ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2022, № 5, с. 120–129

УДК 531.36

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ РАВНОГРАННОГО ТЕТРАЭДРА, БЛИЗКОГО К ПРАВИЛЬНОМУ, С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В ЦЕНТРАЛЬНОМ НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

Е. А. Никонова[a],*

[a] *Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук, Москва, Россия*

**e-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com*

Поступила в редакцию 14.12.2021 г.
После доработки 06.01.2022 г.
Принята к публикации 07.01.2022 г.

Изучаются существование, устойчивость и ветвление стационарных движений тетраэдрального тела вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил. Рассматривается случай равногранного тетраэдра близкого к правильному.

Исследуется связь этих свойств стационарных движений со свойствами стационарных движений правильного тетраэдра.

В небесной механике гравитационное поле небесного тела неправильной формы нередко моделируется гравитационным полем некоторой совокупности массивных точек. Представления в виде совокупности двух или трёх точечных масс содержат симметрии, не присущие реальным телам. Наиболее подходящими представляются приближения гравитационных полей с помощью полей притяжения именно четырёх массивных точек.

Ключевые слова: твердое тело с неподвижной точкой, тело в центральном гравитационном поле, теория Рауса, устойчивость и ветвление стационарных движений, равногранный тетраэдр

DOI: 10.31857/S0572329922050117

Введение. Согласно исследованиям [1–3] в случае правильного тетраэдра, являющегося частным случаем равногранного, масса которого в равных долях сосредоточена в его вершинах, наблюдаются примечательные свойства равновесий, а именно, размерность элемента правильного тетраэдра (вершина, ребро, грань), которым он обращен в стационарном движении, в частности, и в равновесии, к притягивающему центру совпадает со степенью неустойчивости. "Чувствительность" этих свойств к геометрическим модификациям правильного тетраэдра обсуждается в работах [4–6]. Изучаются существование, устойчивость и ветвление стационарных движений равногранного тетраэдра вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил.

Исследование "чувствительности" динамических свойств платоновых тел восходит к публикации [7], в которой предложен оригинальный подход, опирающийся на эффективное использование симметрий в распределении масс при изучении стационарных движений в задачах динамики твердого тела (см. также [8–13]). Другое направление исследований динамики тетраэдральных тел, обусловленное потребностями механики космического полета, связано с предположением о наличии в них роторов [14–16].

Настоящее исследование инспирировано, в частности, работой [8], где рассматривается задача о движении однородного параллелепипеда, закрепленного в центре масс и находящегося в центральном ньютоновском поле сил. В работе определены все положения равновесия тела, близкого к кубу, исследованы их ветвления и устойчивость в зависимости от параметров задачи.

В небесной механике при изучении динамики малых тел со сложным распределением масс, форма которых далека от шарообразной, последние могут быть представлены в виде совокупности нескольких точечных масс, т.н. масконов. Так, например, гравитационное поле кометы (67P) Чурюмова—Герасименко может быть представлено полем притяжения образующих тетраэдр четырех массивных точек [17] (см. также [18], относительно вопроса качества приближения).

1. Постановка задачи и основные обозначения. Рассмотрим движение твердого тела $\mathcal{T}$ вокруг неподвижной точки O в поле сил ньютоновского притяжения с центром в точке N. Пусть $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^{\mathrm{T}}$ — единичный вектор, направленный от N к O, $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции тела относительно точки O, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^{\mathrm{T}}$ — вектор угловой скорости тела. Здесь и далее все векторы и тензорные величины задаются в подвижной системе отсчета $Ox_1x_2x_3$, оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела, задаваемых собственными векторами тензора инерции $\mathbf{I}$.

Если $U_N = U_N(\gamma)$ — потенциал силового поля, то описывающие движение уравнения Эйлера—Пуассона можно записать в виде

$$\mathbf{I}\dot{\omega} = \mathbf{I}\omega \times \omega + \gamma \times \frac{\partial U_N}{\partial \gamma}, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega \tag{1.1}$$

Помимо интеграла энергии $\mathcal{J}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{I}\omega, \omega) + U_N(\gamma) = h$ и интеграла площадей $\mathcal{J}_1 = (\mathbf{I}\omega, \gamma) = p_\psi$, уравнения (1.1) допускают геометрический интеграл

$$\mathcal{J}_2 = (\gamma, \gamma) - 1 = 0 \tag{1.2}$$

задающий в пространстве $R^3(\gamma)$ т.н. сферу Пуассона $\mathcal{S}$.

