностями толщины h . Пусть начало координат расположено на срединной поверхности пластины и волновой вектор $\mathbf{n}$ находится в срединной плоскости, а $\mathbf{v}$ — вектор единичной нормали к этой плоскости.

3.1. *Упругая анизотропия.* Условия на боковых поверхностях пластины, выражающие собой отсутствие соответствующих напряжений, представимы в виде

$$\sigma_v \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{u}|_{x'=\pm h/2} = 0 \quad (3.1)$$

где обозначено $x' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}$.

Поле смещений для ударной волны, распространяющейся в направлении $\mathbf{n}$ и имеющей плоский фронт, определяется выражением

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{m} \varphi(x') \psi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct) \quad (3.2)$$

где $\mathbf{u}$ — поле перемещений, $\varphi(x')$ — пока еще неизвестная функция, характеризующая вариацию амплитуды волны в трансверсальном направлении. Граничные условия (3.1) при учете (3.2) принимают вид

$$\sigma_v \equiv \left[\begin{array}{l} \mathbf{A}(\mathbf{v})(\partial \varphi|_{x'=\pm h/2})(\psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) + \\ + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n})(\varphi|_{x'=\pm h/2})(\partial \psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \end{array} \right] \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (3.3)$$

Уравнения (2.1) и представление поля смещений (3.2) дают дифференциальное уравнение второго, позволяющее определить поляризацию волнового фронта $\mathbf{m}$, причем в это уравнение входят две, вообще говоря, неизвестных функции φ и ψ

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{A}(\mathbf{v})(\partial^2 \varphi)(\psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) + \mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{n})(\partial \varphi)(\partial \psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \\ + (\mathbf{A}(\mathbf{n}) - \rho c^2 \mathbf{I})(\varphi)(\partial^2 \psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \end{array} \right] \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (3.4)$$

В уравнении (3.4)

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} \quad \mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} \quad (3.5)$$

Замечания 3.1. а) В том случае, когда профиль волны ψ известен заранее (это часто встречается при моделировании ударных волн), дифференциальное уравнение (3.4) становится обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка относительно функции φ .

б) Если, функция ψ гармонична, например, определяется выражением (2.11), уравнение (3.4) принимает вид

$$[\mathbf{A}(\mathbf{v})(\partial^2 \varphi) + i r \mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{n})(\partial \varphi) - r^2 (\mathbf{A}(\mathbf{n}) - \rho c^2 \mathbf{I})(\varphi)] \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (3.6)$$

3.2. *Изотропия, $\lambda \neq 0$.* В изотропном случае условия (3.3) равенства нулю напряжений на соответствующих границах слоя принимают вид

$$\sigma_v \equiv \left[\begin{array}{l} ((\lambda + 2\mu)(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \mu(\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}))(\partial \varphi|_{x'=\pm h/2})(\psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \\ + (\lambda \mathbf{v} \otimes \mathbf{n} + \mu \mathbf{n} \otimes \mathbf{v})(\varphi|_{x'=\pm h/2})(\partial \psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \end{array} \right] \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (3.7)$$

Аналогичным образом трансформируется уравнение (3.4):

$$\left[\begin{array}{l} ((\lambda + 2\mu)\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \mu(\mathbf{I} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}))(\partial^2 \varphi)(\psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \\ + (2(\lambda + \mu)\text{sym}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{n}))(\partial \varphi)(\partial \psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \\ + ((\lambda + 2\mu)\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mu(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \rho c^2 \mathbf{I})(\varphi)(\partial^2 \psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \end{array} \right] \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (3.8)$$

В (3.8) обозначено

$$\text{sym}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{n}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}) \quad (3.9)$$

Замечание 3.2. Для продольной волны с поляризацией, совпадающей с направлением распространения, уравнения (3.8) приобретают вид

$$\begin{cases} \mu(\partial^2 \varphi)(\psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) - ((\lambda + 2\mu) - \rho c^2)(\varphi)(\partial^2 \psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) = 0 \\ (\lambda + \mu)(\partial \varphi)(\partial \psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Уравнения (3.10) показывают, что при произвольной функции ψ , такой что $\psi(s)$, $\partial \psi(s)$ и $\partial^2 \psi(s)$ не равны тождественно нулю, их выполнение при $\varphi = \text{const}$ возможно лишь при условии

$$c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (3.11)$$

Однако, надо заметить, что условия $\varphi = \text{const}$ $\lambda \neq 0$ противоречат условиям (3.7) на границе.

