

УДК 62-185.7

САМОВОЗБУЖДАЮЩИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ МАЛОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА РОТОР С МАЛЫМ ЧИСЛОМ РАДИАЛЬНЫХ ПЕРЕГОРОДОК

© 2022 г. А. Н. Никифоров^{a,*}

^a *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*

**e-mail: n.andre@mail.ru*

Поступила в редакцию 20.10.2021 г.

После доработки 19.12.2021 г.

Принята к публикации 21.12.2021 г.

Предложена теория (математическая модель) прецессии гибкого ротора с полостью, равномерно радиальными перегородками и частично заполненной маловязкой жидкостью. Самовозбуждающиеся во вращающемся и прецессирующем роторе с малым числом перегородок (от 1 до 3) колебания жидкости приводят к специфическим частотам системы и динамической неустойчивости в диапазоне, не связанном с обычной синхронной критической скоростью.

Ключевые слова: вал, жидкость, перегородки, динамика, вибрация

DOI: 10.31857/S0572329922050105

1. Введение. Известно, что вибрации центрифуг, сепараторов, охлаждаемых изнутри газовых турбин, поплавок гидроскопов, вращающихся ракет и автобалансирующих устройств с частичным жидкостным наполнением, а также иных роторов, внутри которых случайно проникла жидкость, могут быть значительными на некоторых скоростях вращения вследствие волнообразования [1–4]. Между тем, говорить о том, что тема построения для самовозбуждающихся колебаний ротора, частично заполненного маловязкой жидкостью, аналитических моделей и решений [5–8] закрыта, преждевременно. Так, для гашения колебаний жидкости применяются радиальные перегородки, и поскольку соответствующие системы описать математически и в общем виде затруднительно, ограничиваются численным (как правило конечно-элементным) модальным анализом. На практике на основе накопленного опыта эксплуатации распространен тривиальный подход к подавлению волн — чем больше радиальных перегородок, тем лучше, т.е. фактически не занимаются поиском/оптимизацией относительно малого и достаточного числа перегородок под конкретную роторную машину.

Пусть простейший симметричный полый ротор в виде двухлопастного гибкого вала с цилиндрической полостью посередине в отличие от предшественников [9–13] имеет внутри несколько радиальных перегородок, причем образованные ими отсеки одинаковы, частично и равно заполнены несжимаемой маловязкой жидкостью, и вся эта роторная система вращается с постоянной угловой скоростью ω .

2. Задача движения ротора с маловязкой жидкостью и радиальными перегородками. В случае вертикальной ориентировки, уравновешенности и невозмущенного (чистого) вращения такой системы ротор движется вместе с жидкостью как одно твердое тело вне зависимости от вязкости. Пусть относительно этого динамического равновесия колебания ротора и жидкости малы, т.е. возмущенным движением ротора является

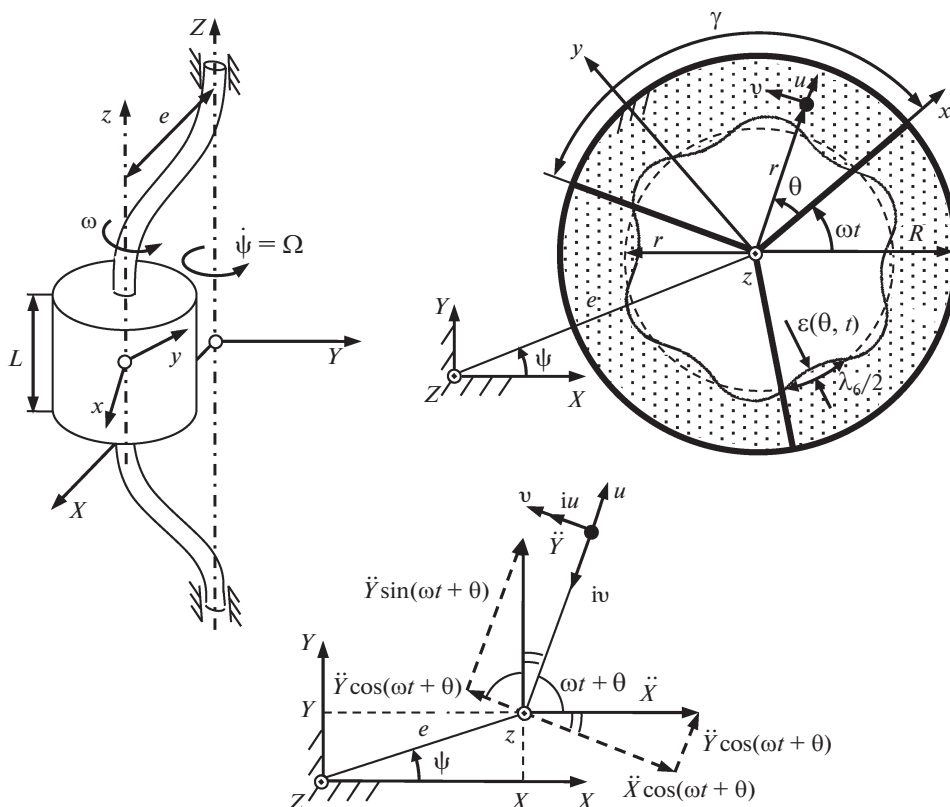


Рис. 1. Динамическая модель симметричного гибкого ротора с полостью, разделенной сплошными радиальными перегородками, частично и равно заполненной маловязкой жидкостью, а также плоских распространяющихся в окружном направлении волн, например как показано 2-го порядка ($\kappa = 2$, $n = 3$, $k = n\kappa$, $\lambda_k = 2\pi r/k$).

прецессия его геометрического центра с отличной от ω угловой скоростью Ω и малым радиусом e , а возмущенным движением жидкости являются малые перемещения ее некоторых частиц с линейными скоростями u , v относительно ротора (рис. 1), в т.ч. с малым отклонением ε свободной ее поверхности от внутреннего радиуса r гипотетической жидкости, затвердевшей при чистом вращении системы (пунктирная окружность на рис. 1).

