

УДК 531.383

УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОСТИ КОЛЕБАНИЙ РЕЗОНАТОРОВ ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ВОЛНОВЫХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ГИРОСКОПОВ РАЗНЫХ ТИПОВ

© 2022 г. А. А. Маслов^{а,*}, Д. А. Маслов^{а,**}, И. В. Меркурьев^{а,***}

^аНациональный исследовательский университет “МЭИ”, Москва, Россия

*e-mail: MaslovAlA@mpei.ru

**e-mail: MaslovDmA@mpei.ru

***e-mail: MerkurjevIV@mpei.ru

Поступила в редакцию 24.12.2021 г.

После доработки 26.12.2021 г.

Принята к публикации 27.12.2021 г.

Рассматривается учет нелинейности колебаний резонаторов в методиках идентификации параметров волновых твердотельных гироскопов. Определяемыми являются параметры, характеризующие демпфирование, анизотропию демпфирования, разночастотность, а также коэффициенты нелинейности математических моделей динамики резонаторов волновых твердотельных гироскопов. В зависимости от типа резонаторов и датчиков управления предлагаются методики идентификации параметров в режимах свободного выбега и вынужденных колебаний с учетом разных типов нелинейностей: нелинейностей третьей, пятой степени, нелинейности, влияющей на управление. Даны алгоритмы определения оценок параметров и их доверительных интервалов при случайных погрешностях измерений. По результатам обработки данных показано, что учет нелинейности колебаний резонаторов существенно повышает точность определения параметров волновых твердотельных гироскопов. Приведены уравнения, показывающие влияние коэффициентов нелинейности и параметров, характеризующих разночастотность и анизотропию демпфирования, на угловую скорость дрейфа гироскопа.

Ключевые слова: волновой твердотельный гироскоп, идентификация параметров, нелинейные колебания, дрейф гироскопа

DOI: 10.31857/S0572329922050099

1. Введение. В настоящее время волновые твердотельные гироскопы (ВТГ) находят широкое применение в качестве датчиков инерциальной информации навигационных систем, причем масштаб исследований и разработок ВТГ в ближайшее время будет расширяться, способствуя повышению точности гироскопов [1, 2]. Задача идентификации параметров резонатора ВТГ является одной из задач, решение которой направлено на повышение точности ВТГ.

Основы теории ВТГ заложены в работах Д.М. Климова и В.Ф. Журавлева [3–7]. В [4, 7] показано, что погрешность, вызванная нелинейными свойствами колебательной системы, присуща всем ВТГ, а исследование динамики может проводиться в рамках одних и тех же уравнений, аналогичных уравнениям классического маятника Фуко. Вопросы идентификации погрешностей изготовления резонаторов ВТГ рассмотрены в [4, 7–13]. В указанных работах при определении параметров гироскопа использовались линейные уравнения малых колебаний резонатора. В [14–16] отмече-

но, что при экспериментальных исследованиях динамики вибрационных гироскопов были обнаружены явления, характерные для нелинейных систем, например, срыв колебаний в режиме вынужденных колебаний. Пренебрежение нелинейностью возможно лишь при малых амплитудах колебаний, при которых отношение сигнала к шуму недостаточно высокое. Для его повышения следует увеличивать амплитуду колебаний, однако при этом возрастают погрешности, вызванные нелинейностью. В [17–22] предложены методики определения параметров ВТГ с кольцевым и цилиндрическим резонаторами при учете нелинейности. Идентификация может выполняться в режиме свободного выбега, в режиме вынужденных колебаний и в режиме управляемой прецессии [23]. У кварцевых полусферических и цилиндрических резонаторов, обладающих высокой добротностью, ширина резонанса мала для снятия данных при регулировании частотной настройки, а время затухания колебаний велико и достаточно для снятия данных в режиме свободного выбега. Для резонаторов с меньшей добротностью, например, кольцевых резонаторов микромеханических ВТГ, время затухания мало, но есть возможность снимать данные при разных значениях частотной настройки в режиме вынужденных колебаний.

В данной статье уточняются и обобщаются результаты предшествующих работ по учету нелинейности в методиках идентификации параметров ВТГ путем введения коэффициентов нелинейности в определяемые параметры [17–22]. Ставятся задачи обобщить учет нелинейностей третьей и пятой степени на методику идентификации параметров в режиме свободного выбега, определить классы гироскопов и типы нелинейностей для применения методик идентификации параметров, показать влияние определяемых параметров на угловую скорость дрейфа ВТГ.

Найденные при идентификации параметры, включая технологические погрешности изготовления резонатора и коэффициенты нелинейности, могут использоваться для повышения точности определения угловой скорости в методиках компенсации погрешностей [24] или для повышения точности балансировки резонаторов [25, 26].

2. Определение параметров ВТГ в режиме свободного выбега. Рассматривается ВТГ с кварцевым резонатором, представленным упругой осесимметричной оболочкой вращения. Обычно подобные резонаторы изготавливаются в виде полусферы или цилиндра и обладают малыми потерями на внутреннее трение, соответственно, имеют высокую добротность. Поэтому для ВТГ с кварцевым резонатором в виде оболочки вращения рассмотрим идентификацию параметров в режиме свободного выбега.

В [27] выведены уравнения динамики цилиндрического резонатора ВТГ с учетом нелинейных свойств электростатических датчиков управления, которые представляют собой конденсаторы, образованные металлизированной поверхностью резонатора и электродами, расположенными вблизи свободной кромки резонатора,

$$\begin{aligned}
 \ddot{f} + \omega^2 f &= -\gamma \dot{f} + v \dot{g} + \\
 + \eta \left(3(f^2 + g^2)f + \frac{15}{4}(f^2 + g^2)^2 f + (1 + 3f^2)(-u_1 \sin \omega_0 t + u_2 \cos \omega_0 t) \right) - \\
 - \frac{\eta}{2} ((u_1^2 - u_2^2) \cos 2\omega_0 t + 2u_1 u_2 \sin 2\omega_0 t) f \\
 \ddot{g} + \omega^2 g &= -\gamma \dot{g} - v \dot{f} + \\
 + \eta \left(3(f^2 + g^2)g + \frac{15}{4}(f^2 + g^2)^2 g + (1 + 3g^2)(-u_3 \sin \omega_0 t + u_4 \cos \omega_0 t) \right) - \\
 - \frac{\eta}{2} ((u_3^2 - u_4^2) \cos 2\omega_0 t + 2u_3 u_4 \sin 2\omega_0 t) g
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где f, g – обобщенные координаты второй основной формы колебаний резонатора; ω – характерная частота собственных колебаний; γ – коэффициент демпфирования; v – параметр, характеризующий угловую скорость основания гироскопа; η – коэффи-

