ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2022, № 6, с. 140–147

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Н. В. Баничук[a,*]

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: banichuk@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 30.03.2022 г.
После доработки 03.04.2022 г.
Принята к публикации 04.04.2022 г.

Рассматриваются задачи и методы спектрального анализа упругих систем. Внимание фокусируется на циклических спектральных формулировках. Выведены некоторые общие представления циклических решений рассматриваемых задач и представлен метод декомпозиции. В контексте анализа циклических систем в качестве примера рассмотрена спектральная задача об устойчивости сжимаемого неразрезного упругого кольца, решение которой приводится в аналитической форме.

Ключевые слова: математическое моделирование, спектральный анализ, циклические системы, упругая устойчивость

DOI: 10.31857/S0572329922060046

1. Введение. Рассмотрение трансляционно-инвариантных и циклических систем основывается на фундаментальных свойствах линейных дифференциальных операторов и краевых задач для систем дифференциальных уравнений [1–3]. Развитый аппарат линейных алгебраических систем и теории функций комплексного переменного [4–7] позволяют применять при решении периодических систем эффективные представления искомых решений. Особую роль при этом играют разрабатываемые методы декомпозиции [8–10]. Широкий класс задач [11, 12], исследуемых с применением данных методов, составляют проблемы механики деформируемого твердого тела, возникающие при изучении устойчивости сжатых циклических конструкций.

Данная работа содержит решение задач о спектре циклических систем, описываемых в операторной форме, в виде краевых задач на собственные значения. Получены представления для собственных функций в случае простого и кратного собственных значений. Разработана декомпозиция спектральных задач, упрощающая анализ поведения рассматриваемой механической системы. При этом решение описанной проблемы сводится к решению спектральных задач на элементарной ячейке. Метод декомпозиции применен также для вариационного анализа возникающих задач на собственные значения. В качестве примера приводится решение задачи устойчивости циклически сжимаемого неразрезного упругого кольца.

2. Основные соотношения задачи. Рассматриваются задачи о спектре циклических систем, поведение которых описывается краевыми задачами на собственные значения, записываемыми в операторной форме [1–3]

$$Aw(q;\theta) = \lambda Bw(q;\theta) \tag{2.1}$$

где A и B – симметричные вещественные операторы, включающие граничные условия, λ – собственное значение, $w(q;\theta)$ – собственная функция, описывающая состояние системы и отвечающая собственному значению. Через q в аргументах функции w и операторов A, B обозначен набор всех отличных от θ независимых переменных. Предполагается, что операторы в уравнении (2.1) инвариантны относительно операции поворота на углы, кратные периоду $\theta_n = 2\pi/n$, то есть операторы A, B и собственная функция w не меняют своего вида при замене аргумента

$$\theta \to \theta + j\theta_n \tag{2.2}$$

Величина угла поворота θ меняется в пределах $0 \le \theta \le 2\pi$, и, следовательно, можно считать, что в (2.2) целая величина j удовлетворяет условию $j \in [1, n]$, где n – заданное значение. Заметим также, что в постановку спектральной краевой задачи (2.1) включено требование ограниченности решения $w(q;\theta)$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\tilde{w}(q;\theta) \equiv w(q;\theta + \theta_n), \quad \theta_n = \frac{2\pi}{n} \tag{2.3}$$

Непосредственная подстановка функции $\tilde{w}(q;\theta)$ из (2.3) в уравнение (2.1) с последующей заменой (2.2) с $j = 1$ и учетом свойства циклической инвариантности рассматриваемой системы показывает, что функция $\tilde{w}(q;\theta)$ также является собственной функцией краевой спектральной задачи (2.1), соответствующей собственному значению λ.

Рассмотрим сначала случай некратного (простого) собственного значения λ и соответствующей ему с точностью до произвольной постоянной C единственной собственной функции $Cw(q;\theta)$ [4, 5]. Для функции $\tilde{w}(q;\theta) = Cw(q;\theta)$ согласно (2.3) имеем

$$w(q;\theta + \theta_n) = Cw(q;\theta) \tag{2.4}$$

Свойство (2.4) собственных функций циклических задач показывает, что при определении собственных функций, отвечающих простым собственным значениям, достаточно ограничиться интервалом изменения $\theta \in [0, \theta_n]$. При этом значения функции в интервале $[\theta_n, 2\pi]$ получаются продолжением функций из интервала $[0, \theta_n]$ с использованием соотношения (2.4). В частности,