Здесь и далее приняты допущения, что числа Рейнольдса, Фруда и Бонда достаточно велики, т.е. что эффекты вязкости, поверхностного натяжения и гравитации пренебрежимо слабо отражаются на поведении пограничных слоев жидкости. Таким образом, жидкость рассматривается как идеальная, однослойная и невесомая. Условия, при которых это возможно: $\omega r^2 \gg \nu$, $\rho r^3 \omega^2 \gg \sigma$ и $\rho \omega^2 \gg g$ (когда ось роторной системы сориентирована вертикально) или $r^2 \omega^2 \gg gL$ (когда – горизонтально), где ν , ρ и σ – кинематическая вязкость, плотность и коэффициент поверхностного натяжения жидкости, g – гравитационное ускорение, L – размер полости вдоль собственной оси.

Асинхронную прецессию ротора удобно анализировать в неподвижной цилиндрической системе координат $e\psi Z$ с началом в геометрическом центре полости при неде-

формированном вале ротора, так что ось Z есть линия центров подшипников. Колебания вращающейся жидкости удобно исследовать в жестко связанной с ротором цилиндрической системе координат $r\theta z$, начало которой находится в центре полости деформированного ротора, а также с осью z , параллельной оси Z .

Со введением неподвижных декартовой XYZ и цилиндрической $e\psi Z$, а также движущихся вместе с ротором прямоугольной xuz и цилиндрической $r\theta z$ систем отсчета динамическая модель полого секторированного ротора с жидкостью принимает вид (рис. 1).

В рассматриваемой системе пустой ротор имеет массу m . Подшипники являются жесткими по сравнению с валом, обладающим изгибной жесткостью k . Внутреннее и внешнее демпфирование ротора, включая трение в подшипниках, характеризуются коэффициентами b и d соответственно. В такой формулировке как известно [14], уравнения движения гибкого симметричного ротора имеют вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{X} + (b + d)\dot{X} + kX + b\omega Y &= F_X \\ m\ddot{Y} + (b + d)\dot{Y} + kY - b\omega X &= F_Y \end{aligned}$$

где X, Y — отклонения геометрического центра ротора (полости) от положения равновесия вдоль осей неподвижной прямоугольной системы координат, F_X и F_Y — составляющие некоторой силы F , действующей со стороны жидкости на ротор, вследствие его отклонений X и Y .

То же самое, вводя удобное комплексное представление отклонений $Z = X + iY$:

$$m\ddot{Z} + (b + d)\dot{Z} + kZ - ib\omega Z = F, \text{ где } F = F_X + iF_Y$$

Путем подстановки $Z = e e^{i\psi}$ можно выразить уравнение прецессии заданного ротора в полярных координатах e, ψ :

$$m(\ddot{e} + ie\ddot{\psi} + i2\dot{e}\dot{\psi} - e\dot{\psi}^2) + (b + d)\dot{e} + ke + ide\dot{\psi} + ibe(\dot{\psi} - \omega) = Fe^{-i\psi} \quad (2.1)$$

Составляющие гидродинамической силы F есть интегральные величины (суммы) проекций на неподвижные оси X и Y давлений жидкости на всей поверхности S боковой стенки полости:

$$F_X = \int_S p_{r=R} \cos(\omega t + \theta) dS, \quad F_Y = \int_S p_{r=R} \sin(\omega t + \theta) dS, \quad \text{где } dS = RLd\theta \quad (2.2)$$

Соответственно, гидродинамические составляющие в направлениях подвижных осей x и y :

$$F_x = RL \int_0^{2\pi} p_{r=R} \cos \theta d\theta, \quad F_y = RL \int_0^{2\pi} p_{r=R} \sin \theta d\theta$$

Очевидно, анализ движения ротора, содержащего жидкость, требует решения совместной задачи теории колебаний и гидродинамики. Гидродинамическая сторона задачи сводится к отысканию поля давлений в наиболее общем случае с помощью уравнений Навье—Стокса и неразрывности. Согласно им, течение вязкой жидкости, свободной от массовых и поверхностных сил, вращающейся со скоростью ротора ω и в то же время прецессирующей вместе с ним со скоростью ψ (рис. 1) будут определять уравнения [15, 16]:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial t} - v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} + \frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{u}{r^2} - 2 \frac{\partial v}{r^2 \partial \theta} \right) + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{r \partial \theta} - \\
& - \frac{v^2}{r} - \omega^2 r - 2\omega v = - \frac{\partial p}{\rho \partial r} - \ddot{X} \cos(\omega t + \theta) - \ddot{Y} \sin(\omega t + \theta) \\
& \frac{\partial v}{\partial t} - u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{r \partial r} + \frac{\partial^2 v}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{v}{r^2} + 2 \frac{\partial u}{r^2 \partial \theta} \right) + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \\
& + \frac{uv}{r} + 2\omega u = - \frac{\partial p}{\rho r \partial \theta} + \ddot{X} \sin(\omega t + \theta) - \ddot{Y} \cos(\omega t + \theta) \\
& r \frac{\partial u}{\partial r} + u + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где u и v – радиальная и тангенциальная составляющие скорости частицы жидкости в связанной с ротором (подвижной) цилиндрической системе отсчета, r и θ – координаты жидкостной частицы в этой полярной системе, p – давление в любой точке жидкости, ρ и ν – ее плотность и кинематическая вязкость.

Члены с множителем ω^2 и 2ω учитывают влияние нормального ускорения и ускорения Кориолиса от вращения ротора, а члены с множителем \ddot{X} и \ddot{Y} характеризуют эффект переносного ускорения начала отсчета жестко связанной с ротором системы координат за счет его прецессии.

Заданная система уравнений (2.3) не включает компоненты и отдельное уравнение по z -координате жидкостной частицы. Обоснование для их отсутствия видится в конфигурации жидкости при синхронной прецессии полости ($\dot{\psi} = \Omega = \omega$), и наиболее четко на примере с двумя герметичными перегородками, коллинеарными и перпендикулярными направлению роторного смещения e . На рис. 2, а кружение перегородок вокруг оси Z не препятствует образованию общей округлой свободной поверхности жидкости, как при отсутствии перегородок. На рис. 2, б “лунное” движение перегородок максимально препятствует этому, порождая две различные примерно полуэллиптические жидкостные поверхности. Здесь также малое роторное отклонение e вызывает малое отклонение ε свободной поверхности жидкости от внутреннего радиуса r гипотетической, затвердевшей при чистом вращении системы. В случае несинхронного (с вращением) прецессионного движения инициируется непрерывное переливание и видоизменение между первой и второй отмеченными плоскими конфигурациями. Как следствие, возмущение асинхронной прецессией не сопровождается появлением относительных скоростей частиц жидкости (относительно стенок полости) в z -направлении.