циент, характеризующий нелинейность, вызванную электростатическими датчиками управления [27]; u_1, u_2, u_3, u_4 – нормализованные управляющие напряжения, ω_0 – частота внешнего гармонического возбуждения колебаний резонатора. Заметим, что слагаемые с кубической нелинейностью свойственны уравнениям динамики резонаторов гироскопов класса обобщенного маятника Фуко [7] и были получены в [7] для классического маятника Фуко, а в [13] в предположении о том, что для материала резонатора справедлив нелинейный закон упругости. Поэтому введем единые коэффициенты ξ и κ при, соответственно, нелинейностях третьей и пятой степени, обусловленных различными факторами. Так как рассматривается режим свободного выбега, положим в (2.1) нулевое управление. Получим уравнения

$$\begin{aligned}\dot{f} + \omega^2 f &= -\gamma\dot{f} + v\dot{g} + \xi(f^2 + g^2)f + \kappa(f^2 + g^2)^2 f \\ \ddot{g} + \omega^2 g &= -\gamma\dot{g} - v\dot{f} + \xi(f^2 + g^2)g + \kappa(f^2 + g^2)^2 g\end{aligned}\quad (2.2)$$

В [4, 7, 8] проведен анализ сил, являющихся следствием разнообразных дефектов резонатора, и вызываемой этими силами эволюции формы колебаний резонатора. С учетом наиболее общего [4] представления действующих на резонатор возмущений, нелинейные уравнения динамики (2.2) могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{f} + \omega^2 f &= -(\gamma + b_c)\dot{f} - (-v + b_s)\dot{g} - (c_m + h_c)f - (n + h_s)g + \\ &\quad + \xi(f^2 + g^2)f + \kappa(f^2 + g^2)^2 f \\ \ddot{g} + \omega^2 g &= -(\gamma - b_c)\dot{g} - (v + b_s)\dot{f} - (c_m - h_c)g - (-n + h_s)f + \\ &\quad + \xi(f^2 + g^2)g + \kappa(f^2 + g^2)^2 g\end{aligned}\quad (2.3)$$

где c_m и n – параметры позиционных сил; $h_s = h_m \sin 4\alpha$, $h_c = h_m \cos 4\alpha$ и $b_s = b_m \sin 4\beta$, $b_c = b_m \cos 4\beta$ – параметры, характеризующие разночастотность и анизотропию демпфирования соответственно, h_m, b_m – модули разночастотности и анизотропии демпфирования, α и β – углы ориентации главных осей жесткости и диссипации относительно отсчетных осей.

Используя метод осреднения Крылова–Боголюбова [28] и переменные Ван-дер-Поля, с помощью замены

$$\begin{aligned}f &= p_1 \sin \omega t + q_1 \cos \omega t, & \dot{f} &= \omega(p_1 \cos \omega t - q_1 \sin \omega t) \\ g &= p_2 \sin \omega t + q_2 \cos \omega t, & \dot{g} &= \omega(p_2 \cos \omega t - q_2 \sin \omega t)\end{aligned}\quad (2.4)$$

можно получить из (2.3), осредненную систему дифференциальных уравнений в медленных переменных:

$$\begin{aligned}2\dot{q}_1 &= -\gamma q_1 - b_c q_1 + v q_2 - b_s q_2 + \tilde{c}_m p_1 + \tilde{h}_c p_1 + \tilde{n} p_2 + \tilde{h}_s p_2 + \tilde{\xi} k_1 + \tilde{\kappa} k_5 \\ 2\dot{p}_1 &= -\gamma p_1 - b_c p_1 + v p_2 - b_s p_2 - \tilde{c}_m q_1 - \tilde{h}_c q_1 - \tilde{n} q_2 - \tilde{h}_s q_2 + \tilde{\xi} k_2 + \tilde{\kappa} k_6 \\ 2\dot{q}_2 &= -\gamma q_2 + b_c q_2 - v q_1 - b_s q_1 + \tilde{c}_m p_2 - \tilde{h}_c p_2 - \tilde{n} p_1 + \tilde{h}_s p_1 + \tilde{\xi} k_3 + \tilde{\kappa} k_7 \\ 2\dot{p}_2 &= -\gamma p_2 + b_c p_2 - v p_1 - b_s p_1 - \tilde{c}_m q_2 + \tilde{h}_c q_2 + \tilde{n} q_1 - \tilde{h}_s q_1 + \tilde{\xi} k_4 + \tilde{\kappa} k_8\end{aligned}\quad (2.5)$$

где $\tilde{\xi} = \xi/\omega$, $\tilde{\kappa} = \kappa/\omega$, $\tilde{h}_c = h_c/\omega$, $\tilde{h}_s = h_s/\omega$, $\tilde{c}_m = c_m/\omega$, $\tilde{n} = n/\omega$, осредненные нелинейные выражения $k_1 - k_8$ заданы формулами:

$$k_1 = -p_1 E - q_2 X, \quad k_2 = q_1 E - p_2 X, \quad k_3 = -p_2 E + q_1 X, \quad k_4 = q_2 E + p_1 X$$

$$E = 3(q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2)/4, \quad X = (p_2 q_1 - p_1 q_2)/2$$

$$\begin{aligned}
 k_5 &= -\frac{1}{16}(5p_1^5 + 12p_1^2 p_2 q_1 q_2 + 4p_2 q_1 q_2 (p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + 2p_1^3 (5(p_2^2 + q_1^2) + q_2^2) + \\
 &\quad + p_1 (5p_2^4 + 6p_2^2 q_1^2 + 5q_1^4 + 6(p_2^2 + q_1^2) q_2^2 + q_2^4)) \\
 k_6 &= \frac{1}{16}(5p_1^4 q_1 + 4p_1^3 p_2 q_2 + 4p_1 p_2 q_2 (p_2^2 + 3q_1^2 + q_2^2) + \\
 &\quad + 2p_1^2 q_1 (3p_2^2 + 5q_1^2 + 3q_2^2) + q_1) (p_2^4 + 5(q_1^2 + q_2^2)^2 + 2p_2^2 (q_1^2 + 3q_2^2)) \\
 k_7 &= -\frac{1}{16}(p_2 (5(p_1^2 + p_2^2)^2 + 2(3p_1^2 + p_2^2) q_1^2 + q_1^4) + 4p_1 q_1 (p_1^2 + 3p_2^2 + q_1^2) q_2 + \\
 &\quad + 2p_2 (3p_1^2 + 5p_2^2 + 3q_1^2) q_2^2 + 4p_1 q_1 q_2^3 + 5p_2 q_2^4) \\
 k_8 &= \frac{1}{16}(4p_1^3 p_2 q_1 + p_1^4 q_2 + 2p_1^2 q_2 (3(p_2^2 + q_1^2) + q_2^2) + 4p_1 p_2 q_1 (p_2^2 + q_1^2 + 3q_2^2) + \\
 &\quad + q_2 (5p_2^4 + 5(q_1^2 + q_2^2)^2 + 2p_2^2 (3q_1^2 + 5q_2^2)))
 \end{aligned}$$