$$w(q;2\theta_n) \equiv Cw(q;\theta + \theta_n) \equiv C^2 w(q;\theta)$$

а при произвольном $j \in [1, n]$ выполняется соотношение

$$w(q;\theta + j\theta_n) \equiv C^j w(q;\theta)$$

С учетом равенства $n\theta_n = 2\pi$ будем иметь

$$w(q;\theta + n\theta_n) \equiv C^n w(q;\theta) \equiv w(q;\theta)$$

Таким образом, входящая в равенство (2.4) постоянная C удовлетворяет уравнению

$$C^n = 1 \tag{2.5}$$

С использованием выражений [6, 7] для корней уравнения (2.5)

$$\exp\left[i\frac{2\pi}{n}(k-1)\right], \quad i = \sqrt{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

получим представление для собственных функций в случае простого собственного значения

$$w_k(q;\theta+\theta_n) \equiv \exp\left[i\frac{2\pi}{n}(k-1)\right]w_k(q;\theta), \quad k = 1,2,\ldots,n \tag{2.6}$$

Рассмотрим теперь случай r-кратного собственного значения λ и соответствующей ему системы собственных функций

$$w_1(q;\theta), w_2(q;\theta), \ldots, w_r(q;\theta) \tag{2.7}$$

Предполагается, что система линейно независимых функций (2.7) удовлетворяет условиям ортонормированности [4, 5]

$$(w_s(q;\theta), Bw_l(q;\theta)) = \delta_{sl}, \quad s,l = 1,2,\ldots,r \tag{2.8}$$

где $(q;\theta)$ – символ Кронекера, а выражение в левой части равенства (2.8) – скалярное произведение. При этом функции $\tilde{w}_j(q;\theta) \equiv w_j(q;\theta+\theta_n)$ $(j = 1,2,\ldots,r)$ могут быть представлены в форме разложений по системе собственных функций (2.7)

$$\tilde{w}_j(q;\theta) = \sum_{l=1}^{r} K_{jl}w_l(q;\theta) \tag{2.9}$$

причем в силу условий ортонормированности (2.8), записанных для функций, приведенных в (2.9), коэффициенты разложений K_{jl} удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{s=1}^{r} K_{js}^{*}K_{ls} = \delta_{jl} \tag{2.10}$$

Матрица K, составленная из коэффициентов разложений K_{jl}, является унитарной, т.е. $\tilde{K}^{*}K$ – единичная матрица. Заметим, что матрица K может быть приведена к диагональному виду [4, 5]

$$U^{*}KU = \Lambda \tag{2.11}$$

с диагональной матрицей Λ. Для этого используется преобразование U базиса собственных функций $w_j(q;\theta)$, сохраняющее условие ортонормированности. Таким образом, собственные функции, принадлежащие кратному собственному значению, инвариантны относительно преобразования сдвига $\theta \to \theta+\theta_n$ краевой задачи (2.1) и могут быть выбраны в виде, удовлетворяющем условию (2.4), т.е.

$$w_l(q;\theta+\theta_n) \equiv C_l w_l(q;\theta), \quad l = 1,2,\ldots,r \tag{2.12}$$

Аналогично тому, как это делалось в случае некратных собственных значений, приходим к общему свойству собственных функций инвариантной относительно свойств спектральной краевой задачи (безотносительно кратности r)

$$w_{\alpha_k}(q;\theta+\theta_n) \equiv \exp[i\alpha_k]w_{\alpha_k}(q;\theta), \quad \alpha_k = \frac{2\pi}{n}(k-1), \quad k = 1,2,\ldots,n \tag{2.13}$$

Предположим, что собственная функция $w_{\alpha_k}(q;\theta)$ обладает свойством (2.13). Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $w^0_{\alpha_k}(q;\theta)$, определяемую формулой

$$w^0_{\alpha_k}(q;\theta) \equiv \exp\left[-i\frac{\alpha_k\theta}{\theta_n}\right]w_{\alpha_k}(q;\theta) = \exp[-i(k-1)\theta]w_{\alpha_k}(q;\theta) \tag{2.14}$$

и рассмотрим эту функцию при $\theta \to \theta+\theta_n$. Будем иметь

$$w^0_{\alpha_k}(q;\theta+\theta_n) \equiv \exp\left[-i\frac{\alpha_k\theta}{\theta_n}\right]\exp[-i\alpha_k]w_{\alpha_k}(q;\theta+\theta_n) = w^0_{\alpha_k}(q;\theta) \tag{2.15}$$

