

УДК 534.015.1

О СУЩЕСТВОВАНИИ НОРМАЛЬНЫХ КООРДИНАТ ДЛЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ

© 2022 г. А. Г. Петров^{а,*}

^а Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: petrovipmech@gmail.com

Поступила в редакцию 18.08.2021 г.

После доработки 25.10.2021 г.

Принята к публикации 15.11.2021 г.

Линейная диссипативная механическая система с конечным числом степеней свободы определяется тремя квадратичными формами: кинетической и потенциальной энергией системы, а также диссипативной функцией Рэлея. Известно, что всегда можно ввести нормальные координаты, в которых кинетическая и потенциальная энергии приводятся к сумме квадратов с некоторыми коэффициентами. Третья же квадратичная форма при этом к сумме квадратов, вообще говоря, не приводится. В данном исследовании обсуждаются условия, при которых все три квадратичные формы одним преобразованием приводятся к сумме квадратов. Для таких систем можно ввести нормальные координаты, в которых система расщепляется на независимые системы второго порядка и их анализ существенно упрощается. Приводятся примеры анализа вынужденных колебаний линейных диссипативных систем для двух и трех степеней свободы.

Ключевые слова: квадратичные формы, канонический вид, малые колебания, силы трения

DOI: 10.31857/S0572329922050129

1. Введение. Общая теория малых линейных колебаний систем с конечным числом степеней свободы для консервативных систем дана в 1762–1765 гг. Лагранжем. В этом случае механическая система определяется двумя квадратичными формами: кинетической и потенциальной энергией системы. Вейерштрасс показал в 1858 г., что в силу положительной определенности кинетической энергии можно ввести нормальные координаты, в которых кинетическая энергия приведет к сумме квадратов, а потенциальную энергию к сумме квадратов с некоторыми множителями. В нормальных координатах уравнения расщепляются на независимые осцилляторы, решения которых выражаются через тригонометрические и показательные функции. Прежние исследователи (следуя Лагранжу) ошибочно предполагали, что в случае кратных корней характеристического уравнения нормальные координаты не будут существовать и что в окончательных интегралах уравнений движения время будет входить не только через тригонометрические и показательные функции. Соответствующие библиографические ссылки приведены в монографии [1].

Анализ колебаний механических систем посвящен ряд работ [2–4], в которых демонстрируется существенное упрощение при переходе к нормальным координатам. Одновременное приведение к диагональной форме двух вещественных симметричных матриц A и B всегда выполнимо [5], если одна из них соответствует знакоопределенной квадратичной форме. Поэтому квадратичные формы кинетической и потенци-

альной энергии консервативной системы всегда приводятся к диагональному виду и система дифференциальных уравнений расщепляется на независимые подсистемы второго порядка.

Для двух и более матриц [6, 7] не всегда возможно их одновременное приведение к диагональным. Известно несколько разновидностей условий, при выполнении которых это удастся осуществить [8]. Наиболее общее условие приведения трех матриц A , B и C к диагональному виду получено в [9]. Для систем с n степенями свободы оно состоит из равенства нулю n^2 элементов матрицы

$$AB^{-1}C - CB^{-1}A = 0, \quad \text{Det}[B] \neq 0 \quad (1.1)$$

В данной работе показано, что n^2 уравнений условия (1.1) сводятся к $n(n-1)/2$ независимых уравнений. Если квадратичные формы зависят от двух переменных, то 4 условия сводятся к одному равенству нулю определителя третьего порядка коэффициентов трех квадратичных форм. Вывод условия тоже упрощается и проводится, не опираясь на результат Новикова [9]. Для систем с тремя степенями свободы из условия Новикова получены три уравнения для билинейных по элементам матриц A и B форм.

Даны примеры применения полученного условия для анализа малых колебаний механической системы с двумя и тремя степенями свободы с учетом сил трения.

Другой подход исследования систем с двумя степенями свободы в случае двукратной собственной частоты методом возмущений предложен в [11].

2. Независимые условия приведения трех квадратичных форм к каноническому виду.