Заметим, что в электронном контуре гироскопа физически реализуется схема осреднения [13]: с помощью емкостной системы электродов измеряются высокочастотные функции времени $f(t)$, $g(t)$ и с помощью контуров обработки сигналов выделяются огибающие $q_1(t)$, $p_1(t)$, $q_2(t)$, $p_2(t)$. Таким образом, медленные переменные $q_1(t)$, $p_1(t)$, $q_2(t)$, $p_2(t)$ системы (2.5) являются измеряемыми.

Запишем систему (2.5) в векторно-матричном виде:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{z} \quad (2.6)$$

где вектор медленных переменных

$$\mathbf{q}(t) = (q_1(t), p_1(t), q_2(t), p_2(t))^T$$

матрицу \mathbf{D} и вектор определяемых параметров \mathbf{z} задаем в блочной форме:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= (\mathbf{D}_\gamma | \mathbf{D}_\xi | \mathbf{D}_\kappa) \\
 \mathbf{D}_\gamma &= \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 & -q_1 & -q_2 & p_1 & p_2 & p_1 & p_2 \\ -p_1 & p_2 & -p_1 & -p_2 & -q_1 & -q_2 & -q_1 & -q_2 \\ -q_2 & -q_1 & q_2 & -q_1 & p_2 & -p_1 & -p_2 & p_1 \\ -p_2 & -p_1 & p_2 & -p_1 & -q_2 & q_1 & q_2 & -q_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_\xi = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_\kappa = \begin{pmatrix} k_5 \\ k_6 \\ k_7 \\ k_8 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{z} &= (\mathbf{z}_\gamma^T \ \xi \ \tilde{\kappa})^T, \quad \mathbf{z}_\gamma = (\gamma, \nu, b_c, b_s, \tilde{c}_m, \tilde{n}, \tilde{h}_c, \tilde{h}_s)^T
 \end{aligned}$$

С помощью данной записи, в зависимости от количества блоков, мы можем записать как линейную математическую модель, так и обе нелинейные математические модели: с кубической нелинейностью (коэффициент нелинейности ξ , $k = 9$ параметров) и с нелинейностью пятой степени (два коэффициента нелинейности ξ и $\tilde{\kappa}$, $k = 10$ параметров).

Начальным моментом съема данных является момент отключения управляющего напряжения в режиме стационарных колебаний. Для обработки данных, берется массив значений затухающих медленных переменных так, чтобы в конце процесса была достаточная амплитуда колебаний для отличия их от случайных помех. Лучше брать начальный участок процесса затухания колебаний, на котором наибольшим образом изменяются медленные переменные. Обозначим отрезок времени наблюдений $[0, T]$ и разобьем его на N равных частей: $t_i = i \cdot h_t$, $h_t = T/N$ – шаг по времени, $i = 0 \dots N$. Определяемые параметры считаем постоянными на $[0, T]$.

Интегрируем левую и правую часть (2.6) на отрезках $[t_{i-1}, t_{i+1}]$:

$$\mathbf{q}(t_{i+1}) - \mathbf{q}(t_{i-1}) = \frac{1}{2} \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{z}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (2.7)$$

где интегралы, обозначенные как

$$\mathbf{D}_i = \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \mathbf{D}(\mathbf{q}(t)) dt, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

вычисляются от элементов матриц численно, например по формуле Симпсона. Таким образом, систему (2.6), дискретизированную на отрезке $[0, T]$ и представленную системами (2.7), записываем в виде переопределенной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{e} \quad (2.8)$$

где введены составные матрица $\bar{\mathbf{D}}$ и вектор \mathbf{y} :

$$\bar{\mathbf{D}} = (\mathbf{D}_1^T, \mathbf{D}_2^T, \dots, \mathbf{D}_{N-1}^T)^T, \quad \mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_{N-1}^T)^T \\ \mathbf{y}_i = \mathbf{q}(t_{i+1}) - \mathbf{q}(t_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

$\mathbf{e} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_e^2 \mathbf{E})$ – вектор некоррелированных случайных ошибок измерений, подчиняющихся нормальному закону распределения с нулевым средним и одинаковыми дисперсиями.

Рассмотрим сначала оценку вектора параметров \mathbf{z} по методу наименьших квадратов. Тогда для линейной регрессии (2.8) получим оценку:

$$\hat{\mathbf{z}} = (\bar{\mathbf{D}}^T \bar{\mathbf{D}})^{-1} \bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{y} \quad (2.9)$$

при условии, что матрица $\bar{\mathbf{D}}^T \bar{\mathbf{D}}$ не является вырожденной.

Оценка (2.9) минимизирует сумму квадратов отклонений $S = (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{z}})^T (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{z}})$. Оценка среднеквадратического отклонения:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{S}{n - k}} \quad (2.10)$$

где $n = 4(N - 2)$ – размерность вектора измерений \mathbf{y} , k – число определяемых параметров.

Доверительные интервалы для определяемых параметров оцениваем по формуле [29]:

$$\hat{z}_j - s_p \hat{\sigma} \sqrt{c_{jj}} \leq z_j \leq \hat{z}_j + s_p \hat{\sigma} \sqrt{c_{jj}}, \quad j = 1 \dots k \quad (2.11)$$

где c_{jj} – диагональные элементы матрицы $\mathbf{C} = (\bar{\mathbf{D}}^T \bar{\mathbf{D}})^{-1}$, s_p – квантиль порядка $p = (1 + P_0)/2$ распределения Стьюдента с $n - k$ степенями свободы, P_0 – доверительная вероятность. Если число $n - k$ мало, то s_p выбирают по таблице распределения Стьюдента, если $n - k > 30$, то s_p можно выбирать из таблицы функций Лапласа.

Получаемые в результате измерений данные поступают последовательно, поэтому целесообразно рассмотреть для данной методики применение рекуррентного метода наименьших квадратов.