Возмущенные скорости u , v сопряжены с возмущенным давлением p , увеличивающим стационарное p_0 , которое пропорционально квадрату скорости вращения ω^2 . По аналогии с гидростатическим давлением столба жидкости, в заданной системе ускорение $= \omega^2(r + r)/2$, а высота $= r - r$. Таким образом, без потери общности, давление в жидкости:

$$p = p_0 + p(r, \theta, t), \quad \text{где} \quad p_0 = \rho \omega^2 (r^2 - r^2) / 2 \tag{2.4}$$

Похожим образом определяется свободная поверхность жидкости:

$$r + \varepsilon(\theta, t) \tag{2.5}$$

где ε – ее возмущенное смещение.

Граничные условия, дополняющие (2.3), т.е. задающие поведение уравнений (2.3) на поверхностях жидкости:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad r = R \quad (\text{на боковой стенке полости}),$$

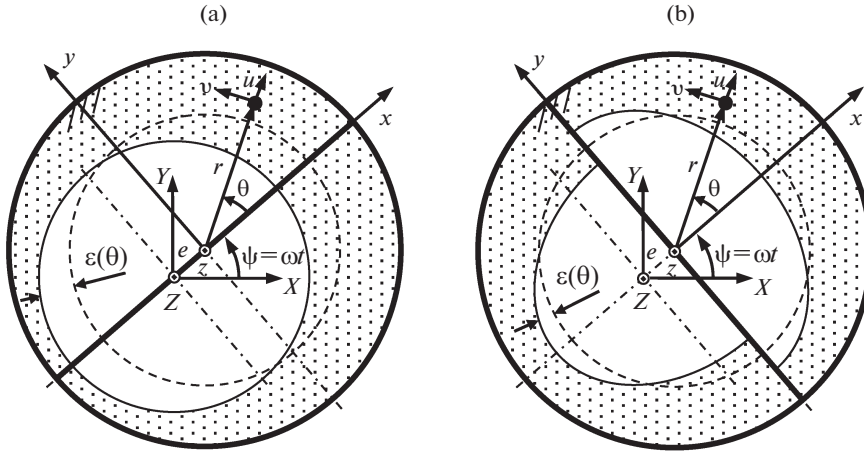


Рис. 2. Возможные фиксированные конфигурации вращающейся жидкости в синхронно прецессирующем роторе.

$$v = 0 \quad \text{при} \quad \theta = M\gamma,$$

где M – целое число от 0 до n , $\gamma = 2\pi/n$ – (на n перегородках),

$$u = \partial\epsilon/\partial t, \quad p = 0 \quad \text{при} \quad r = R \quad (\text{на свободной поверхности жидкости}).$$

При этом, если подставить (2.5) в (2.4), а именно в p_0 вместо r , и отбросить квадрат малого, т.е. величину ϵ^2 , то $p = \rho\omega^2 r\epsilon + p(r, \theta, t)$ и $p_{r=r} = -\rho\omega^2 r\epsilon$, а ключевые кинематические и динамические граничные условия могут быть преобразованы к виду:

$$u_{r=R} = 0, \quad \partial p_{r=r}/\partial t = -\rho\omega^2 r u_{r=r} \quad (2.6)$$

Задача состоит в отыскании решений (законов) таких движений, которые представляют собой малое незатухающее периодическое+переносное отклонение жидкости в окружном направлении от ее установившегося состояния вращения как твердого тела. В этом случае можно пренебречь в уравнениях (2.3) вязкими компонентами и скоростными членами второго порядка малости, а также с учетом (2.4) в первом приближении получить:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v &= -\frac{\partial p}{\rho \partial r} - \ddot{X} \cos(\omega t + \theta) - \ddot{Y} \sin(\omega t + \theta) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u &= -\frac{\partial p}{\rho r \partial \theta} + \ddot{X} \sin(\omega t + \theta) - \ddot{Y} \cos(\omega t + \theta) \\ r \frac{\partial u}{\partial r} + u + \frac{\partial v}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

где p – переменная часть давления в любой точке жидкости.

При умножении второго уравнения на мнимую единицу и сложении первых двух уравнений, а затем при умножении первого уравнения на мнимую единицу и вычитании из него второго уравнения, они преобразуются в:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v + i \frac{\partial v}{v t} + i 2\omega u &= -\frac{\partial p}{\rho \partial r} - i \frac{\partial p}{\rho r \partial \theta} - \ddot{Z} e^{-i(\omega t + \theta)} \\ i \frac{\partial u}{\partial t} - i 2\omega v - \frac{\partial v}{\partial t} - 2\omega u &= -i \frac{\partial p}{\rho \partial r} + \frac{\partial p}{\rho r \partial \theta} - i \ddot{Z} e^{-i(\omega t + \theta)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

3. Решение уравнений стационарного движения системы “ротатор–жидкость”. В случае установившейся прецессии $\psi = \Omega t$, $e = \text{const}$, $\ddot{Z} = -e\Omega^2 e^{i\Omega t}$, т.е. системные уравнения (2.1) и (2.7) принимают вид:

$$ke - me\Omega^2 + ibe(\Omega - \omega) + ide\Omega = Fe^{-i\Omega t} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v &= -\frac{\partial p}{\rho \partial r} + e\Omega^2 e^{i(\Omega_0 t - \theta)} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u &= -\frac{\partial p}{\rho r \partial \theta} - ie\Omega^2 e^{i(\Omega_0 t - \theta)} \\ r \frac{\partial u}{\partial r} + u + \frac{\partial v}{\partial \theta} &= 0, \quad \text{где } \Omega_0 = \Omega - \omega \end{aligned} \quad (3.2)$$

Если предположить, что:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\theta, t) &= \varepsilon(\theta) e^{i\Omega_0 t} \\ p(r, \theta, t) &= P(r, \theta) e^{i\Omega_0 t} \\ u(r, \theta, t) &= U(r, \theta) e^{i\Omega_0 t} \\ v(r, \theta, t) &= V(r, \theta) e^{i\Omega_0 t} \end{aligned} \quad (3.3)$$