Как известно (см., например, [19]), система (1.1) может обладать перманентными вращениями вокруг оси NO с постоянной по величине угловой скоростью ω. Положение оси перманентного вращения в теле согласно (1.1) задаются уравнениями

$$0 = \gamma \times \left(\frac{\partial U_N}{\partial \gamma} - \omega^2 \mathbf{I}\gamma\right), \quad \omega = \mathrm{const}$$

Замечание. Согласно теории Рауса ([20, 21], см. также [22]) эти вращения могут быть найдены как критические точки приведенного (en: amended) потенциала

$$U_\psi = \frac{p_\psi^2}{2I(\gamma)} + U_N(\gamma)$$

рассмотренного как функция на сфере (1.2). Здесь $I(\gamma) = (\mathbf{I}\gamma, \gamma)$ — момент инерции тела относительно оси вращения. При этом постоянная интеграла площадей p_ψ и величина угловой скорости оказываются связанными соотношением $p_\psi = I(\gamma)\omega$.

Хорошо известно, что при описании движения твердого тела в центральном поле ньютоновского притяжения, как правило, достаточно воспользоваться разложением до слагаемых первого или второго порядка малости по параметру, характеризующему отношение размеров тела к его расстоянию до притягивающего центра. Однако, в случае, когда тензор инерции тела близок к шаровому, такие приближения, вообще говоря, оказываются недостаточными. В дальнейшем в качестве примера рассмотрим движение твердого тела $\mathcal{T}$ в виде равногранного тетраэдра с равными массами в вершинах.

2. Равногранный тетраэдр. Согласно [23], тетраэдр называется равногранным, если все грани – равные между собой треугольники. Как известно, у равногранного тетраэдра бимедианы попарно перпендикулярны и являются общими серединными перпендикулярами соответствующих скрещивающихся ребер. Пусть $\mathcal{T}$ – тело в форме равногранного тетраэдра с равными массами m в вершинах. Будем считать, что оно совершает вращение вокруг неподвижной точки O, совпадающей с точкой пересечения бимедиан. Зададим жестко связанную с тетраэдром правую систему отсчета $Ox_1x_2x_3$ с началом в точке O и осями, направленными вдоль бимедиан. Если длины бимедиан равны $2a_1$, $2a_2$, $2a_3$ соответственно, то вершины A, B, C и D тетраэдра $\mathcal{T}$ в этой системе отсчета задаются радиус-векторами

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{OA} = r(a_1,-a_2,-a_3)^{\mathrm{T}} = r\mathbf{e}_A, \quad \mathbf{r}_B = \mathbf{OB} = r(-a_1,-a_2,a_3)^{\mathrm{T}} = r\mathbf{e}_B$$
$$\mathbf{r}_C = \mathbf{OC} = r(-a_1,a_2,-a_3)^{\mathrm{T}} = r\mathbf{e}_C, \quad \mathbf{r}_D = \mathbf{OD} = r(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}} = r\mathbf{e}_D$$

причем длины этих векторов равны

$$|\mathbf{OA}| = |\mathbf{OB}| = |\mathbf{OC}| = |\mathbf{OD}| = r, \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

Оси $Ox_1x_2x_3$ являются главными центральными осями инерции тела $\mathcal{T}$, в них главные центральные моменты $\mathcal{T}$ записываются как

$$I_k = 4mr^2 I_k', \quad k = 1, 2, 3, \quad I_1' = a_2^2 + a_3^2, \quad I_2' = a_1^2 + a_3^2, \quad I_3' = a_1^2 + a_2^2$$

3. Приближенное представление потенциала поля притяжения. Пусть N – притягивающий центр, в котором сосредоточена масса M, $|\mathbf{NO}| = d$. Пусть единицы размерности выбраны так, что гравитационная постоянная, масса M, а также величина $r_\star = \sqrt{d^2 + r^2}$ равны единице (ср. [24]). Тогда потенциал притяжения имеет вид

$$U_N = -\sum_{(A,B,C,D)} \rho_A^{-1}, \quad \rho_A = \left(1 + \varepsilon(\gamma, \mathbf{e}_A)\right)^{1/2} \tag{3.1}$$

где (A,B,C,D) – циклическая перестановка индексов.