Пусть на некотором начальном этапе измерений выбран отрезок времени $[0, t_m]$, где m много меньше N . Для инициализации рекуррентного метода наименьших квадратов определяем оценку параметров по методу наименьших квадратов (2.10):

$$\hat{\mathbf{z}}_{(m)} = \mathbf{P}_{(m)} \mathbf{D}_{(m)}^T \mathbf{y}$$

где введены $\mathbf{P}_{(m)} = (\mathbf{D}_{(m)}^T \mathbf{D}_{(m)})^{-1}$ – матрица размера $k \cdot k$, $\mathbf{D}_{(m)} = (\mathbf{D}_1^T, \mathbf{D}_2^T, \dots, \mathbf{D}_m^T)^T$ – матрица размера $4m \cdot k$, $\mathbf{y}_{(m)} = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_m^T)^T$ – вектор размерности $4m$, $\hat{\mathbf{z}}_{(m)}$ – вектор размерности k . После инициализации первого приближения к решению и ковариационной матрице, определяем последующие приближения итерационным алгоритмом:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{i+1} &= \mathbf{P}_i \mathbf{r}_i (\mathbf{E} - (\mathbf{E} + \mathbf{r}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{r}_i)^{-1} \mathbf{r}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{r}_i) \\ \hat{\mathbf{z}}_{i+1} &= \hat{\mathbf{z}}_i + \mathbf{S}_{i+1} \cdot (\mathbf{y}_{i+1} - \hat{\mathbf{y}}_{i+1}) \\ \mathbf{P}_{i+1} &= \mathbf{P}_i - \mathbf{S}_{i+1} \mathbf{r}_i^T \mathbf{P}_i \\ i &= m, m+1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица размера 4×4 , $\mathbf{r}_i = \mathbf{D}_i^T$ – матрица размера $k \cdot 4$, \mathbf{P}_i – матрица размера $k \cdot k$, \mathbf{S}_{i+1} – матрица размера $k \cdot 4$, $\hat{\mathbf{y}}_{i+1} = \mathbf{D}_i \hat{\mathbf{z}}_i$ – вектор размерности 4. Данный алгоритм, в котором на каждой итерации \mathbf{r}_i является матрицей, а не вектором, обусловлен использованием на каждом шаге измерений четырех медленных переменных.

Поэтому в данном случае результат произведения $\mathbf{r}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{r}_i$ является матрицей, а не скаляром и оценку среднеквадратичного отклонения вычисляем по следующей формуле:

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_e^2 \cdot \left(1 + \max_{1 \leq j \leq k} \sqrt{\lambda_j(\tilde{\mathbf{P}}^T \tilde{\mathbf{P}})}\right)$$

где σ_e – среднеквадратическое отклонение случайных погрешностей измерений медленных переменных, $\lambda_j(\tilde{\mathbf{P}}^T \tilde{\mathbf{P}})$ – собственные значения произведения матриц $\tilde{\mathbf{P}}^T$ и $\tilde{\mathbf{P}}$, $j = 1 \dots k$, обозначаем $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{r}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{r}_i$. Для расчета доверительных интервалов параметров могут использоваться формулы (2.11), с матрицей $\mathbf{C} = \mathbf{P}$.

3. Определение параметров ВТГ в режиме вынужденных колебаний. Значения добротности у кольцевых резонаторов микромеханических ВТГ значительно ниже, чем у рассмотренных ранее полусферических и цилиндрических резонаторов прецизионных ВТГ. Поэтому продолжительность свободного выбега микромеханического ВТГ недостаточна для проведения идентификации параметров, и нужно рассматривать данные, полученные в режиме вынужденных колебаний при разных значениях частотной настройки вблизи резонанса. Волновые твердотельные гироскопы в микромеханическом исполнении обычно имеют кольцевой резонатор с магнитоэлектрическими датчиками управления, реже – с электростатическими датчиками управления [13]. Предлагаемая методика может использоваться для определения параметров ВТГ и с другими типами резонаторов в случае, если есть возможность провести достаточное количество измерений медленных переменных на резонансном пике при изменении частотной настройки.

При использовании в ВТГ электростатических датчиков управления, уравнения вынужденных колебаний имеют вид аналогичный (2.1), запишем их с коэффициентами, учитывающими разные типы нелинейностей:

$$\begin{aligned} \ddot{f} + \omega^2 f &= -\gamma \dot{f} + \nu \dot{g} + \xi(f^2 + g^2)f + \\ &+ \kappa(f^2 + g^2)^2 f + \eta(1 + 3\mu f^2)(-u_1 \sin \omega_0 t + u_2 \cos \omega_0 t) \\ \ddot{g} + \omega^2 g &= -\gamma \dot{g} - \nu \dot{f} + \xi(f^2 + g^2)g + \\ &+ \kappa(f^2 + g^2)^2 g + \eta(1 + 3\mu g^2)(-u_3 \sin \omega_0 t + u_4 \cos \omega_0 t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

При использовании магнитоэлектрических датчиков управления введенный параметр $\mu = 0$, коэффициенты ξ , κ , η определяются не нелинейностью, вызванной электроста-

тическими датчиками управления, а другими факторами [13]. Поэтому предложим методику идентификации с возможностью учитывать разные типы нелинейностей.

Аналогично (2.3) вводя в (3.1) возмущения, вызванные дефектами резонатора, и осредняя полученные уравнения, выведем уравнения в медленных переменных:

$$\begin{aligned}
2\dot{q}_1 &= -\gamma q_1 - b_c q_1 + \nu q_2 - b_s q_2 + \tilde{c}_m p_1 + \tilde{h}_c p_1 + \tilde{n} p_2 + \tilde{h}_s p_2 - \\
&\quad - 2\lambda p_1 + \xi k_1 + \tilde{\kappa} k_5 + \tilde{u}_1(1 + \mu k_{11}) + \mu \tilde{u}_2 k_9 \\
2\dot{p}_1 &= -\gamma p_1 - b_c p_1 + \nu p_2 - b_s p_2 - \tilde{c}_m q_1 - \tilde{h}_c q_1 - \tilde{n} q_2 - \tilde{h}_s q_2 + \\
&\quad + 2\lambda q_1 + \xi k_2 + \tilde{\kappa} k_6 + \tilde{u}_2(1 + \mu k_{12}) + \mu \tilde{u}_1 k_9 \\
2\dot{q}_2 &= -\gamma q_2 + b_c q_2 - \nu q_1 - b_s q_1 + \tilde{c}_m p_2 - \tilde{h}_c p_2 - \tilde{n} p_1 + \tilde{h}_s p_1 - \\
&\quad - 2\lambda p_2 + \xi k_3 + \tilde{\kappa} k_7 + \tilde{u}_3(1 + \mu k_{13}) + \mu \tilde{u}_4 k_{10} \\
2\dot{p}_2 &= -\gamma p_2 + b_c p_2 - \nu p_1 - b_s p_1 - \tilde{c}_m q_2 + \tilde{h}_c q_2 + \tilde{n} q_1 - \tilde{h}_s q_1 + \\
&\quad + 2\lambda q_2 + \xi k_4 + \tilde{\kappa} k_8 + \tilde{u}_4(1 + \mu k_{14}) + \mu \tilde{u}_3 k_{10}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\lambda = \omega_0 - \omega$ – частотная настройка, $\tilde{u}_i = \eta u_i / \omega$, $i = 1, 2, 3, 4$; $k_9 = -3q_1 p_1 / 2$, $k_{10} = -3q_2 p_2 / 2$