то подстановка функций (3.3) в уравнения вынужденного движения жидкости (3.2) приводит к:

$$\begin{aligned} i\Omega_0 U - 2\omega V &= -\frac{\partial P}{\rho \partial r} + e\Omega^2 e^{-i\theta} \\ i\Omega_0 V + 2\omega U &= -\frac{\partial P}{\rho r \partial \theta} - ie\Omega^2 e^{-i\theta} \\ r \frac{\partial U}{\partial r} + U + \frac{\partial V}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

Решения первых двух из этих уравнений следующие:

$$\begin{aligned} U &= i \frac{\Omega_0}{\rho(\Omega_0^2 - 4\omega^2)} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{2\omega}{\rho r(\Omega_0^2 - 4\omega^2)} \frac{\partial P}{\partial \theta} - ie\Omega^2 \frac{\Omega_0 - 2\omega}{\Omega_0^2 - 4\omega^2} e^{-i\theta} \\ V &= -\frac{2\omega}{\rho(\Omega_0^2 - 4\omega^2)} \frac{\partial P}{\partial r} + i \frac{\Omega_0}{\rho r(\Omega_0^2 - 4\omega^2)} \frac{\partial P}{\partial \theta} - e\Omega^2 \frac{\Omega_0 - 2\omega}{\Omega_0^2 - 4\omega^2} e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (3.4)$$

С этими выражениями третье уравнение (неразрывности) дает:

$$r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + r \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} = 0$$

Если предположить, что решением этого уравнения является

$$P(r, \theta) = P(r) e^{-in\theta}$$

где n – число радиальных перегородок, то получится простейшая форма уравнения Бесселя:

$$r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + r \frac{\partial P}{\partial r} - n^2 P(r) = 0$$

общее решение которого:

$$P(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-n} \quad (3.5)$$

где C_1 и C_2 – константы, определяющиеся исходными (2.6) или в силу равенств:

$$\begin{aligned} p_{r=r} &= P(r, \theta) e^{i\Omega_0 t} = P(r) e^{-in\theta} e^{i\Omega_0 t} \\ u_{r=r} &= U(r, \theta) e^{i\Omega_0 t} = U(r) e^{-in\theta} e^{i\Omega_0 t} \\ u_{r=R} &= U(R, \theta) e^{i\Omega_0 t} = U(R) e^{-in\theta} e^{i\Omega_0 t} \end{aligned}$$

граничными условиями вида:

$$U(R) = 0, \quad i\Omega_0 P(r) = -\rho\omega^2 r U(r)$$

Чтобы найти C_1 и C_2 , следует перейти от U к $U(r)$, производя в (3.4) замены $\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P(r)}{\partial r} e^{-in\theta}$ и $\frac{\partial P}{\partial \theta} = -inP(r) e^{-in\theta}$, т.е.:

$$\begin{aligned} U(r) &= i \frac{\Omega_0}{\rho(\Omega_0^2 - 4\omega^2)} \frac{\partial P(r)}{\partial r} - i \frac{2\omega n}{\rho r(\Omega_0^2 - 4\omega^2)} P(r) - ie\Omega^2 \frac{\Omega_0 - 2\omega}{\Omega_0^2 - 4\omega^2} e^{i(n-1)\theta} \\ V(r) &= -\frac{2\omega}{\rho(\Omega_0^2 - 4\omega^2)} \frac{\partial P(r)}{\partial r} + \frac{n\Omega_0}{\rho r(\Omega_0^2 - 4\omega^2)} P(r) - e\Omega^2 \frac{\Omega_0 - 2\omega}{\Omega_0^2 - 4\omega^2} e^{i(n-1)\theta} \end{aligned}$$

Раскрытие здесь $P(r)$ и $\partial P(r)/\partial r$ через равенство (3.5) приводит к выражениям:

$$\begin{aligned} U(r) &= i \frac{n}{\rho} \left(\frac{C_1 r^{n-1}}{\Omega_0 + 2\omega} - \frac{C_2 r^{-n-1}}{\Omega_0 - 2\omega} \right) - i \frac{e\Omega^2}{\Omega_0 + 2\omega} e^{i(n-1)\theta} \\ V(r) &= \frac{n}{\rho} \left(\frac{C_1 r^{n-1}}{\Omega_0 + 2\omega} + \frac{C_2 r^{-n-1}}{\Omega_0 - 2\omega} \right) - \frac{e\Omega^2}{\Omega_0 + 2\omega} e^{i(n-1)\theta} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Условие $U(R) = 0$ и (3.6) определяют, что

$$C_2 = C_1 \frac{\Omega_0 - 2\omega}{\Omega_0 + 2\omega} R^{2n} - \frac{\rho e \Omega^2}{n} \frac{\Omega_0 - 2\omega}{\Omega_0 + 2\omega} R^{n+1} e^{i(n-1)\theta} \quad (3.7)$$

На основании соотношений $i\Omega_0(C_1 r^n + C_2 r^{-n}) = -\rho\omega^2 r U(r)$, (3.6) и (3.7) получается, что

$$C_1 = \frac{\rho e \Omega^2}{n} \frac{\Omega_0^2 - 2\omega\Omega_0 - \bar{\sigma}n\omega^2}{\Omega_0^2 - 2\bar{\sigma}\omega\Omega_0 - \bar{\sigma}n\omega^2} \frac{R^{n+1}}{R^{2n} + r^{2n}} e^{i(n-1)\theta} \quad (3.8)$$

где $\bar{\sigma} = \frac{R^{2n} - r^{2n}}{R^{2n} + r^{2n}}$, $\bar{\bar{\sigma}} = 1 - \frac{r^{n+1}}{R^{n+1}}$.