Матрица $M = (AB^{-1}C - CB^{-1}A) \det B$ антисимметрична: $M_{ij} = -M_{ji}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$ и имеет только $n(n-1)/2$ независимых коэффициента. Отсюда из критерия Новикова (1.1) вытекают $n(n-1)/2$ независимых условий:

$$M_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = i + 1, \dots, N \quad (2.1)$$

Элементы матрицы M_{ij} являются однородными полиномами переменных a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , линейными по a_{ij} .

3. Условие приведения трех квадратичных форм к каноническому виду. Теорема. Пусть даны три квадратичные формы двух переменных

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2}(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2), \quad f_2 = \frac{1}{2}(b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2) \\ f_3 &= \frac{1}{2}(c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2) \\ b_{11}b_{22} - b_{12}^2 &\neq 0 \end{aligned}$$

Тогда для существования невырожденного преобразования

$$Y = QX, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

приводящего их к виду

$$f_1 = \frac{1}{2}(a'_{11}y_1^2 + a'_{22}y_2^2), \quad f_2 = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2), \quad f_3 = \frac{1}{2}(c'_{11}y_1^2 + c'_{22}y_2^2)$$

Необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из коэффициентов исходных квадратичных форм, обратился в ноль

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

Доказательство. Квадратичные формы от двух переменных образуют векторное пространство размерности 3 из векторов $\mathbf{a}(a_{11}, a_{12}, a_{22})$, $\mathbf{b}(b_{11}, b_{12}, b_{22})$, $\mathbf{c}(c_{11}, c_{12}, c_{22})$. Если квадратичные формы f, f_1, f_2, f_3 одновременно приводятся к каноническому виду, то линейная оболочка этих форм является подпространством размерности 2 или меньше, а следовательно три формы линейно зависимы и определитель, составленный из координат векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ равен нулю $\Delta = 0$. Это и есть условие теоремы 1.

Наоборот, если $\Delta = 0$, то f_1, f_2, f_3 линейно зависимы, и при этом f_1, f_2 линейно независимы, то f_3 линейно выражается через f_1, f_2 , и тогда достаточно привести к каноническому виду две формы f_1, f_2 . Если же f_2 пропорциональна f_1 , то задача сводится к приведению двух форм f_1, f_3 , что и требовалось доказать.

Второе доказательство. Теорема непосредственно вытекает из критерия Новикова (1.1) и тождества для матриц размерности 2×2

$$M = (AB^{-1}C - CB^{-1}A)\det(B) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}$$

4. Малые колебания системы с двумя степенями свободы. Кинетическая T и потенциальная энергии Π , диссипативная функция Рэлея D и работа внешних сил N имеют вид

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{x}_1^2 + 2a_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + a_{22}\dot{x}_2^2), \quad D = \frac{1}{2}(b_{11}\dot{x}_1^2 + 2b_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + b_{22}\dot{x}_2^2)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2), \quad N = (U_1\dot{x}_1 + U_2\dot{x}_2)\sin\omega t$$

Запишем уравнения Лагранжа движения механической системы под действием сил, меняющихся по гармоническому закону

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = \frac{\partial N}{\partial \dot{x}_i}, \quad i = 1, 2$$

Предполагается, что внешние силы меняются по гармоническому закону с амплитудами U_1, U_2 . Если определитель (3.2) коэффициентов квадратичных форм равен нулю $\Delta = 0$, то по доказанной теореме преобразованием (3.1) квадратичные формы приводятся к каноническому виду

$$T = \frac{1}{2}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2), \quad D = \frac{1}{2}(A_1\dot{y}_1^2 + A_2\dot{y}_2^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}(B_1y_1^2 + B_2y_2^2)$$

Система уравнений расщепляется на два независимых уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} + A_i \frac{dy_i}{dt} + B_i y_i = E_i \sin \omega t, \quad i = 1, 2 \quad (4.1)$$

$$E_1 = U_1 q_{11} + U_2 q_{21}, \quad E_2 = U_1 q_{12} + U_2 q_{22}$$

Анализ такой системы значительно упрощается. Решение для установившихся колебаний

$$y_i = P_i \sin \omega t - Q_i \cos \omega t$$

$$P_i = \frac{E_i(B_i - \omega^2)}{(B_i - \omega^2)^2 + A_i^2 \omega^2}, \quad Q_i = \frac{E_i A_i \omega}{(B_i - \omega^2)^2 + A_i^2 \omega^2} \quad (4.2)$$