$$\begin{aligned}
k_{11} &= 3(3p_1^2 + q_1^2)/4, & k_{12} &= 3(p_1^2 + 3q_1^2)/4 \\
k_{13} &= 3(3p_2^2 + q_2^2)/4, & k_{14} &= 3(p_2^2 + 3q_2^2)/4
\end{aligned}$$

Остальные обозначения в (3.2) аналогичны введенным после уравнений (2.5) и (2.6). Запишем (3.2) в векторно-матричном виде:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{y}) \tag{3.3}$$

$$\mathbf{q}(t) = (q_1(t), p_1(t), q_2(t), p_2(t))^T$$

$$\mathbf{z} = (\mathbf{z}_\gamma^T \ \mathbf{z}_u^T \ \xi^T \ \tilde{\kappa}^T)^T, \quad \mathbf{z}_\gamma = (\gamma, \nu, b_c, b_s, \tilde{c}_m, \tilde{n}, \tilde{h}_c, \tilde{h}_s)^T, \quad \mathbf{z}_u = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4)^T$$

$\mathbf{D} = (\mathbf{D}_\gamma \mid \mathbf{D}_u \mid \mathbf{D}_\xi \mid \mathbf{D}_\kappa)$, $\mathbf{D}_u = \mathbf{E} + \alpha \cdot \mathbf{D}_n$, $\mathbf{E} = \text{diag}\{1, 1, 1, 1\}$ – единичная матрица

$$\mathbf{D}_\gamma = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 & -q_1 & -q_2 & p_1 & p_2 & p_1 & p_2 \\ -p_1 & p_2 & -p_1 & -p_2 & -q_1 & -q_2 & -q_1 & -q_2 \\ -q_2 & -q_1 & q_2 & -q_1 & p_2 & -p_1 & -p_2 & p_1 \\ -p_2 & -p_1 & p_2 & -p_1 & -q_2 & q_1 & q_2 & -q_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_n = \begin{pmatrix} k_{11} & k_9 & 0 & 0 \\ k_9 & k_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{13} & k_{10} \\ 0 & 0 & k_{10} & k_{14} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_\xi = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_\kappa = \begin{pmatrix} k_5 \\ k_6 \\ k_7 \\ k_8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = 2\lambda \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ -q_1 \\ p_2 \\ -q_2 \end{pmatrix}$$

Для идентификации параметров рассмотрим стационарные режимы вынужденных колебаний резонатора, $\dot{q}_1 = \dot{p}_1 = \dot{q}_2 = \dot{p}_2 = 0$. Стационарные значения медленных переменных $q_1(t)$, $p_1(t)$, $q_2(t)$, $p_2(t)$ являются измеряемыми и соответствуют разным значениям частотной настройки $\lambda = \lambda_j$, где $j = 1, \dots, N$, N – число стационарных режимов колебаний резонатора. Соответствующие λ_j стационарные системы уравнений (3.3) являются алгебраическими и имеют вид

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{D}_j \cdot \mathbf{z} + \mathbf{e}_j, \quad j = 1, \dots, N \tag{3.4}$$

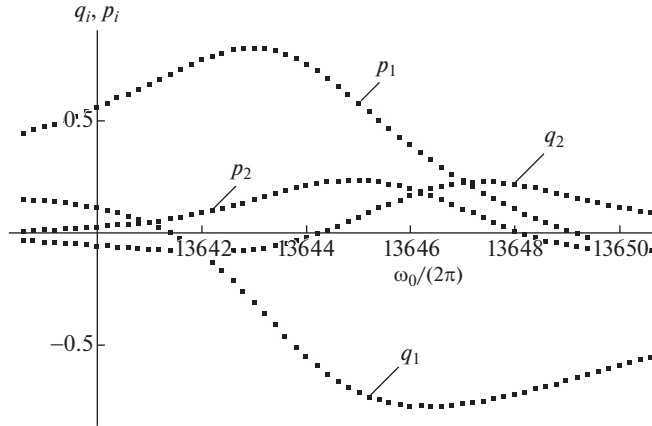


Рис. 1. Зависимости медленных переменных p_1, q_1, p_2, q_2 от частоты колебаний $\frac{\omega_0}{2\pi}$ [Гц].

где $\mathbf{e}_j \sim N(\mathbf{0}, \sigma_e^2 \mathbf{E})$.

Далее составим переопределенную систему линейных алгебраических уравнений из N блоков (3.4), соответствующих заданным частотным настройкам

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{D}}\mathbf{z} + \mathbf{e} \quad (3.5)$$

$\bar{\mathbf{D}} = (\mathbf{D}_1^T, \mathbf{D}_2^T, \dots, \mathbf{D}_N^T)^T, \mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_N^T)^T, \mathbf{e} = (\mathbf{e}_1^T, \mathbf{e}_2^T, \dots, \mathbf{e}_N^T)^T$. Размерность векторов \mathbf{y} и \mathbf{e} равняется числу уравнений переопределенной системы $n = 4N$, размерность вектора \mathbf{z} равняется числу идентифицируемых параметров k . Минимальное число измерений, необходимое для определения возможного числа $k < 15$ параметров, $N = 4$ задает 16 уравнений в системе (3.5). Оценка вектора параметров \mathbf{z} может быть найдена по методу наименьших квадратов (2.9), оценки доверительных интервалов для параметров – по формуле (2.11).