3.3. *Изотропия*, $\lambda = 0$. Условия (3.3) при $\lambda = 0$ принимают вид

$$\sigma_v \equiv \mu \left[\begin{aligned} &(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{I})(\partial \varphi|_{x'=\pm h/2})(\psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \\ &+ \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}(\varphi|_{x'=\pm h/2})(\partial \psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \end{aligned} \right] \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (3.12)$$

Аналогичным образом трансформируется уравнение (3.8):

$$\mu \left[\begin{aligned} &(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{I})(\partial^2 \varphi)(\psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \\ &+ 2\text{sym}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{n})(\partial \varphi)(\partial \psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \\ &+ \left(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{I} - \frac{\rho c^2}{\mu} \mathbf{I} \right)(\varphi)(\partial^2 \psi(s)|_{s=\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct}) \end{aligned} \right] \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (3.13)$$

Дифференциальные уравнения (3.13) для волны, описываемой уравнениями (2.11), трансформируются к виду

$$\begin{aligned} &[(\mu(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{I}))(\partial^2 \varphi) + ir(2\mu \text{sym}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{n}))(\partial \varphi) - \\ &- r^2(\mu(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{I}) - \rho c^2 \mathbf{I})(\varphi)] \cdot \mathbf{m} = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Последнее выражение показывает, что условия (3.12) на границе и дифференциальные уравнения (3.13) удовлетворяются для волны с продольной поляризацией и плоским фронтом с постоянной по поперечному сечению функцией φ . Последнее, с учетом Замечания 3.2, дает

Предложение а) В случае изотропного слоя *плоская продольно-поляризованная волна* существует лишь при выполнении условия $\lambda = 0$.

б) В общем случае, когда $\lambda \neq 0$ продольно-поляризованная ударная или гармоническая волна существует, если (i) фронт волны непlosкий, или (ii) поляризация волны непостоянна в поперечном сечении слоя: $\varphi(x') \neq \text{const}$.

4. Заключение. Построенные решения показывают, что плоский волновой фронт продольной волны в изотропном линейно-упругом слое со свободными граничными поверхностями, может распространяться

(1) либо при условии нулевого коэффициента Пуассона, что эквивалентно нулевой константе Ламе $\lambda = 0$, и тогда амплитуда продольной волны необходимо постоянна в поперечном сечении;

(2) либо при ненулевом коэффициенте Пуассона и, соответственно, ненулевой константе Ламе λ , но переменной в поперечном сечении амплитуде.

Таким образом, изначально плоский ударный фронт продольной волны в изотропном упругом слое в случае произвольного и не равного нулю коэффициента Пуассона, необходимо трансформируется в волновой профиль с переменной в трансверсальном направлении амплитудой. Представляется интересным обобщение полученных результатов на ударные волны, распространяющиеся в стратифицированных и функционально-градиентных пластинах.

В заключение необходимо отметить недавние исследования по распространению дисперсионных гармонических волн в стержнях [51–54], где вопросы существования плоских ударных фронтов также играют важную роль.

Благодарность. Автор благодарит Российский фонд фундаментальных исследований (Грант 20-08-00419) за частичную финансовую поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Strutt J.W. (Lord Rayleigh)* On wave propagating along the plane surface of an elastic solid // Proc. London Math. Soc. 1885. V. 17. P. 4–11.
2. *Farnell G.W.* Properties of elastic surface waves // Phys. Acoust. 1970. V. 6. P. 109–166.
3. *Ventura P., Hodre J.M., Desbois J., Solal M.* Combined FEM and Green's function analysis of periodic SAW structure, application to the calculation of reflection and scattering parameters // IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr. 2001. V. 48. P. 1259–1274.
4. *Synge J.L.* Elastic waves in anisotropic media // J. Math. Phys. 1956. V. 35. P. 323–334.
5. *Stoneley R.* The propagation of surface elastic waves in a cubic crystal // Proc. Roy. Soc. 1955. A232. P. 447–458.
6. *Stroh A.N.* Steady state problems in anisotropic elasticity // J. Math. Phys. 1962. V. 41. P. 77–103.
7. *Lim T.C., Farnell G.W.* Search for forbidden directions of elastic surface-wave propagation in anisotropic crystals // J. Appl. Phys. 1968. V. 39. P. 4319–4325.
8. *Lim T.C., Farnell G.W.* Character of pseudo surface waves on anisotropic crystals // J. Acoust. Soc. Amer. 1969. V. 45. P. 845–851.
9. *Farnell G.W.* Properties of elastic surface waves // Phys. Acoust. 1970. V. 6. P. 109–166.
10. *Bauerschmidt P., Lerch R., Machui J., Ruile W., Visintini G.* Reflection and transmission coefficients of SAW in a periodic grating computed by finite element analysis // Proc. IEEE Ultrasonics Symposium. 1990. P. 421–423.
<https://doi.org/10.1109/ULTSYM.1990.171400>
11. *Davies R.M.* A critical study of the Hopkinson pressure bar // Phil. Trans. R. Soc. 1948. V. A240. P. 375–457.
12. *Mindlin R.D., Hermann G.* A one-dimensional theory of compressive waves in an elastic rod // Proc. First U.S. National Congress Appl. Mech. Chicago, 1955.
13. *Haskell N.A.* Dispersion of surface waves on multilayered media // Bull. Seismol. Soc. America. 1953. V. 43. № 1. P. 17–34.
14. *Knopoff L.* A matrix method for elastic wave problems // Bull. Seismol. Soc. America. 1964. V. 54. № 1. P. 431–438.
15. *Graff K.F.* Wave Motion in Elastic Solids. New York: Dover Publ., 1975. 649 p.
16. *Ting T.C.T.* Anisotropic elasticity: theory and applications. New York: Oxford Univ. Press, 1996.
17. *Kravtsov A.V. et al.* Finite element models in Lamb's problem // Mech. Solids. 2011. V. 46. P. 952–959.
<https://doi.org/10.3103/S002565441106015X>
18. *Fortunato D., Hale N., Townsend A.* The ultraspherical spectral element method // J. Comput. Phys. 2021. V. 436. P. 110087.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.110087>
19. *Orszag S.A.* Spectral methods for problems in complex geometries // J. Comput. Phys. 1980. V. 37. P. 70–92.
[https://doi.org/10.1016/0021-9991\(80\)90005-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(80)90005-4)