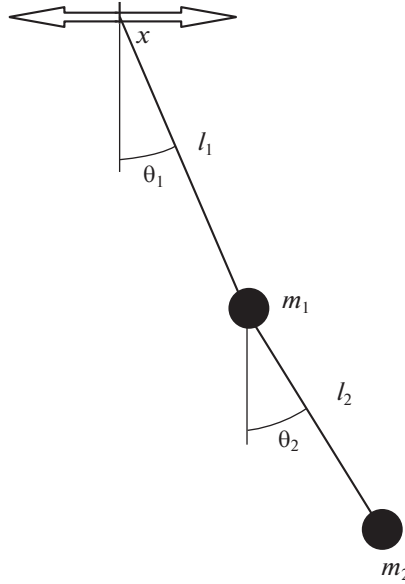


Рис. 1. Двойной маятник.

Имеет амплитуды

$$a_i = \sqrt{P_i^2 + Q_i^2} = \frac{E_i}{\sqrt{(B_i - \omega^2)^2 + A_i^2 \omega^2}}, \quad i = 1, 2 \quad (4.3)$$

Для описания переходного процесса из состояния покоя до установления необходимо решить уравнение (4.1) с начальными условиями $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$. Решение имеет вид

$$y_i(t) = P_i \sin \omega t - Q_i \cos \omega t + J_i(t) \\ J_i(t) = e^{-A_i t/2} \left(\left(\frac{Q_i - 2P_i \omega}{2\omega_i} \right) \sin(\omega_i t) + Q_i \cos(\omega_i t) \right), \quad \omega_i = \sqrt{B_i^2 - A_i^2/4} \quad (4.4)$$

Полезность полученных формул ниже демонстрируется на исследовании малых вынужденных колебаний двойного плоского маятника с учетом сил трения.

5. Двойной плоский маятник. Рассмотрим малые колебания около положения равновесия двойного плоского маятника, у которого точка подвеса движется по горизонтали по гармоническому закону $x = a \sin \omega t$ (рис. 1).

Запишем выражения T , D , Π и N как функции обобщенных координат θ_1 , θ_2 и скоростей $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ [10]

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2, \quad D = \frac{1}{2}r_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}r_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 \\ \Pi = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2}m_2 gl_2 \theta_2^2, \quad N = a\omega^2((m_1 + m_2)l_1 \dot{\theta}_1 + m_2 l_2 \dot{\theta}_2) \sin \omega t$$

где предполагается линейный по относительной угловой скорости закон трения в шарнирах с коэффициентами трения r_1 , r_2 .

Выпишем коэффициенты квадратичных форм функций T , R , Π

$$\begin{aligned} a_{11} &= (m_1 + m_2)l_1^2, & a_{22} &= m_2l_2^2, & a_{12} &= m_2l_1l_2 \\ b_{11} &= r_1 + r_2, & b_{22} &= r_2, & b_{12} &= -r_2 \\ c_{11} &= (m_1 + m_2)gl_1, & c_{22} &= m_2gl_2, & c_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Из равенства нулю определителя (3.2) находим условие $r_2/r_1 = m_2/m_1$ приведения T , R , Π к сумме квадратов, то есть коэффициенты трения должны быть пропорциональны массам. При найденном условии пропорциональности $r_1 = rm_1$, $r_2 = rm_2$ замена переменных

$$\theta_1 = x_1/\sqrt{gl_1(m_1 + m_2)}, \quad \theta_2 = x_2/\sqrt{gl_2m_2} \quad (5.1)$$