Константа (3.7) при подстановке (3.8) преобразуется в:

$$C_2 = -\frac{\rho e \Omega^2}{n} \frac{\Omega_0 - 2\omega}{\Omega_0 + 2\omega} \frac{\Omega_0 (\Omega_0 + 2\omega) r^{2n} + \bar{\sigma}n\omega^2}{\Omega_0^2 - 2\bar{\sigma}\omega\Omega_0 - \bar{\sigma}n\omega^2} \frac{R^{n+1}}{R^{2n} + r^{2n}} e^{i(n-1)\theta} \quad (3.9)$$

где $\bar{\bar{\sigma}} = r^{2n} - R^{2n} \frac{r^{n+1}}{R^{n+1}}$

Выражение (3.5) с заменами (3.8) и (3.9) принимает вид:

$$P(r) = \frac{\rho e \Omega^2}{n} \frac{R^{n+1}}{R^{2n} + r^{2n}} \frac{(\Omega_0^2 - 2\omega\Omega_0 - \bar{\sigma}n\omega^2)r^n - (\Omega_0^2 - 2\omega\Omega_0)r^{2n}r^{-n} - \frac{\Omega_0 - 2\omega}{\Omega_0 + 2\omega} \bar{\sigma}n\omega^2 r^{-n}}{\Omega_0^2 - 2\bar{\sigma}\omega\Omega_0 - \bar{\sigma}n\omega^2} e^{i(n-1)\theta}$$

Соответственно

$$p(R, \theta, t) = \frac{\rho e \Omega^2}{n} f(R, r, n, \Omega_0, \omega) R e^{i(\Omega_0 t - \theta)}$$

$$f(R, r, n, \Omega_0, \omega) = \frac{(\Omega_0^2 - 2\omega\Omega_0 - \bar{\sigma}n\omega^2)R^{2n} - (\Omega_0^2 - 2\omega\Omega_0)r^{2n} - \frac{\Omega_0 - 2\omega}{\Omega_0 + 2\omega} \bar{\sigma}n\omega^2}{(\Omega_0^2 - 2\bar{\sigma}\omega\Omega_0 - \bar{\sigma}n\omega^2)(R^{2n} + r^{2n})}$$

и при отбрасывании мнимой части $e^{i(\Omega_0 t - \theta)}$ выражение суммарной реакции жидкости на боковую стенку ротора:

$$P_{r=R} = \frac{\rho\omega^2}{2} (R^2 - r^2) + \frac{\rho e \Omega^2}{n} f(R, r, n, \Omega_0, \omega) R \cos(\Omega_0 t - \theta)$$

Таким образом, составляющие искомой гидродинамической силы согласно (2.2):

$$F_X = \frac{m_F e \Omega^2}{n} f(R, r, n, \Omega_0, \omega) \cos(\Omega_0 + \omega)t,$$

$$F_Y = \frac{m_F e \Omega^2}{n} f(R, r, n, \Omega_0, \omega) \sin(\Omega_0 + \omega)t$$

где $m_F = \rho\pi R^2 L$ – масса жидкости, необходимая для полного заполнения полости ротора.

Для завершения формулировки, учитывая равенство $\Omega_0 = \Omega - \omega$, остается лишь подставить выражение $F = \frac{m_F e \Omega^2}{n} f(R, r, n, \Omega, \omega) e^{i\Omega t}$ в (3.1):

$$ke - me\Omega^2 + ibe(\Omega - \omega) + ide\Omega = \frac{m_F e \Omega^2}{n} f(R, r, n, \Omega, \omega)$$

$$f(R, r, n, \Omega, \omega) = \frac{\bar{\sigma}(\Omega^2 - 4\omega\Omega + 3\omega^2) - \left(\frac{1 - \chi^{n+1}}{1 + \chi^{2n}} + \frac{\chi^{2n} - \chi^{n+1}}{1 + \chi^{2n}} \frac{\Omega - 3\omega}{\Omega + \omega} \right) n\omega^2}{\Omega^2 - 2(1 + \bar{\sigma})\omega\Omega + (1 + 2\bar{\sigma} - \bar{\sigma}n)\omega^2} \quad (3.10)$$

где $\chi = \frac{r}{R}$, $\bar{\sigma} = \frac{1 - \chi^{2n}}{1 + \chi^{2n}}$, а также развернуты члены, содержащие $\bar{\sigma} = 1 - \chi^{n+1}$ и $\underline{\bar{\sigma}} = R^{2n}(\chi^{2n} - \chi^{n+1})$.

4. Анализ движения и устойчивости системы “ротор–жидкость”. Любая роторная система динамически устойчива, если $\text{Re}\Omega > 0$ и $\text{Im}\Omega > 0$ или $\text{Re}\Omega < 0$ и $\text{Im}\Omega < 0$. Принимая во внимание, что на границе динамической устойчивости, а также без учета диссипативных и неконсервативных сил $\text{Re}\Omega = \Omega$ и $\text{Im}\Omega = 0$, т.е. записывая порознь мнимую и вещественную части уравнения (3.10), можно получить два уравнения:

$$b(\Omega - \omega) + d\Omega = 0$$

$$\omega_0^2 - \Omega^2 = \frac{\mu \Omega^2}{n} \frac{\bar{\sigma}(\Omega^2 - 4\omega\Omega + 3\omega^2) - \left(\frac{1 - \chi^{n+1}}{1 + \chi^{2n}} + \frac{\chi^{2n} - \chi^{n+1}}{1 + \chi^{2n}} \frac{\Omega - 3\omega}{\Omega + \omega} \right) n\omega^2}{\Omega^2 - 2(1 + \bar{\sigma})\omega\Omega + (1 + 2\bar{\sigma} - \bar{\sigma}n)\omega^2} \quad (4.1)$$

где $\omega_0^2 = k/m$, $\mu = m_F/m$.

Первое уравнение определяет границу динамической устойчивости, т.е. критическое соотношение между скоростями ω и Ω , под действием учитываемых сил вязкого внутреннего и внешнего трения:

$$\frac{\omega}{\Omega} = 1 + \frac{d}{b}$$

В более типичном для практики невязком случае гистерезисного внутреннего и внешнего трения [17]:

$$b = \frac{\eta k}{|\Omega - \omega|}, \quad d = \frac{\eta_e k}{|\Omega|}, \quad \eta \frac{\Omega - \omega}{|\Omega - \omega|} + \eta_e \frac{\Omega}{|\Omega|} = 0$$

где η и η_e – коэффициенты потерь в материалах ротора и подшипников.