Параметр разложения ε, предложенный в [24], удобно применять и в настоящем исследовании поскольку он позволяет одновременно описывать случаи, когда тетраэдр располагается очень далеко от притягивающего центра N, и когда, наоборот, центр масс тетраэдра очень близок к притягивающему центру N.

4. Равногранный тетраэдр, мало отличающийся от правильного. Пусть равногранный тетраэдр мало отличается от правильного, причем

$$a_1 = \sqrt{\frac{1}{3} - \varepsilon p}, \quad a_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad a_3 = \sqrt{\frac{1}{3} + \varepsilon p} \tag{4.1}$$

Подставляя величины (4.1) в потенциал (3.1) и вновь разлагая его в ряд по параметру ε, имеем

$$V = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \varepsilon^3 V_3 + \varepsilon^4 V_4 + \ldots \tag{4.2}$$

$$V_0 = -4, \quad V_1 = 0, \quad V_2 = -\frac{1}{2}, \quad V_3 = \frac{3}{2}(\gamma_1^2 - \gamma_3^2)p + \frac{5\sqrt{3}}{6}\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

$$V_4 = -\frac{35}{288}(\gamma_1^4 + \gamma_2^4 + \gamma_3^4) - \frac{35}{48}(\gamma_1^2\gamma_2^2 + \gamma_1^2\gamma_3^2 + \gamma_2^2\gamma_3^2)$$

Предполагая, что параметр ε близок к нулю, исследуем равновесия и области возможного движения (ОВД).

4.1. Равновесия. Существование. Ограничиваясь рассмотрением случая приближения третьего порядка, покажем, как число число равновесий системы зависит от значения параметра p. Уравнения равновесий имеют вид

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = \frac{5\sqrt{3}}{6}\gamma_2\gamma_3 + (\lambda + 3p)\gamma_1 = 0$$
$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_2} = \frac{5\sqrt{3}}{6}\gamma_1\gamma_3 + \lambda\gamma_2 = 0$$
$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}\gamma_1\gamma_2 + (\lambda - 3p)\gamma_3 = 0$$

$$W = V_3 + \frac{\lambda}{2}((\gamma,\gamma) - 1) = \frac{3}{2}(\gamma_1^2 - \gamma_3^2)p + \frac{5\sqrt{3}}{6}\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \frac{\lambda}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1)$$

Эту систему следует рассматривать в совокупности с геометрическим интегралом (1.2). Неопределённый множитель Лагранжа λ, удовлетворяющий системе, имеет вид

$$\lambda = 3(\gamma_3^2 - \gamma_1^2)p - \frac{5\sqrt{3}}{2}\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

Обозначим $p_\star = \dfrac{5\sqrt{6}}{36}$. Тогда помимо равновесий $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ и $\mathcal{J}_3$ вида

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_1: \quad \gamma_1 = \pm 1,\ \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 0, \quad \lambda = -3p\\
&\mathcal{J}_2: \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \pm 1,\ \gamma_3 = 0, \quad \lambda = 0\\
&\mathcal{J}_3: \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \pm 1,\ \lambda = 3p
\end{aligned}$$

существующих при всех значениях параметра p, систем обладает равновесиями

$$\mathcal{J}_4: \quad \gamma_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{6p}{25}\sqrt{108p^2 + 25} + \frac{36}{25}p^2,$$
$$\gamma_2^2 = \frac{1}{3} - \frac{72}{25}p^2, \gamma_3^2 = \frac{1}{3} - \frac{6p}{25}\sqrt{108p^2 + 25} + \frac{36}{25}p^2$$