приведет квадратичные формы к виду

$$\begin{aligned} a'_{11} &= l_1/g, & a'_{22} &= l_2/g, & a'_{12} &= \sqrt{l_1l_2}\mu, & \mu &= m_2/(m_1 + m_2) \\ b'_{11} &= r/(l_1l_2)a'_{22}, & b'_{22} &= r/(l_1l_2)a'_{11}, & b'_{12} &= -r/(l_1l_2)a'_{12} \\ c'_{11} &= 1, & c'_{22} &= 1, & c'_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Построим ортогональное преобразование, приводящее первую матрицу к диагональному виду. Для этого надо найти собственное число λ_1 и единичный собственный вектор e_1, e_2 из решения системы

$$\begin{pmatrix} a'_{11} - \lambda_1 & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = 0$$

Второе собственное число λ_2 находится из аналогичного уравнения. Второй собственный вектор ортогонален первому. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2g}(l_1 + l_2 - (l_1 - l_2)\sqrt{1 + M}), & \lambda_2 &= \frac{1}{2g}(l_1 + l_2 + (l_1 - l_2)\sqrt{1 + M}) \\ e_{11} &= -\sqrt{\frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{1 + M})}, & e_{12} &= \sqrt{\frac{1}{2}(1 + 1/\sqrt{1 + M})}, & M &= \frac{4l_1l_2\mu}{(l_1 - l_2)^2} \end{aligned}$$

Преобразование

$$x_1 = e_{11}y_1 + e_{12}y_2, \quad x_2 = -e_{12}y_1 + e_{11}y_2 \quad (5.2)$$

приводит первую и вторую матрицы к диагональному виду. Собственные значения матрицы D с точностью до множителя $r/(l_1l_2)$ совпадают с собственными значениями матрицы T , но меняются местами.

В преобразованных переменных функции T , R , Π и N примут вид

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(\lambda_1\dot{y}_1^2 + \lambda_2\dot{y}_2^2), & D &= \frac{r}{2l_1l_2}(\lambda_2\dot{y}_1^2 + \lambda_1\dot{y}_2^2), & \Pi &= \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) \\ N &= \frac{a\omega^2}{\sqrt{g}}(\sqrt{m_2l_2}(-e_{12}\dot{y}_1 + e_{11}\dot{y}_2) + \sqrt{(m_1 + m_2)l_1}(e_{11}\dot{y}_1 + e_{12}\dot{y}_2)) \sin \omega t \end{aligned}$$

а система уравнений приведет к виду (4.1), в которой

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{r}{l_1l_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, & A_2 &= \frac{r}{l_1l_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, & B_1 &= \frac{1}{\lambda_1}, & B_2 &= \frac{1}{\lambda_2} \\ E_1 &= \frac{a\omega^2}{\lambda_1\sqrt{g}}(-e_{12}\sqrt{l_2m_2} + e_{11}\sqrt{l_1(m_1 + m_2)}), & E_2 &= \frac{a\omega^2}{\lambda_2\sqrt{g}}(e_{11}\sqrt{l_2m_2} + e_{12}\sqrt{l_1(m_1 + m_2)}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Формулы (4.2)–(4.4), (5.1)–(5.3) определяют общее аналитическое решение задачи о вынужденных колебаниях двойного математического маятника при единственном условии пропорциональности диссипативных коэффициентов массам маятника: $r_2/r_1 = m_2/m_1$

В частном случае $l_1 = l_2 = l$ формулы упрощаются

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{l}{g}(1 - \sqrt{\mu}), & \lambda_2 &= \frac{l}{g}(1 + \sqrt{\mu}) \\ A_1 &= \frac{r}{l^2} \frac{1 + \sqrt{\mu}}{1 - \sqrt{\mu}}, & A_2 &= \frac{r}{l^2} \frac{1 - \sqrt{\mu}}{1 + \sqrt{\mu}}, & B_1 &= \frac{g}{l(1 - \sqrt{\mu})}, & B_2 &= \frac{g}{l(1 + \sqrt{\mu})} \\ E_1 &= E_2 = E_0 \omega^2, & E_0 &= a \sqrt{\frac{g}{2l}} (m_1 + m_2), & -e_{11} &= e_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-y_1 + y_2), & x_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2)\end{aligned}\quad (5.4)$$