Отсюда в зависимости от скоростей прецессии и вращения могут быть три ситуации. В двух из них: при прямой прецессии $\Omega/|\Omega| = 1$ и скорости вращения меньше скорости прецессии $(\Omega - \omega)/|\Omega - \omega| = 1$, а также при обратной прецессии $\Omega/|\Omega| = -1$ и любой скорости вращения $(\Omega - \omega)/|\Omega - \omega| = -1$, система устойчива, так как $\eta + \eta_e \neq 0$. Однако в третьей: при прямой прецессии $\Omega/|\Omega| = 1$ и скорости вращения больше скорости прецессии $(\Omega - \omega)/|\Omega - \omega| = -1$, система не всегда устойчива, а именно при $\eta_e \leq \eta$.

Второе уравнение определяет частоты самовозбуждающихся колебаний неконсервативной роторной системы вблизи границы динамической устойчивости или собственные частоты консервативной роторной системы в зависимости от скорости вращения.

В частности, при синхронном движении из (4.1):

$$\omega = \Omega = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu/n}} \omega_0 \quad (4.2)$$

В общем асинхронном случае уравнение (4.1) сводится к многочлену вида:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \mu \frac{\bar{\sigma}}{n}\right) \bar{\Omega}^5 - \left(1 + 2\bar{\sigma} + 3\mu \frac{\bar{\sigma}}{n}\right) \bar{\omega} \bar{\Omega}^4 - \\ & - \left[1 + \left(1 + \bar{\sigma}n + \mu \frac{\bar{\sigma}}{n} + \mu \frac{1 + \chi^{2n} - 2\chi^{n+1}}{1 + \chi^{2n}}\right) \bar{\omega}^2\right] \bar{\Omega}^3 + \\ & + \left[1 + 2\bar{\sigma} + \left(1 + 2\bar{\sigma} - \bar{\sigma}n + 3\mu \frac{\bar{\sigma}}{n} - \mu \frac{1 - 3\chi^{2n} + 2\chi^{n+1}}{1 + \chi^{2n}}\right) \bar{\omega}^2\right] \bar{\omega} \bar{\Omega}^2 + \\ & + (1 + \bar{\sigma}n) \bar{\omega}^2 \bar{\Omega} - (1 + 2\bar{\sigma} - \bar{\sigma}n) \bar{\omega}^3 = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\bar{\Omega} = \Omega/\omega_0$, $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$.

В еще одном частном случае, либо при наличии в полости одной радиальной перегородки, либо при отсутствии перегородок, т.е. при $n = 1$:

$$\begin{aligned} & (1 + \mu \bar{\sigma}) \bar{\Omega}^5 - (1 + 2\bar{\sigma} + 3\mu \bar{\sigma}) \bar{\omega} \bar{\Omega}^4 - [1 + (1 + \bar{\sigma} + 2\mu \bar{\sigma}) \bar{\omega}^2] \bar{\Omega}^3 + \\ & + [1 + 2\bar{\sigma} + (1 + \bar{\sigma} + 2\mu \bar{\sigma}) \bar{\omega}^2] \bar{\omega} \bar{\Omega}^2 + (1 + \bar{\sigma}) \bar{\omega}^2 \bar{\Omega} - (1 + \bar{\sigma}) \bar{\omega}^3 = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

В действительности, без перегородок уравнение (4.1) принимает особую форму:

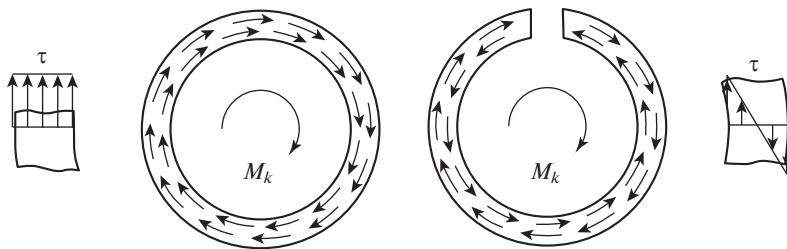


Рис. 3. Схема потоков касательных напряжений в замкнутом и открытом профиле трубы или жидкости в неравномерно вращающейся неразделенной и один раз перегороденной полости.

$$\omega_0^2 - \Omega^2 = \mu \bar{\sigma} \bar{\Omega}^2 \frac{\Omega^2 - 4\omega\Omega + 2\omega^2}{\Omega^2 - 2(1 + \bar{\sigma})\omega\Omega + (1 + 2\bar{\sigma} - \bar{\sigma})\omega^2}$$

и получается полином меньшего порядка:

$$(1 + \mu\bar{\sigma})\bar{\Omega}^4 - 2(1 + 2\mu\bar{\sigma} + \bar{\sigma})\bar{\omega}\bar{\Omega}^3 - [1 - (1 + 2\mu\bar{\sigma} + \bar{\sigma})\bar{\omega}^2]\bar{\Omega}^2 + 2(1 + \bar{\sigma})\bar{\omega}\bar{\Omega} - (1 + \bar{\sigma})\bar{\omega}^2 = 0 \quad (4.5)$$

Математическое снижение размерности на единицу физически означает удаление из системы одной частоты собственных колебаний, а именно связанной с жидкостью. Ее возмущенное окружное течение при пульсирующе неравномерном вращении в неразделенной и даже однажды перегороденной полости принципиально различно. Это понятно из механической аналогии, если представить скорости циркулирующей внутри полости жидкости как касательные напряжения, распределяющиеся при кручении в трубе замкнутого и незамкнутого сечения (рис. 3). В замкнутом тонкостенном профиле касательные напряжения распределяются по толщине почти равномерно; в открытом (незамкнутом) профиле распределение происходит по линейному закону, причем на средней линии сечения касательные напряжения обращаются в нуль.

Полином 4-й степени имеет необозримо громоздкое общее решение, а полином 5-й степени уже даже не поддается аналитическому решению. Численно рассчитанные результаты удобнее всего представить в виде графика зависимости возможных скоростей прецессии от скорости вращения ротора.

На рис. 4 приведены результаты по (4.5) и (4.4) для реальной системы “ротор–жидкость” (табл. 1) без перегородок (рис. 4, а) и с одной радиальной перегородкой (рис. 4, б) в роторной полости ($n = 1$, $\bar{\sigma} = 0.34$). Для этой же системы также показаны результаты по (4.3) в случаях с двумя ($n = 2$, $\bar{\sigma} = 0.61$, рис. 4, в) и тремя ($n = 3$, $\bar{\sigma} = 0.79$, рис. 4, д) радиальными перегородками в роторе.