такими, что

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 > 0, \quad \lambda = -\frac{\sqrt{108p^2 + 25}}{6}, \quad p \in [-p_\star, p_\star]$$

а также равновесиями

$$\mathcal{J}_5: \quad \gamma_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{6p}{25}\sqrt{108p^2 + 25} + \frac{36}{25}p^2$$
$$\gamma_2^2 = \frac{1}{3} - \frac{72}{25}p^2, \quad \gamma_3^2 = \frac{1}{3} + \frac{6p}{25}\sqrt{108p^2 + 25} + \frac{36}{25}p^2$$

такими, что

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 < 0, \quad \lambda = \frac{\sqrt{108p^2 + 25}}{6}, \quad p \in [-p_\star, p_\star]$$

В случае $p \ll 1$, решения $\mathcal{J}_4$ порождаются равновесиями, на которых тетраэдр ориентирован на точку N центром одной из своих граней. Так, например, для решения

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{5}p + \frac{9\sqrt{3}}{50}p^2 + \cdots, \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{36\sqrt{3}}{25}p^2 + \cdots$$
$$\gamma_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{5}p + \frac{9\sqrt{3}}{50}p^2 + \cdots$$

порождающим является решение, на котором правильный тетраэдр "смотрит" на притягивающий центр гранью ABC.

Решения $\mathcal{J}_5$ порождаются равновесиями, на которых тетраэдр ориентирован на точку N одной из своих вершин. Так, например, для решения

$$\gamma_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{5}p - \frac{9\sqrt{3}}{50}p^2 + \cdots, \quad \gamma_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{36\sqrt{3}}{25}p^2 + \cdots$$
$$\gamma_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{5}p - \frac{9\sqrt{3}}{50}p^2 + \cdots$$

порождающим является решение, на котором правильный тетраэдр "смотрит" на притягивающий центр вершиной D.

4.2. Равновесия. Устойчивость и ветвление. При $p \in (-\infty; -p_\star)$ на решении $\mathcal{J}_1$ функция V_3 достигает локальных минимумов, и равновесия устойчивы, степень неустойчивости $\chi = 0$. При $p \in (-p_\star; p_\star)$ решению $\mathcal{J}_1$ отвечают седловые точки V_3, и равновесия неустойчивы, со степенью неустойчивости $\chi = 1$. Наконец, при $p \in (p_\star; +\infty)$ на решении $\mathcal{J}_1$ функция V_3 достигает локальных максимумов, равновесия неустойчивы, степень неустойчивости $\chi = 2$. При $p = \pm p_\star$ требуется дополнительное исследование устойчивости.

Для $\mathcal{J}_3$ имеет место, в определенном смысле, обратная ситуация. При $p \in (-\infty; -p_\star)$ на решении $\mathcal{J}_3$ функция V_3 достигает локальных максимумов, равновесия неустойчивы, степень неустойчивости $\chi = 2$. При $p \in (-p_\star; p_\star)$ решению $\mathcal{J}_3$ отвечают седловые точки V_3, и равновесия неустойчивы, со степенью неустойчивости $\chi = 1$. Наконец, при $p \in (p_\star; +\infty)$ на решении $\mathcal{J}_3$ функция V_3 достигает локальных минимумов, равновесия устойчивы, степень неустойчивости $\chi = 0$. При $p = \pm p_\star$ опять же требуется дополнительное исследование устойчивости.

Равновесия $\mathcal{J}_2$ неустойчивы и отвечают седловым точкам функции V_3.

Замечание. Имеет место следующая связь между свойствами устойчивости решений $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ в зависимости от параметра p и значениями главных моментов инерции тетраэдра. Решение $\mathcal{J}_k$, $k \in 1, 3$, устойчиво со степенью неустойчивости $\chi = 0$, если главный момент инерции тетраэдра относительно оси $O\gamma_k$ – наименьший. При этом, решение $\mathcal{J}_\ell$, $\ell \in 1, 3$, неустойчиво со степенью неустойчивости $\chi = 2$, если главный момент инерции тетраэдра относительно оси $O\gamma_\ell$ – наибольший. Наконец, если главный момент инерции тетраэдра относительно оси $O\gamma_m$ – средний, то решение $\mathcal{J}_m$ неустойчиво со степенью неустойчивости $\chi = 1$. В рамках (4.1) индекс $m = 2$.