По формуле (4.3) находим амплитуды переменных y_1, y_2

$$a_{yi} = \frac{E_0 \omega^2}{\sqrt{(B_i - \omega^2)^2 + A_i^2 \omega^2}}, \quad i = 1, 2 \quad (5.5)$$

и их максимальные значения

$$\max(a_{yi}) = \frac{2B_i E_0}{A_i \sqrt{4B_i - A_i^2}}, \quad i = 1, 2 \quad (5.6)$$

которые достигаются при частотах $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_2$ соответственно

$$\omega_1 = \frac{B_1}{\sqrt{B_1 - A_1^2/2}}, \quad \omega_2 = \frac{B_2}{\sqrt{B_2 - A_2^2/2}}. \quad (5.7)$$

Подставляя в (5.6) значения A_i, B_i (5.4), получим

$$\begin{aligned}\max(a_{y1}) &= \frac{a}{\varepsilon} \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2}} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{\mu}}}{1 + \sqrt{\mu}} \left(1 - \varepsilon^2 \frac{(1 + \sqrt{\mu})^2}{4(1 - \sqrt{\mu})}\right)^{-1/2} \\ \max(a_{y2}) &= \frac{a}{\varepsilon} \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{2}} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\mu}}}{1 - \sqrt{\mu}} \left(1 - \varepsilon^2 \frac{(1 - \sqrt{\mu})^2}{4(1 + \sqrt{\mu})}\right)^{-1/2} \\ \varepsilon &= \frac{r}{\sqrt{gl^3}}\end{aligned}$$

Для отношения максимальных амплитуд имеем

$$\frac{\max(a_{y2})}{\max(a_{y1})} = \frac{(1 + \sqrt{\mu})^{3/2} \left(1 - \frac{(1 + \sqrt{\mu})^2 \varepsilon^2}{4(1 - \sqrt{\mu})}\right)^{1/2}}{(1 - \sqrt{\mu})^{3/2} \left(1 - \frac{(1 - \sqrt{\mu})^2 \varepsilon^2}{4(1 + \sqrt{\mu})}\right)^{1/2}}$$

При $\varepsilon^2 < \frac{2(1 - \mu)}{3\mu + 1} < 2$ максимальная амплитуда второй моды превосходит амплитуду

первой моды. При этом выполнено условие $1 - \varepsilon^2 \frac{(1 + \sqrt{\mu})^2}{4(1 - \sqrt{\mu})} > 0$ вещественности решения.

Интерес представляет диапазон параметров $\mu \in (1/2, 1)$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Тогда $\max(a_{y_2})$ превосходит $\max(a_{y_1})$ более чем в 9 раз и амплитудные характеристики для углов θ_1 и θ_2 выражаются только через амплитудную характеристику второй нормальной моды a_{y_2} , а первая мода вносит пренебрежимо малые поправки. С помощью (5.1), (5.4) и (5.5) находим амплитудно-частотные характеристики $a_{\theta_1}(\omega)$ и $a_{\theta_2}(\omega)$ для углов θ_1 и θ_2

$$\begin{aligned} a_{\theta_1}(\omega) &= \frac{a_{y_2}}{\sqrt{2gl(m_1 + m_2)}} = \frac{E_0\omega^2}{\sqrt{2gl(m_1 + m_2)((B_2 - \omega^2)^2 + A_2^2\omega^2)}} = \\ &= \frac{a}{2l} \frac{(\sqrt{\mu} + 1)\Omega^2}{\sqrt{(1 - (1 + \sqrt{\mu})\Omega^2)^2 + (1 - \sqrt{\mu})^2\Omega^2\varepsilon^2}}, \quad \omega^2 = \Omega^2 \frac{g}{l}, \quad a_{\theta_2}(\omega) = \frac{a_{\theta_1}(\omega)}{\mu} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Максимальные значения амплитуд углов и нормальной переменной y_2 достигаются при одной и той же частоте $\omega = \omega_2$, которая находится с помощью (5.7) и (5.4)

$$\omega_2 = \frac{B_2}{\sqrt{B_2 - A_2^2/2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{1}{(1 + \sqrt{\mu} - \varepsilon^2(1 - \sqrt{\mu})^2/2)}$$