4. Обработка экспериментальных данных. Рассматривались вынужденные колебания кольцевого резонатора микромеханического ВТГ с магнитоэлектрическими датчиками управления. Считаем, что динамика резонатора описывается уравнениями, имеющими вид (3.1) при $\mu = 0$. В результате экспериментального наблюдения вынужденных колебаний резонатора [18, 30] получены стационарные значения медленных переменных $q_i = q_i(\omega_{0j}), p_i = p_i(\omega_{0j}), i = 1, 2$, соответствующие частотам вынужденных колебаний $\omega_0 = \omega_{0j}, j = 1 \dots N, N = 61$ (рис. 1). Для нормализации величин $q_i, p_i, i = 1, 2$, использовалось максимальное значение амплитуды колебаний резонатора. Характерная частота собственных колебаний резонатора $\omega = 85732 \text{ с}^{-1}$ (13645 Гц).

Определяем оценку вектора параметров по математической модели, содержащей только кубическую нелинейность ($\xi \neq 0, \kappa = 0, \mu = 0$). Получен результат:

$$\hat{\mathbf{z}} = (43.029; 2.029; 1.332; -1.389; 24.358; 1.173; -12.797; 11.588; \\ 32.159; 30.597; 1.415; -0.605; 18.217)^T$$

По полученной оценке вектора запишем параметры ВТГ. Коэффициент демпфирования $\gamma = 43.029 \text{ с}^{-1}$, добротность $Q = \omega/\gamma = 1992$. Для кольцевого резонатора масштабный коэффициент $K = 0.4$, поэтому абсолютное значение нулевого сигнала

$\Omega = 1.268 \text{ с}^{-1}$. Погрешность характерной частоты собственных колебаний $\Delta\omega = \tilde{c}_m/2 = 12.179 \text{ с}^{-1}$ (1.94 Гц). Расщепление частот $\omega_{\max} - \omega_{\min} = \sqrt{(\tilde{h}_c)^2 + (\tilde{h}_s)^2} = 17.264 \text{ с}^{-1}$ (2.748 Гц). Анизотропия демпфирования $\gamma_{\max} - \gamma_{\min} = 2\sqrt{b_s^2 + b_c^2} = 3.848 \text{ с}^{-1}$. Углы главных осей жесткости и диссипации равны соответственно $\alpha = 0.601 \text{ рад}$ (34.4°) и $\beta = -0.201 \text{ рад}$ (-11.5°). Полученные результаты для невакуумированного несбалансированного кольцевого резонатора соответствуют известным данным [31].

При идентификации параметров по предложенной методике оценка среднеквадратического отклонения составила $\hat{\sigma} = 0.0926$. В случае идентификации параметров по линейной математической модели [30] получаем $\hat{\sigma} = 0.295$. Таким образом, учет коэффициента нелинейности ξ позволил уменьшить среднеквадратическое отклонение в 3.2 раза, что указывает на значительное повышение точности определения параметров ВТГ при учете нелинейности колебаний. Учет обоих коэффициентов нелинейности ξ и κ позволил уменьшить среднеквадратическое отклонение в 1.4 раза по сравнению с результатами, полученными при учете только кубической нелинейности, $\hat{\sigma} = 0.0656$.

По найденным параметрам математической модели были рассчитаны невязки между модельными значениями и экспериментальными измерениями. На рисунках 2 и 3 представлено сравнение экспериментальных и расчетных амплитудно-фазочастотных характеристик (АФЧХ). Модули радиус-векторов равны амплитудам $A = \sqrt{q_1^2 + p_1^2}$ и $B = \sqrt{q_2^2 + p_2^2}$, а фазы колебаний φ и ψ определяются положением этих векторов на плоскости. В первом случае (рис. 2) оценка параметров ВТГ проводилась по линейной математической модели, $\xi = 0$, $\kappa = 0$. Во втором случае (рис. 3) оценка параметров ВТГ проводилась по нелинейной математической модели с учетом кубической нелинейности $\xi \neq 0$, $\kappa = 0$. Из сравнения (рис. 2) экспериментальных и расчетных данных, полученных по результатам идентификации параметров линейной математической модели ВТГ, следует, что имеется систематическая погрешность. На рис. 3 экспериментальная и расчетная АФЧХ, полученная по результатам идентификации параметров по нелинейной математической модели ВТГ, практически совпадают. Учет нелинейности пятой степени, $\xi \neq 0$, $\kappa \neq 0$, на АФЧХ визуально неотличим от рис. 3. Поэтому существенным является учет кубической нелинейности при идентификации параметров ВТГ, учет нелинейности пятой степени дает дополнительное повышение точности.

5. Зависимость угловой скорости дрейфа ВТГ от параметров резонатора и коэффициентов нелинейности. Исследование угловой скорости дрейфа ВТГ будем проводить при нулевых управляющих напряжениях $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$, то есть, рассмотрим уравнения (2.3). Перейдем к переменным, называемым элементами орбиты [7]: $r(t)$ и $k(t)$ – амплитуды основной и квадратурной волн колебаний, $\theta(t)$ – угол прецессии, $\chi(t)$ – временная фаза,

$$\begin{aligned} f &= r \cos(\omega t + \chi) \cos 2\theta - k \sin(\omega t + \chi) \sin 2\theta \\ g &= r \cos(\omega t + \chi) \sin 2\theta + k \sin(\omega t + \chi) \cos 2\theta \end{aligned} \quad (5.1)$$

Чтобы перейти от переменных $q_1(t)$, $p_1(t)$, $q_2(t)$, $p_2(t)$ в осредненных уравнениях (2.5) к $r(t)$, $k(t)$, $\theta(t)$, $\chi(t)$, будем использовать замену переменных:

$$\begin{aligned} q_1 &= r \cos 2\theta \cos \chi - k \sin 2\theta \sin \chi, & p_1 &= -r \cos 2\theta \sin \chi - k \sin 2\theta \cos \chi \\ q_2 &= r \sin 2\theta \cos \chi + k \cos 2\theta \sin \chi, & p_2 &= -r \sin 2\theta \sin \chi + k \cos 2\theta \cos \chi \end{aligned} \quad (5.2)$$