Решения $\mathcal{J}_4$ неустойчивы со степенью неустойчивости $\chi = 2$. При этом, решения $\mathcal{J}_5$ устойчивы со степенью неустойчивости $\chi = 0$.

При $p = -p_\star$, решения $\mathcal{J}_4$ рождаются из решения $\mathcal{J}_3$, и при $p = p_\star$ сливаются с решением $\mathcal{J}_1$. Наоборот, при $p = -p_\star$, решения $\mathcal{J}_5$ рождаются из решения $\mathcal{J}_1$, и при $p = p_\star$ сливаются с решением $\mathcal{J}_3$, см. рис. 1, где изображены кривые на сфере Пуассона $\mathcal{S}$, определяемой геометрическим интегралом (1.2). Стрелками указаны изменения решений с ростом значения параметра p.

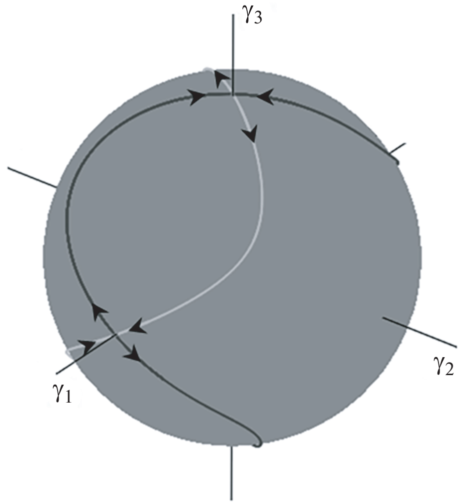

Рис. 1. Множества равновесий $\mathscr{J}_4$ (светлая кривая) и $\mathscr{J}_5$ (темная кривая) на сфере Пуассона при изменении параметра p от $-p_\star$ до $p_\star$ (указано стрелками).

4.3. Области возможного движения. Для правильного тетраэдра главные центральные моменты инерции равны, слагаемое в приведенном потенциале, обусловленное центробежными силами, постоянно и не сказывается на структуре областей возможного движения. Однако, если тетраэдр отличен от правильного, это, вообще говоря, не так, и области возможного движения существенно зависят от значений постоянной интеграла площадей p_ψ. Ограничимся здесь построением ОВД лишь для нулевого уровня интеграла площадей: $p_\psi = 0$.

Для различных значений энергии h ОВД определяются соотношением

$$V_3 - h \le 0 \tag{4.3}$$

Функция V_3 непрерывна на компакте $\mathscr{S}$, и при любом значении p достигает на нем своих минимального и максимального значений, обозначаемых $h_\star(p)$ и $h^\star(p)$. ОВД, определяемые неравенством (4.3) для различных значений постоянной h, задаваемой уровнем интеграла энергии, в виде проекции полусферы $\gamma_3 > 0$ на плоскость (γ_1, γ_2) изображены на рис. 3. ОВД окрашены серым. На рис. 2 изображена диаграмма на плоскости (p, h). Плоскость разбита на восемь областей a, b, c, d, k, l, m, n. Для параметров p, h внутри каждой области ОВД топологически эквивалентны. ОВД в случае полусферы $\gamma_3 < 0$ получается из полученных путем их отражения относительно оси $\gamma_1 = 0$. ОВД в случае $p < 0$ получается из рассматриваемого путем отражения относительно оси $\gamma_1 = 0$ и инверсии цветов, поэтому наличие рисунков k, l, m, n в определенном смысле избыточно.