Следовательно, $w^0_{\alpha_k}(q;\theta)$ является периодической функцией с периодом θ_n. В итоге проведенного анализа приходим к общему представлению для собственных функций циклических систем, инвариантных относительно конечных вращений $\theta \to \theta + k\theta_n$ при рассмотрении проблемы (2.1):

$$
\begin{aligned}
w_{\alpha_k}(q;\theta) &\equiv \exp\left[i\frac{\alpha_k\theta}{\theta_n}\right] w^0_{\alpha_k}(q;\theta) = \exp[-i(k-1)\theta]\, w^0_{\alpha_k}(q;\theta) \\
w^0_{\alpha_k}(q;\theta) &= \exp\left[-i\frac{\alpha_k\theta}{\theta_n}\right] w_{\alpha_k}(q;\theta) = \exp[-i(k-1)\theta]\, w_{\alpha_k}(q;\theta)
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Значение α_k является характеристикой собственных функций периодических задач, и в связи с этим значение этого параметра указывается в обозначениях собственных функций. Соответственно этому, собственные значения краевой задачи (2.1) также представляют собой некоторые зависимости от параметра α_k, т.е. $\lambda = \lambda(\alpha_k)$. Отметим, что $\lambda(\alpha_k)$ – периодическая функция параметра α_k, т.е. $\lambda(\alpha_k) = \lambda(\alpha_k + 2\pi k)$, $k = 1, 2, \ldots$, так как сдвигу параметра α_k на величины, кратные 2π, отвечают целочисленные повороты механической системы вокруг ее оси симметрии.

3. Декомпозиция. Представление собственных функций периодической краевой задачи в форме (2.16) позволяет существенно упростить анализ поведения рассматриваемой механической системы, сводя решение исходной задачи к ее решению в секторе $\Omega_0 : 0 \le \theta \le \theta_n$, где Ω_0 – элементарная ячейка исходной области $\Omega : 0 \le \theta \le 2\pi$. Значения собственных функций $w_{\alpha_k}(q;\theta)$ на границах элементарной ячейки $\theta = 0$ и $\theta = \theta_n$ генерируются условиями периодичности (2.13) и в случае дифференцируемости решений (2.1) по угловой переменной θ принимают вид

$$
w^{(s)}_{\alpha_k}(q;\theta_n) = \exp[i\alpha_k]\, w^{(s)}_{\alpha_k}(q;0), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.1}
$$

Порядок производных по переменной θ отмечается верхним индексом (s), записываемым в круглых скобках, причем максимальный порядок производной согласуется с операторами A и B.

В результате используемой декомпозиции [8] решение исходной задачи (2.1), определенной в области Ω, заменяется серией n краевых задач, определенных в элементарной ячейке Ω_0

$$
\begin{aligned}
&Aw_{\alpha_k}(q;\theta) = \lambda B w_{\alpha_k}(q;\theta), \quad k = 1, 2, \ldots, n \\
&w^{(s)}_{\alpha_k}(q;\theta_n) = \exp[i\alpha_k]\, w^{(s)}_{\alpha_k}(q;0), \quad s = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Отметим, что краевая задача о собственных значениях (3.2) является однопараметрической с параметром α_k, входящим в граничные условия и принимающим n дискретных значений. Собственные значения краевой задачи (3.2) можно интерпретировать как некоторые функции этого параметра. Относительно взаимного поведения этих функций можно высказать общее утверждение (см. [9, 10]), что для систем общего положения пересечение графиков этих функций невозможно при любых значениях α_k.

С использованием метода декомпозиции приведем также вариационную формулировку спектральных краевых задач (3.2). Будем исходить из вариационной формулировки первоначальной задачи на собственные значения (2.1)

$$
\lambda = \min_w \frac{(w, Aw)_\Omega}{(w, Bw)_\Omega} \tag{3.3}
$$

где w, удовлетворяет заданным условиям на границе Γ области Ω. Нижний индекс Ω указывает, что обозначаемое круглыми скобками в (3.3) скалярное произведение вычисляется в области Ω. Минимум отношения Рэлея в (3.3) разыскивается в классе функций, удовлетворяющих общему свойству (2.13) решений периодических задач. С учетом этого, числитель и знаменатель в (3.3) преобразуются к виду

$$\begin{gathered}(w(q;\theta), Aw(q;\theta))_{\Omega} \equiv \sum_{k=0}^{n-1}(w(q;\theta+k\theta_n), Aw(q;\theta+k\theta_n)) = \\ = \sum_{k=0}^{n-1}(w(q;\theta), Aw(q;\theta))_{\Omega_0} = n(w(q;\theta), Aw(q;\theta))_{\Omega_0}\end{gathered} \tag{3.4}$$

$$(w(q;\theta), Bw(q;\theta))_{\Omega} = n(w(q;\theta), Bw(q;\theta))_{\Omega_0} \tag{3.5}$$