В результате преобразований получаем систему

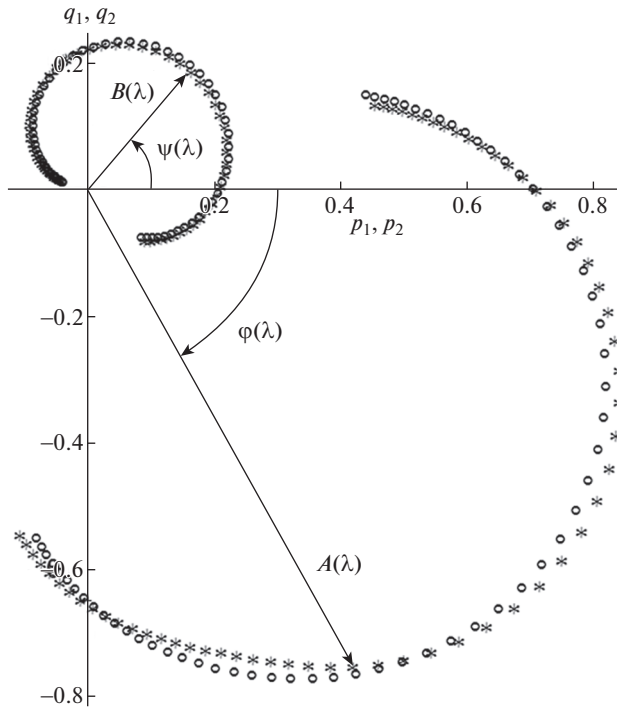


Рис. 2. АФЧХ, о – экспериментальные данные; * – значения, рассчитанные по линейной модели.

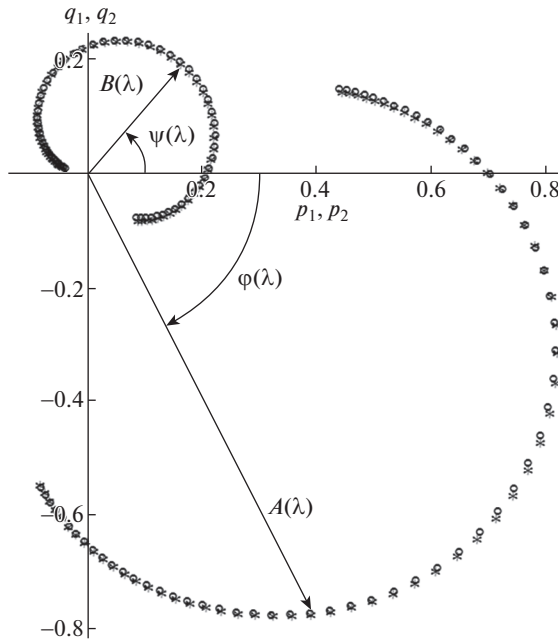


Рис. 3. АФЧХ, о – экспериментальные данные; * – значения, рассчитанные по нелинейной модели.

$$\dot{r} = \frac{1}{2}(-\gamma r + \tilde{n}k + (\tilde{h}_s k - b_c r) \cos 4\theta - (\tilde{h}_c k + b_s r) \sin 4\theta) \quad (5.3)$$

$$\dot{k} = \frac{1}{2}(-\gamma k + \tilde{n}r - (\tilde{h}_s r - b_c k) \cos 4\theta + (\tilde{h}_c r + b_s k) \sin 4\theta) \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & -\frac{1}{4}v + \frac{\xi}{8}rk + \frac{\tilde{\kappa}}{8}rk(r^2 + k^2) - \\ & - \frac{rk}{2(r^2 - k^2)}(\tilde{h}_c \cos 4\theta + \tilde{h}_s \sin 4\theta) - \frac{r^2 + k^2}{4(r^2 - k^2)}(b_s \cos 4\theta - b_c \sin 4\theta) \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi} = & \frac{1}{2}\tilde{c} - \frac{3\xi}{8}(k^2 + r^2) - \frac{\tilde{\kappa}}{16}(5k^4 + 6k^2r^2 + 5r^4) + \\ & + \frac{r^2 + k^2}{2(r^2 - k^2)}(\tilde{h}_c \cos 4\theta + \tilde{h}_s \sin 4\theta) + \frac{rk}{r^2 - k^2}(b_s \cos 4\theta - b_c \sin 4\theta) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Подставляя обозначения $\tilde{h}_s = \tilde{h}_m \sin 4\alpha$, $\tilde{h}_c = \tilde{h}_m \cos 4\alpha$, $b_s = b_m \sin 4\beta$, $b_c = b_m \cos 4\beta$ и используя тригонометрические формулы, преобразуем (5.3)–(5.6) к виду

$$\dot{r} = \frac{1}{2}(-\gamma r + \tilde{n}k - \tilde{h}_m k \sin 4(\theta - \alpha) - b_m r \cos 4(\theta - \alpha)) \quad (5.7)$$

$$\dot{k} = \frac{1}{2}(-\gamma k + \tilde{n}r + \tilde{h}_m r \sin 4(\theta - \alpha) + b_m k \cos 4(\theta - \alpha)) \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & -\frac{1}{4}v + \frac{\xi}{8}rk + \frac{\tilde{\kappa}}{8}rk(r^2 + k^2) - \\ & - \frac{rk}{2(r^2 - k^2)}\tilde{h}_m \cos 4(\theta - \alpha) + \frac{r^2 + k^2}{4(r^2 - k^2)}b_m \sin 4(\theta - \alpha) \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi} = & \frac{1}{2}\tilde{c} - \frac{3\xi}{8}(k^2 + r^2) - \frac{\tilde{\kappa}}{16}(5k^4 + 6k^2r^2 + 5r^4) + \\ & + \frac{r^2 + k^2}{2(r^2 - k^2)}\tilde{h}_m \cos 4(\theta - \alpha) - \frac{rk}{r^2 - k^2}b_m \sin 4(\theta - \alpha) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Уравнения (5.7)–(5.10) соответствуют теории эволюций траектории резонатора ВТГ под воздействием возмущений, вызванных дефектами резонатора [7], но при этом учитывают влияние нелинейности колебаний. Из уравнения (5.9) следует, что угловая скорость дрейфа ВТГ зависит от коэффициентов \tilde{h}_m , b_m , характеризующих разноточность и анизотропию демпфирования, а также от параметров ξ и $\tilde{\kappa}$, характеризующих нелинейность колебаний резонатора.