20. *Martinsson P.* A direct solver for variable coefficient elliptic PDEs discretized via a composite spectral collocation method // *J. Comput. Phys.* 2013. V. 242 P. 460–479.
<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.02.019>
21. *Babb T., Gillman A., Hao S., Martinsson P.-G.* An accelerated Poisson solver based on multidomain spectral discretization // *BIT Numer. Math.* 2018. V. 58. P. 851–879.
<https://doi.org/10.1007/s10543-018-0714-0>
22. *Chua C., Stoffab P.L.* Nonuniform grid implicit spatial finite difference method for acoustic wave modeling in tilted transversely isotropic media // *J. Appl. Geophys.* 2012. V. 76. P. 44–49.
23. *Falk J., Tessmer E., Gajewski D.* Efficient finite-difference modelling of seismic waves using locally adjustable time steps // *Geophys. Prospecting.* 1998. V. 46. P. 603–616.
24. *Moczko P., Kristek J., Galis M., Pazak P.* On accuracy of the finite-difference and finite-element schemes with respect to p -wave to s -wave speed ratio // *Geophys. J. Int.* 2010. V. 182. P. 493–510.
25. *Antunes A.J.M., Leal-Toledo R.C.P., Filho O.T.S., Toledo, Elson M.* Finite difference method for solving acoustic wave equation using locally adjustable time-steps // *Procedia Computer Sci.* 2014. V. 29. P. 627–636.
<https://doi.org/10.1016/j.procs.2014.05.056>
26. *Oliveira S.A.M.* A fourth-order finite-difference method for the acoustic wave equation on irregular grids // *Geophys.* 2003. V. 68 (2). P. 672–676.
27. *Wu T.W.* Boundary Element Acoustics: Fundamentals and Computer Codes. Advances in Boundary Elements. Southampton, Boston: Witpress, 2000.
28. *Silva J.J.R.* Acoustic and Elastic Wave Scattering using Boundary Elements. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1994.
29. *Wang X., Chen H., Zhang J.* An efficient boundary integral equation method for multi-frequency acoustics analysis // *Eng. Anal. Boundary Elem.* 2015. V. 61. P. 282–286.
<https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2015.08.006>
30. *Zhang Y.O., Zhang T., Ouyang H., Li T.Y.* SPH simulation of acoustic waves: Effects of frequency, sound pressure, and particle spacing // *Math. Problems Eng.* 2015. V. 2015. P. 348314. P. 1–7.
<https://doi.org/10.1155/2015/348314>
31. *Wang Sh., Zhang Y.O., Wu J.P.* Lagrangian meshfree finite difference particle method with variable smoothing length for solving wave equations // *Adv. Mech. Eng.* 2018. V. 10 (7). P. 1–12.
<https://doi.org/10.1177/1687814018789248>
32. *Cleckler J., Elghobashi S., Liu F.* On the motion of inertial particles by sound waves // *Phys. Fluids.* 2012. V. 24 (3). P. 033301.
<https://doi.org/10.1063/1.3696243>
33. *Gogoladze V.G.* Dispersion of Rayleigh waves in a layer // *Publ. Inst. Seism. Acad. Sci. U.R.S.S.* 1947. V. 119. P. 27–38.
34. *Thomson W.T.* Transmission of elastic waves through a stratified solid medium // *J. Appl. Phys.* 1950. V. 21 (2). P. 89–93.
35. *Kuznetsov S.V.* SH-waves in laminated plates // *Quart. Appl. Math.* 2006. V. 64 (1). P. 153–165.
<https://doi.org/10.1090/s0033-569x-06-00992-1>
36. *Evans R.B.* The decoupling of seismic waves // *Wave Motion.* 1986. V. 8 (4). P. 321–328.
37. *Kuznetsov S.V.* Abnormal dispersion of Lamb waves in stratified media // *Z. Angew. Math. Phys.* 2019. V. 70. P. 175.
<https://doi.org/10.1007/s00033-019-1222-z>
38. *Ilyashenko A. et al.* SH waves in anisotropic (monoclinic) media // *Z. Angew. Math. Phys.* 2018. V. 69. P. 17.
<https://doi.org/10.1007/s00033-018-0916-y>
39. *Goldstein R.V.* Rayleigh waves and resonance phenomena in elastic bodies // *J. Appl. Math. Mech.* 1965. V. 29 (3). P. 608–619.
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(65\)90066-3](https://doi.org/10.1016/0021-8928(65)90066-3)
40. *Goldstein R.V., Kuznetsov S.V.* Long-wave asymptotics of Lamb waves // *Mech. Solids.* 2017. V. 52. P. 700–707.
<https://doi.org/10.3103/S0025654417060097>
41. *Argatov I., Iantchenko A.* Rayleigh surface waves in functionally graded materials – long-wave limit // 2019. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* V. 72 (2) P. 197–211.
<https://doi.org/10.1093/qjmam/hbz002>