Замечание. Рассмотрим подробнее случай $p = 0$. При $h > h^\star(0) = h^\star = 5/18$ ОВД совпадает со всей сферой $\mathscr{S}$. При $h = h^\star$ ОВД представляет собой $\mathscr{S}$ с четырьмя выколотыми точками $P_1^\star$, $P_2^\star$, $P_3^\star$, $P_4^\star$ вида

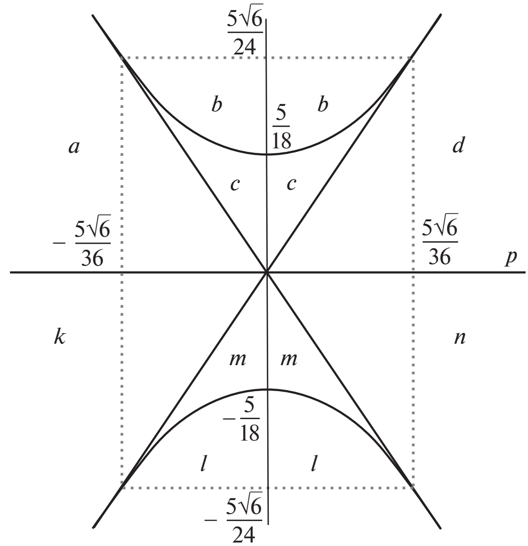

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма на плоскости параметров (p, h).

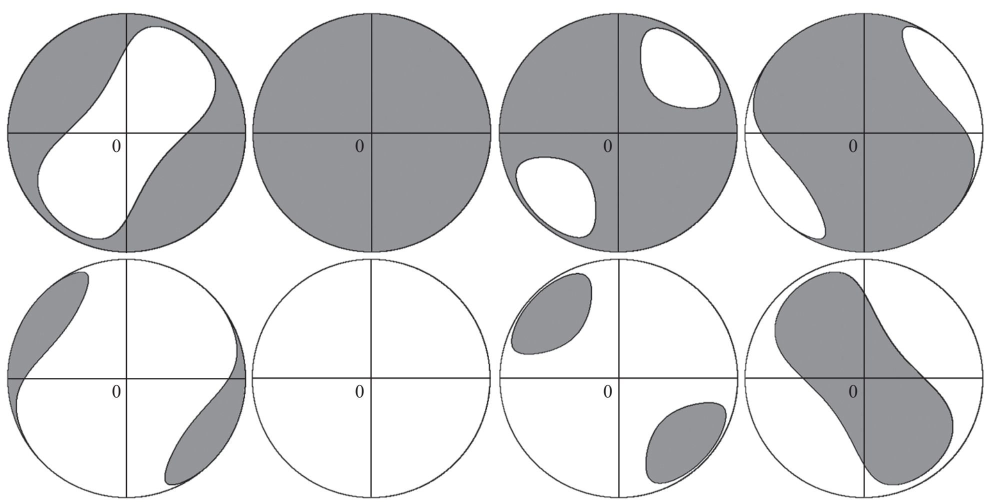

Рис. 3. Проекции областей возможного движения (закрашены серым) на плоскость (γ_1, γ_2) для различных областей $abcdklmn$ из бифуркационной диаграммы, изображенной на рис. 2.

$$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \tag{4.4}$$

с положительным произведением координат. Эти точки отвечают осям γ, при которых тетраэдр ориентирован на притягивающий центр N центрами граней.

При $0 < h < h^\star$ окрестности точек $P_1^\star$, $P_2^\star$, $P_3^\star$ и $P_4^\star$ увеличиваются, при $h = 0$ заполняя части сферы $\mathcal{S}$, расположенные в октантах с положительным произведением координат.

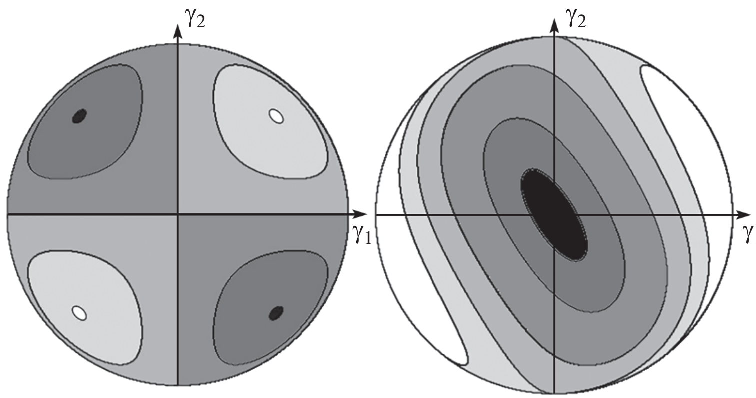

Рис. 4. Проекции областей возможного движения (закрашены серым) на плоскость (γ_1, γ_2) при $p = 0$ (слева) и при $p = 5(1+\sqrt{6})/36$ (справа). ОВД окрашены оттенками серого цвета.