Как видно, все диаграммы частот значительно отличаются друг от друга. На первой из представленных диаграмм для каждого значения скорости вращения $\bar{\omega}$ существуют четыре значения $\bar{\Omega}$, на остальных – для каждой $\bar{\omega}$ – пять прецессионных скоростей $\bar{\Omega}$. На рис. 4 присутствует известное пересечение линии $\Omega = \omega$ с графиком одной из частот (г. С), которая определяет критическую скорость роторной системы. Легко может быть проверено, что точка С равна значению, следующему из формулы (4.2), т.е. совпадает с критической скоростью полного (жидкостью) ротора.

Число значений $\bar{\Omega}$ сохраняется и в интервалах скоростей ротора, отмеченных пунктиром. Вне таких интервалов решения (полиномов) содержат только положительные и отрицательные вещественные корни, однако внутри них решения дают также комплексно-сопряженные корни, и, конечно, некоторые из них имеют мнимую часть с противоположным знаком к действительной. Если такие корни подставить в экспо-

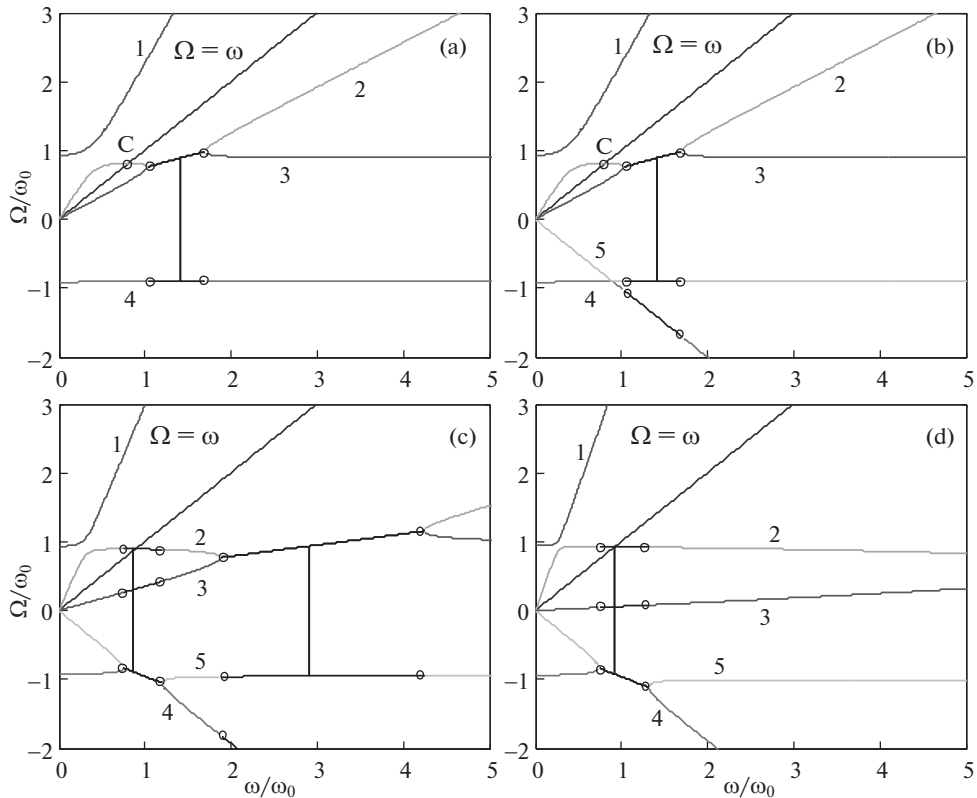


Рис. 4. Диаграмма частот системы “ротор-жидкость” без перегородок (а), с одной (b), двумя (c) и тремя (d) радиальными перегородками.

ненциальную функцию $e^{i\Omega t}$, то получится нарастание амплитуды или неустойчивое прецессионное движение. Другими словами, определены диапазоны самовозбуждаю-

Таблица 1. Исходные характеристики реальной роторной системы

Параметр	Обозначение	Значение	Размерность
Масса пустого ротора	m	0.24	кг
Критическая частота пустого ротора	$\omega_0/(2\pi)$	50	Гц
Критическая частота полного (жидкостью) ротора	$1/(2\pi)\omega_0/\sqrt{1+\mu}$	41	Гц
Радиус роторной полости	R	31.5	мм
Длина роторной полости	L	34	мм
Отношение массы жидкости (заполняющей всю роторную полость) к массе пустого ротора	$\mu = m_F/m$	≈ 0.5	—
Отношение радиуса свободной поверхности вращающейся жидкости к радиусу роторной полости	$\chi = \frac{r}{R}$	$\approx 0.7^*$	—

* Значение соответствует половинному заполнению.

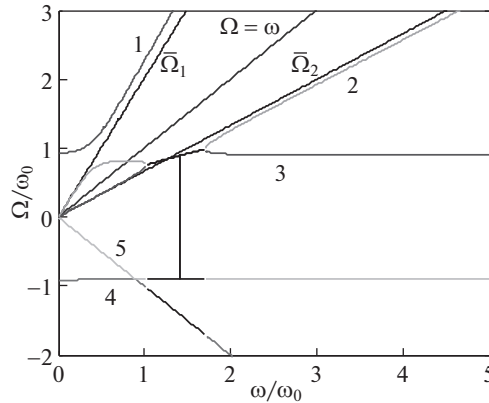


Рис. 5. Диаграмма волновых частот $\Omega_{1,2}$ вращающейся жидкости и собственных частот системы “ротор–жидкость” при $n = 1$.

щихся неустойчивых прецессий, совершающихся с той или иной собственной частотой системы. Здесь следует подчеркнуть, что вычисленные $\bar{\Omega}$ – это круговые собственные частоты системы “колеблющийся ротор–колеблющаяся в нем жидкость”.