42. *Kaplunov J., Prikazchikov D.* Asymptotic theory for Rayleigh and Rayleigh-type waves // *Adv. Appl. Mech.* 2017. V. 50. P. 1–106.
<https://doi.org/10.1016/bs.aams.2017.01.001>
43. *Craster R.V., Joseph L.M., Kaplunov J.* Long-wave asymptotic theories: The connection between functionally graded waveguides and periodic media // *Wave Motion* 2014. V. 51 (4). P. 581–588.
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2013.09.007>
44. *Wootton P.T., Kaplunov J., Prikazchikov D.* A second order asymptotic model for Rayleigh waves on a linearly elastic half plane // *IMA J. Appl. Math.* 2020. V. 85 (1). P. 113–131.
<https://doi.org/10.1093/imamat/hxz037>
45. *Djeran-Maigre I. et al.* Solitary SH waves in two-layered traction-free plates // *Comptes Rendus. Mec.* 2008. V. 336 (1–2). P. 102–107.
<https://doi.org/10.1016/j.crme.2007.11.001>
46. *Karman T., Duwez P.* The propagation of plastic deformation in solids // *J. Appl. Phys.* 1950. V. 21. P. 987–994.
<https://doi.org/10.1063/1.1699544>
47. *Knowles J.* Impact-induced tensile waves in a rubberlike material // *J. Appl. Math.* 2002. V. 62. P. 1153–1175. /
<https://doi.org/10.1137/S0036139901388234>
48. *Molinari A., Ravichandran G.* Fundamental structure of steady plastic shock waves in metals // *J. Appl. Phys.* 2004. V. 95. P. 1718–1732.
<https://doi.org/10.1063/1.1640452>
49. *Kuznetsova M., Khudyakov M., Sadovskii V.* Wave propagation in continuous bimodular media // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2021.
<https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1889725>
50. *Hafskjold B., Bedeaux D., Kjelstrup S., Wilhelmsen Ø.* Theory and simulation of shock waves: Entropy production and energy conversion // *Phys. Rev. Ser. E.* 2021. V. 104 (1).
<https://doi.org/10.1103/physreve.104.014131>
51. *Ilyashenko A.V. et al.* Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // *Arch. Appl. Mech.* 2018. V. 88. P. 1385–1394.
<https://doi.org/10.1007/s00419-018-1377-7>
52. *Ilyashenko A.V.* Pochhammer–Cree Longitudinal Waves: Anomalous Polarization // *Mech. Solids.* 2019. V. 54. P. 598–606.
<https://doi.org/10.3103/S0025654419040149>
53. *Мокряков В.В.* Максимумы напряжений в продольных волнах Похгаммера–Кри // *Изв. РАН. МТТ.* 2019. № 5. С. 86–103.
<https://doi.org/10.1134/S057232991905012X>
54. *Гаджибеков Т.А., Ильяшенко А.В.* Теоретические аспекты применения волн Похгаммера–Кри к задачам определения динамического коэффициента Пуассона // *Изв. РАН. МТТ.* 2021. № 5. С. 113–126.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921050044>