и подставляя их в (5.8), получим наибольшие значения углов двойного маятника

$$\begin{aligned} \max(\theta_1) &= a_{\theta_1}(\omega_2) = \frac{a}{2l\varepsilon} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\mu}}}{1 - \sqrt{\mu}} \left(1 - \varepsilon^2 \frac{(1 - \sqrt{\mu})^2}{4(1 + \sqrt{\mu})} \right)^{-1/2} \\ \max(\theta_2) &= \frac{\max(\theta_1)}{\sqrt{\mu}}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Наибольшая амплитуда θ_2 превосходит θ_1 в $1/\sqrt{\mu}$ раз. На параметры задачи следует наложить условие $\max(\theta_2) \ll 1$, чтобы линейная теория колебаний была применима.

6. Условия приведения трех квадратичных форм к каноническому виду при $n = 3$.

Три квадратичные формы приводятся к каноническому виду при выполнении уравнений (2.1). Из них при $n = 3$ получаем систему трех уравнений

$$M_{12} = 0, \quad M_{13} = 0, \quad M_{23} = 0$$

Система линейна по коэффициентам a_{ij} и приводится к следующему матричному виду

$$P \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = 0 \quad (6.1)$$

где матрицы P и Q имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} |b_2, b_3, c_2| & |b_1, b_3, c_1| & 0 \\ |b_2, b_3, c_3| & 0 & |b_2, b_1, c_1| \\ 0 & |b_3, b_1, c_3| & |b_2, b_1, c_2| \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & |b_1, b_2, c_2| & |b_2, b_1, c_1| \\ |b_3, b_1, c_3| & Q_{22} & |b_1, b_3, c_1| \\ |b_2, b_3, c_3| & |b_3, b_2, c_2| & Q_{33} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

$$Q_{11} = (b_{12}b_{13} - b_{23}b_{11})c_{23} + (b_{13}b_{22} - b_{12}b_{23})c_{13} + (b_{11}b_{33} - b_{13}^2)c_{22} + (b_{23}^2 - b_{22}b_{33})c_{11}$$

$$Q_{22} = (b_{12}b_{13} - b_{23}b_{11})c_{23} + (b_{12}b_{33} - b_{23}b_{13})c_{12} + (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)c_{33} + (b_{23}^2 - b_{22}b_{33})c_{11}$$

$$Q_{33} = (b_{12}b_{33} - b_{13}b_{23})c_{12} + (b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22})c_{13} + (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)c_{33} + (b_{13}^2 - b_{11}b_{33})c_{22}$$

Здесь прямыми скобками обозначены определители третьего порядка для матриц, составленных из векторов $\mathbf{b}_i(b_{i1}, b_{i2}, b_{i3})$, $\mathbf{c}_i(c_{i1}, c_{i2}, c_{i3})$.

Например

$$|\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_2| = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{31} & c_{21} \\ b_{22} & b_{32} & c_{22} \\ b_{23} & b_{33} & c_{23} \end{vmatrix}$$

Разрешая систему (6.1) относительно a_{11} , a_{22} , a_{33} , найдем

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \end{pmatrix} = -P^{-1}Q \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Пример 1. Для трех квадратичных форм

$$F_1 = \frac{1}{2}(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3)$$

$$F_2 = \frac{1}{2}(2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3)$$

$$F_3 = \frac{1}{2}(7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 8x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3)$$

найти коэффициенты a_{11} , a_{22} , a_{33} , так чтобы существовала линейная замена переменных, приводящая все три квадратичные формы к каноническому виду. Найти замену переменных и канонический вид квадратичных форм в новых переменных.

Решение. Выпишем матрицы квадратичных форм F_1 , F_2 , F_3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & -1 & 1 \\ -1 & a_{22} & -2 \\ 1 & -2 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 3 \\ -4 & 6 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

С помощью формул (6.1) и (6.2) вычисляем матрицы P и Q

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad -P^{-1}Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

По формуле (6.4) находятся требуемые коэффициенты

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Используя известный алгоритм [5], находим преобразование

$$x_1 = \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3), \quad x_2 = \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 - y_3), \quad x_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3)$$

приводящее квадратичные формы F_2 , F_3 к каноническому виду. Тогда третья квадратичная форма F_1 в этих переменных примет канонический вид тоже.