При $-5/18 = h_\star = h_\star(0) < h < 0$ ОВД в определенном смысле "выворачиваются", и далее представляется объединением окрестностей точек $P_{1\star}$, $P_{2\star}$, $P_{3\star}$, $P_{4\star}$ вида (4.4) с отрицательным произведением координат. Эти точки отвечают осям γ, при которых тетраэдр ориентирован на притягивающий центр N вершинами.

При $h = h_\star$ ОВД вырождается в четыре точки, $P_{1\star}$, $P_{2\star}$, $P_{3\star}$, $P_{4\star}$. При $h < h_\star$ движение невозможно. На рис. 4 (слева) для различных значений постоянной $h \in [h_\star(p), h^\star(p)]$ представлены ОВД, окрашенные оттенками серого цвета, изменяющимися от черного, отвечающего значению $h_\star(p)$, до белого, отвечающего значению $h^\star(p)$. При фиксированном значении h движение возможно в тех областях, цвет которых темнее цвета, отвечающего рассматриваемому h. На рис. 4 (справа) представлены ОВД при $p = 5(1+\sqrt{6})/36$.

5. О чувствительности равновесий к степени приближения гравитационного потенциала. К отысканию равновесий можно подходить, опираясь на введение новых переменных (ср. [4, 25]). Так если в качестве таких переменных использовать величины

$$j_1 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2, \quad j_2 = \sqrt{3}(\gamma_1^2 - \gamma_3^2)p + \frac{5}{3}\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \quad j_3 = \gamma_1^2\gamma_2^2 + \gamma_1^2\gamma_3^2 + \gamma_2^2\gamma_3^2$$

"обязанные" своим происхождением геометрическому интегралу и первым двум нетривиальным слагаемым в разложении потенциала, то сам потенциал (4.2) с точностью до постоянного слагаемого имеет вид

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon^3 j_2 - \frac{35}{72}\varepsilon^4\left(\frac{j_1^2}{4} + j_3\right) + \ldots \tag{5.1}$$

Уравнения равновесий принимают вид

$$\frac{\partial W}{\partial j_1} = \lambda - \frac{35}{72}\varepsilon^4\frac{j_1}{2} + \ldots = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial j_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon^3 + \ldots = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial j_3} = -\frac{35}{72}\varepsilon^4 + \ldots = 0$$

где $W = V + \lambda(j_1 - 1)$. Эти уравнения несовместны при достаточно малых значениях $\varepsilon \neq 0$. Таким образом, равновесия имеют место лишь там, где замена $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \to (j_1, j_2, j_3)$ вырождена, т.е. в тех точках, для которых якобиан

$$\mathcal{J}_p = \frac{\partial(j_1, j_2, j_3)}{\partial(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)} \equiv \frac{20}{3}\mathcal{J}'_p$$

равен нулю, т.е. выполнено условие

$$\mathcal{J}'_p = \frac{18\sqrt{3}}{5} p \cdot \gamma_1\gamma_2\gamma_3\left(\frac{1}{3} - \gamma_2^2\right) - (\gamma_2^2 - \gamma_3^2)(\gamma_1^2 - \gamma_3^2)(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) = 0 \qquad (5.2)$$