6. Заключение. Разработаны методики идентификации параметров ВТГ с учетом разных типов нелинейности колебаний в двух режимах: свободного выбега и вынужденных колебаний. В режиме свободного выбега проводится идентификация параметров прецизионных ВТГ с кварцевыми резонаторами, обладающими высокой добротностью. Так как отключено управление, то для них учитывается только кубическая нелинейность и нелинейность пятой степени. В режиме вынужденных колебаний проводится идентификация параметров ВТГ с меньшей добротностью, позволяющей снимать данные в области резонансного пика при изменении частотной настройки. Проведена обработка экспериментальных данных, полученных для микромеханического ВТГ с кольцевым резонатором и магнитоэлектрическими датчиками управления. Показано, что учет кубической нелинейности существенно повышает точность определения параметров, учет нелинейности пятой степени дополнительно повышает

точность определения параметров. Сделан вывод о необходимости учета кубической нелинейности путем введения коэффициента нелинейности в определяемые параметры ВТГ. Показано влияние определяемых параметров, включая коэффициенты нелинейностей, на угловую скорость дрейфа ВТГ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Перельев С.Е.* Обзор и анализ направлений создания бесплатформенных инерциальных навигационных систем на волновых твердотельных гироскопах // *Новости навигации.* 2018. № 2. С. 21–27.
2. *Пешехонов В.Г.* Перспективы развития гироскопии // *Гироскопия и навигация.* Т. 28. № 2 (109), 2020. С. 3–10.
<https://doi.org/10.17285/0869-7035.0028>
3. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
4. *Климов Д.М., Журавлев В.Ф., Жбанов Ю.К.* Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд-во “Ким Л.А.”, 2017. 194 с.
5. *Журавлев В.Ф.* Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) // *Изв. РАН. МТТ.* 1993. № 3. С. 6–19.
6. *Журавлев В.Ф.* О глобальных эволюциях состояния обобщенного маятника Фуко // *Изв. РАН. МТТ.* 1998. № 6. С. 5–11.
7. *Журавлев В.Ф.* Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // *Изв. РАН. МТТ.* 1997. № 6. С. 27–35.
8. *Журавлев В.Ф.* Задача идентификации погрешностей обобщенного маятника Фуко // *Изв. РАН. МТТ.* 2000. № 5. С. 5–9.
9. *Жбанов Ю.К., Журавлев В.Ф.* О балансировке волнового твердотельного гироскопа // *Изв. РАН. МТТ.* 1998. № 4. С. 4–16.
10. *Жбанов Ю.К.* Контур управления амплитудой в волновом твердотельном гироскопе с автоматической компенсацией разнодобротности // *Изв. РАН. МТТ.* 2008. № 3. С. 17–22.
<https://doi.org/10.3103/S0025654408030035>
11. *Каленова Н.В.* Определение параметров поверхностного дебаланса резонатора волнового твердотельного гироскопа по его реакции на угловую вибрацию основания // *Изв. РАН. МТТ.* 2004. № 2. С. 3–7.
12. *Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В.* Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 167 с.
13. *Меркурьев И.В., Подалков В.В.* Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: Физматлит, 2009. 228 с.
14. *Астахов С.В.* Нелинейные эффекты в динамике волнового твердотельного и микромеханического гироскопов в условиях медленно меняющихся параметров. Дисс. ... канд. техн. наук. Москва, 2012. 157 с.
15. *Sudipto K.De., Aluru N.R.* Complex nonlinear oscillations in electrostatically actuated microstructures // *J. Microelectromech. Sys.* 2005. V. 15. № 2. P. 355–369.
<https://doi.org/10.1109/JMEMS.2006.872227>
16. *Rhoads J., Shaw S., Tunner K., Moehlis J., DeMartini B., Zhang W.* Generalized parametric resonance in electrostatically actuated microelectromechanical oscillators // *J. Sound Vibr.* 2006. V. 296. P. 797–829.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.03.009>
17. *Маслов Д.А.* Влияние нелинейных свойств электростатических и электромагнитных датчиков управления на динамику цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа. Дисс. ... канд. техн. наук. Москва, 2019. 127 с.
18. *Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В.* Идентификация параметров волнового твердотельного гироскопа с учетом нелинейности колебаний резонатора // *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика.* 2014. № 5. С. 18–23.
19. *Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В.* Способ определения параметров волнового твердотельного гироскопа // *Патент RU 2544308 С9.* 2015. Бюл. № 14.

20. *Маслов Д.А.* Идентификация параметров гироскопа с цилиндрическим резонатором при учете влияния нелинейности на амплитуду вынуждающего воздействия // *Машиностроение и инженерное образование*. 2017. № 1 (50). С. 24–31.
21. *Maslov D.A., Merkurjev I.V.* Increase in the Accuracy of the Parameters Identification for a Vibrating Ring Microgyroscope Operating in the Forced Oscillation Mode with Nonlinearity Taken into Account // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2018. V. 14. № 3. P. 377–386.
<https://doi.org/10.20537/nd180308>
22. *Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В., Подалков В.В.* Разработка методов идентификации параметров нелинейной математической модели волнового твердотельного гироскопа // XXVII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Сборник материалов. IEEE, 2020. С. 244–248.
<https://doi.org/10.23919/ICINS43215.2020.9133967>
23. *Журавлев В.Ф.* Волновой твердотельный гироскоп: современное состояние, некоторые аспекты // *Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперимент*. 2011. № 2 (33). Т. 16. С. 118–123.
24. *Маслов Д.А., Меркурьев И.В.* Компенсация погрешностей и учет нелинейности колебаний вибрационного кольцевого микрогироскопа в режиме датчика угловой скорости // *Нелинейная динамика*. 2017. Т. 13. № 2. С. 227–241.
<https://doi.org/10.20537/nd1702006>
25. *Лунин Б.С., Басараб М.А., Юрин А.В., Чуманкин Е.А.* Цилиндрический резонатор из кварцевого стекла для недорогих вибрационных гироскопов // *Сборник материалов юбилейной XXV Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам*. IEEE, 2018. С. 204–207.
<https://doi.org/10.23919/ICINS.2018.8405896>
26. *Басараб М.А., Лунин Б.С., Матвеев В.А., Чуманкин Е.А.* Балансировка полусферических резонаторов волновых твердотельных гироскопов методом химического травления // *Гироскопия и навигация*. 2015. № 1. С. 61–70.
doi.org/10.1134/S2075108715030025
27. *Маслов Д.А., Меркурьев И.В.* Влияние нелинейных свойств электростатических датчиков управления на динамику цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа // *Изв. РАН. МТТ*. 2021. № 6. С. 88–110.
<https://doi.org/10.3103/S002565442106011X>
28. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
29. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Введение в математическую статистику. М.: ЛКИ, 2010. 600 с.
30. *Гавриленко А.Б., Меркурьев И.В., Подалков В.В., Сбытова Е.С.* Динамика микромеханических систем. М.: Издательство МЭИ, 2016. 60 с.
31. *Тимошенков С.П., Симонов Б.М., Бритков О.М., Анчутин С.А., Тимошенков А.С.* Балансировка кремниевых датчиков угловой скорости в процессе изготовления // *Изв. вузов. Электроника*. 2015. Том 20. № 1. С. 58–67.