Все три формы в новых переменных имеют следующий канонический вид

$$F_1 = \frac{1}{2}(2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2), \quad F_2 = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2), \quad F_3 = \frac{1}{2}(2y_1^2 + 3y_2^2 + 4y_3^2)$$

Пример 2. В монографии [1] (стр. 252) рассмотрена задача определения нормальных колебаний твердого тела, имеющего закрепленную точку и колеблющегося под действием произвольной системы консервативных сил около положения равновесия. Кинетическая и потенциальная энергии в [1] приводятся к виду

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}(c_{11}x_1^2 + c_{22}x_2^2 + c_{33}x_3^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{13}x_1x_3 + 2c_{23}x_2x_3)$$

Поставим вопрос: найти коэффициенты диссипативной функции

$$D = \frac{1}{2}(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3)$$

так, чтобы все три формы привелись к каноническому виду.

Решение. Выпишем матрицы квадратичных форм D , T и Π

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

С помощью формул (6.1) и (6.2) вычисляем матрицы P и Q

$$P = \begin{pmatrix} c_{12} & -c_{12} & 0 \\ c_{13} & 0 & -c_{13} \\ 0 & c_{23} & -c_{23} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} c_{22} - c_{11} & c_{23} & -c_{13} \\ c_{23} & c_{33} - c_{11} & -c_{12} \\ c_{13} & -c_{12} & c_{33} - c_{22} \end{pmatrix}$$

По формуле (6.1) находятся три линейных соотношения между диссипативными коэффициентами a_{ij}

$$\begin{aligned} c_{12}(a_{11} - a_{22}) + (c_{22} - c_{11})a_{12} + c_{23}a_{13} - c_{13}a_{23} &= 0 \\ c_{13}(a_{11} - a_{33}) + c_{23}a_{12} + (c_{33} - c_{11})a_{13} - c_{12}a_{23} &= 0 \\ c_{23}(a_{22} - a_{33}) + c_{13}a_{12} - c_{12}a_{13} + (c_{33} - c_{22})a_{23} &= 0 \end{aligned}$$

Если коэффициенты a_{ij} удовлетворяют этой системе, то можно найти нормальные координаты, в которых динамические уравнения вынужденных колебаний расщепляются на три независимые уравнения второго порядка вида (4.1) с решением (4.2)–(4.4).

Заключение. Для вынужденных колебаний механических систем с двумя и тремя степенями свободы с учетом сил трения получены простые условия расщепления системы уравнений 4-го и 6-го порядков на две или три идентичные системы 2-го порядка типа (4.1). Они значительно проще исходной и позволяют получать простые аналитические решения системы в явном аналитическом виде.

Работа выполнена в рамках госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690138-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Whittaker E. T.* A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Cambridge at the university press. Second edition, 1917. = *Уиттекер Э.* Аналитическая динамика. М.: URSS, 2004. 595 с.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
3. *Журавлев В. Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с.
4. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 305 с.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 552 с.
6. *Bellman R.* Introduction to Matrix Analysis. N. Y.: McGraw-Hill, 1970. = *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 352 с.

-
7. *Johnson C.R., Horn R.A.* Matrix Analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. = *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 665 с.
 8. *Kumar Mitra.* Simultaneous diagonalization of rectangular matrices // *Lin. Algebra Appl.* 1982. V. 47. P. 139–150.
 9. *Новиков М.А.* Одновременная диагонализация трех вещественных симметричных матриц // *Изв. вузов. Математика.* 2014. № 12. С. 70–82.
 10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Курс теоретической физики. Том I. Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.
 11. *Журавлев В.Ф., Петров А.Г.* Анализ действия возмущений линейных резонансных систем с двумя степенями свободы // *Изв. РАН. МТТ.* 2021. № 2. С. 42–50.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921020185>