Все решения, найденные в пункте 4.1, удовлетворяют равенству (5.2), определяющему однопараметрическую поверхность в пространстве $R^3(\gamma(p))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Суликашвили Р.С.* О стационарных движениях тетраэдра и октаэдра в центральном поле тяготения // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР. 1987. С. 57–66.
2. *Суликашвили Р.С.* Стационарные движения тел, допускающих группу симметрии правильных многогранников в ньютоновском поле сил // ПММ. 1989. Т. 53. № 4. С. 582–586.
3. *Burov A.A., Sulikashvili R.S.* On the motion of a rigid body possessing a finite group of symmetry // Pré-publication du C.E.R.M.A. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. 1993. № 17. 8 p.
4. *Буров А.А., Никонова Е.А.* Вращение равногранного тетраэдра в центральном ньютоновском поле сил: конус Штауде // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2021. № 5. С. 40–46.
5. *Буров А.А., Никонова Е.А.* Установившиеся движения симметричного равногранного тетраэдра в центральном поле сил // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 5. С. 152–164. https://doi.org/10.31857/S0572329921050032
6. *Никонова Е.А.* О стационарных движениях равногранного тетраэдра с неподвижной точкой в центральном поле сил // ПММ. 2022. Т. 86. № 2. С. 153–168. http://doi.org/10.31857/S0032823522020096
7. *Карапетян А.В., Нараленкова И.И.* О бифуркации равновесий механических систем с симметричным потенциалом // ПММ. 1998. Т. 62. № 1. С. 12–21.
8. *Нараленкова И.И.* О ветвлении и устойчивости положений равновесия твердого тела в ньютоновском поле // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН. 1995. С. 53–60.
9. *Абрарова Е.В., Карапетян А.В.* О стационарных движениях твердого тела в центральном гравитационном поле // ПММ. 1994. Т. 58. № 5. С. 68–73.
10. *Абрарова Е.В.* Об устойчивости стационарных движений твердого тела в центральном поле // ПММ. 1995. Т. 59. № 6. С. 947–955.
11. *Буров А.А., Карапетян А.В.* О движении крестообразных тел // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 14–18.
12. *Абрарова Е.В.* Об относительных равновесиях твердого тела в центральном гравитационном поле // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1995. С. 3–28.
13. *Абрарова Е.В., Карапетян А.В.* О ветвлении и устойчивости стационарных движений и относительных равновесий твердого тела в центральном гравитационном поле // ПММ. 1996. Т. 60. № 3. С. 375–387.
14. *Буров А.А., Герман А.Д., Суликашвили Р.С.* Об орбитальном движении тетраэдра-гиростата // ПММ. 2010. Т. 74. № 4. С. 594–609.
15. *Буров А.А., Герман А.Д., Суликашвили Р.С.* Об установившихся движениях гиростатов с равными моментами инерции в центральном поле сил // ПММ. 2011. Т. 75. № 5. С. 738–744.
16. *Burov A.A., Guerman A.D., Sulikashvili R.S.* Dynamics of a Tetrahedral Satellite-Gyrostat // AIP Conference Proceedings. 2010. V. 1281. P. 465–468. https://doi.org/10.1063/1.3498509
17. *Burov A.A., Guerman A.D., Nikonova E.A., Nikonov V.I.* Approximation for attraction field of irregular celestial bodies using four massive points // Acta Astronautica. 2019. V. 157. P. 225–232. https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.11.030

18. *Yang H., Li Sh., Sun J.* A fast Chebyshev polynomial method for calculating asteroid gravitational fields using space partitioning and cosine sampling // Advances in Space Research. 2020. V. 65. № 4. P. 1105–1124.
https://doi.org/10.1016/j.asr.2019.11.001
19. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука. 1988. 304 с.
20. *Routh E.J.* Treatise on the Stability of a Given State of Motion. Cambridge: Cambridge University press, 1877. 108 p.
21. *Routh E.J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London: MacMillan, 1884. 343 p.
22. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 168 с.
23. *Шарыгин И.Ф.* Задачи по геометрии. Стереометрия // "Библиотечка Квант". Вып. 31. М.: Наука, 1984. 160 с.
24. *Vashkoviak M. A.* On the stability of circular "asteroid" orbits in an N-planetary system // Celestial Mechanics. 1976. V. 13. № 3. P. 313–324.
25. *Burov A.A., Nikonov V.I.* Stability and branching of stationary rotations in a planar problem of motion of mutually gravitating triangle and material point // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2016. V. 12. № 2. P. 179–196.
https://doi.org/10.20537/nd1602002