Частоты собственных колебаний жидкости, вращающейся в жестком роторе на жестких подшипниках, определяются уравнением, также содержащимся в (4.1); а именно в знаменателе (4.1). В безразмерном случае оно имеет следующие вид и корни:

$$\bar{\Omega}^2 - 2(1 + \bar{\sigma})\bar{\omega}\bar{\Omega} + (1 + 2\bar{\sigma} - \bar{\sigma}n)\bar{\omega}^2 = 0 \quad (4.6)$$

$$\bar{\Omega}_{1,2} = (1 + \bar{\sigma} \pm \sqrt{\bar{\sigma}^2 + \bar{\sigma}n})\bar{\omega}$$

Здесь нижним знаком характеризуется волна, распространяющаяся против вращения, а верхним – прямая волна, поскольку уравнение (4.6) не что иное как частный случай известного уравнения физических частот Ω_k свободных плоских волн на поверхности вращающейся жидкости [18]:

$$\Omega_k^2 - 2(1 + \bar{\sigma})\omega\Omega_k + (1 + 2\bar{\sigma} - \bar{\sigma}k)\omega^2 = 0$$

где $k = nk$ – волновое число, k – число гребней/подов в волне в окружном направлении в каждом из n отсеков (рис. 1), образованных n радиальными перегородками (в случае отсутствия перегородок $k = \kappa$).

Для сравнения графики зависимости соответствующих частот $\bar{\Omega}_{1,2}$ от $\bar{\omega}$ при $n = 1$ наложены на частотную диаграмму системы “колеблющийся ротор – колеблющаяся в его полости с одной перегородкой жидкость” (рис. 5).

Очевидно, в системе две собственные частоты из пяти вызваны прямым и обратным волновым движением жидкости $\Omega_{1,2} \approx \pm\Omega_k$, еще две другие обусловлены прямым и обратным прецессионным движением ротора $\Omega_{3,4} \approx \pm E\omega_0$, где $E \in [1/\sqrt{1 + \mu/n} \dots 1]$. Что касается пятой собственной частоты, по-видимому, Ω_5 связана с $-\omega$ или с обратным и в то же время синхронизированным с вращением течением жидкости в перегороденной полости по типу отмеченной выше механической аналогии (рис. 3).

5. Заключение. Таким образом, определены диапазоны динамической неустойчивости ротора при неполном налив жидкости и равномерной постановке малого количества радиальных перегородок внутрь него. Дестабилизирующее влияние жидкости проявляется на закритических оборотах и оказывается неожиданно большим в случае

двух радиальных перегородок, несмотря на то, что делят роторную полость пополам и образуют геометрически уравновешенную конфигурацию системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Selmi M., Herbert T.* Resonance phenomena in viscous fluids inside partially filled spinning and nutating cylinders // *Phys. Fluids*. 1995. V. 7. № 108. P. 108–120.
<https://doi.org/10.1063/1.868731>
2. *Ulbrich H., Cyllik A., Ahaus G.* Stabilization of centrifuges with instabilities due to fluid – structure interactions: Various control approaches // *Int. J. Rotat. Mach.* 2001. V. 7. № 5. P. 323–333,
<https://doi.org/10.1155/S1023621X01000276>
3. *Soto-Urbiola L., Lopez-Parra M.* Liquid self-balancing device effects on flexible rotor stability // *Shock Vibr.* 2013. V. 20. P. 109–121,
<https://doi.org/10.3233/SAV-2012-0731>
4. *Marques F., Lopez J.M.* Precession of a rapidly rotating cylinder flow: traverse through resonance // *J. Fluid Mech.* 2015. V. 782. P. 63–98,
<https://doi.org/10.1017/jfm.2015.524>
5. *Preussner C., Kollmann F.G.* On the stability of a spinning, fluid filled and sectored rotor // *Comp. Struct.* 1988. V. 30. № 1–2. P. 131–141,
[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(88\)90221-0](https://doi.org/10.1016/0045-7949(88)90221-0)
6. *Tao M., Zhang W.* Dynamic stability of a rotor partially filled with a viscous liquid // *J. Appl. Mech., Trans. ASME*. 2002. V. 69. № 5. P. 705–707,
<https://doi.org/10.1115/1.1458553>
7. *Дерендяев Н.В.* Устойчивость вращения роторных систем, содержащих жидкость. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2014. 154 с.
8. *Ishida Y., Liu J.* Elimination of unstable ranges of rotors utilizing discontinuous spring characteristics: an asymmetrical shaft system, an asymmetrical rotor system, and a rotor system with liquid // *ASME J. Vib. Acoust.* 2010. V. 132. № 1. P. 011011,
<https://doi.org/10.1115/1.4000842>
9. *Firouz-Abadi R.D., Permoon M.R., Haddadpour H.* On the instability of spinning cylindrical shells partially filled with liquid // *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* 2012. V. 12. № 3. P. 1250018,
<https://doi.org/10.1142/S0219455412500186>
10. *Kern D., Jehle G.* Dynamics of a rotor partially filled with viscous incompressible fluid // *Proc. Appl. Math. Mech.* 2016. V. 16. P. 279–280,
<https://doi.org/10.1002/pamm.201610128>
11. *Dyakova V., Kozlov V., Polezhaev D.* Oscillation-induced sand dunes in a liquid-filled rotating cylinder // *Phys. Rev. E*. 2016. V. 94. P. 063109,
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.063109>
12. *Wang G., Yuan H.* An analysis of dynamic stability for a flexible rotor filled with liquid // *Phys. Fluids*. 2018. V. 30. P. 037101,
<https://doi.org/10.1063/1.5017582>
13. *Wang H., Chen G., Jiang G.* Stability analysis of an anisotropic rotor partially filled with viscous incompressible fluid based on Andronov-Hopf bifurcation // *Phys. Fluids*. 2021. V. 33. P. 064111,
<https://doi.org/10.1063/5.0055675>
14. *Хронин Д.В.* Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1970. 412 с.
15. *Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И.* Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука (сибирское отделение), 1989. 336 с.
16. *Firouz-Abadi R.D., Haddadpour H.* The flexural instability of spinning flexible cylinder partially filled with viscous liquid // *J. Appl. Mech.* 2010. V. 77. № 1. P. 011001,
<https://doi.org/10.1115/1.3172143>
17. *Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П.* Нестационарные колебания механических систем. Киев: Наукова думка, 1966. 336 с.
18. *Nikiforov A.* Natural surface oscillations of rotating fluid along radial baffles of rotor // *ASME J. Fluids Eng.* 2016. V. 138. № 6. P. 061202,
<https://doi.org/10.1115/1.4032300>