где индексом Ω_0 отмечено, что выражение в скобках определяется в области $\Omega_0 : 0 \le \theta \le \theta_n$ (“элементарной ячейке”). С использованием равенств (3.4) и (3.5) в (3.3) приходим к декомпозированному выражению для собственного значения

$$\lambda = \min_{w}\frac{(w, Aw)_{\Omega_0}}{(w, Bw)_{\Omega_0}} \tag{3.6}$$

При этом на границах области $\Omega_0{:}\theta = 0, \theta = \theta_n$ значения искомой функции удовлетворяют условиям (3.2).

4. Устойчивость сжимаемого упругого кольца. В качестве примера применения развитых представлений и декомпозиции циклических систем рассмотрим задачу о сжатии и потере устойчивости кругового неразрезного упругого кольца, находящегося под равномерным давлением P и шарнирно закрепленного в точках $\theta_j = j\theta_n$, $\theta_n = 2\pi/n$, $j = 0,1,2,\ldots,n-1$ (рис. 1). Для описания упругого выпучивания кольца радиуса R (в недеформированном состоянии) и жесткости на изгиб EI воспользуемся уравнением и граничными условиями [11, 12]

$$\begin{gathered}\frac{d^4w}{d\theta^4} + \mu^2\frac{d^2w}{d\theta^2} = 0, \quad \mu^2 = 1 + \frac{PR^2}{EI}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi \\ w(j\theta_n) = 0, \quad j = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \quad \theta_n = \frac{2\pi}{n}\end{gathered} \tag{4.1}$$

С использованием переменной $\theta = \theta_n\tilde{\theta}$ (тильда в дальнейшем опускается) будем иметь

$$\frac{d^4w}{d\theta^4} + \lambda\frac{d^2w}{d\theta^2} = 0, \quad \lambda = \mu^2\theta_n^2, \quad 0 < \theta < 1 \tag{4.2}$$

Граничные условия для используемой элементарной ячейки запишутся в виде

$$\begin{gathered}w(0) = 0, \quad w(1) = 0 \\ \frac{dw}{d\theta}(1) = e^{i\alpha}\frac{dw}{d\theta}(0), \quad \frac{d^2w}{d\theta^2}(1) = e^{i\alpha}\frac{d^2w}{d\theta^2}(0), \quad 0 \le \alpha \le 2\pi\end{gathered} \tag{4.3}$$

Удовлетворяя общее решение дифференциального уравнения (4.2)

$$w(\theta) = C_1\cos\left(\sqrt{\lambda}\theta\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\lambda}\theta\right) + C_3\theta + C_4 \tag{4.4}$$

граничным условиям краевой задачи (4.3), стандартным образом приходим к уравнению для определения критических сил потери устойчивости

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} - \sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} - \sin\sqrt{\lambda}} \equiv f(\lambda) \tag{4.5}$$

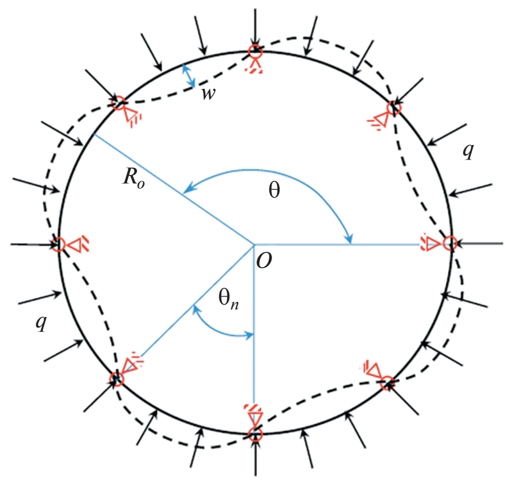

Рис. 1. Потеря устойчивости неразрезного кольца.

Так как $|\cos\alpha| \le 1$, то критические силы потери устойчивости удовлетворяют условию $|f(\lambda)| \le 1$.

Непосредственные вычисления приводят к уравнениям для определения границ спектральных полос

$$f(\lambda) = -1: \quad \sqrt{\lambda}\left(1 + \cos\sqrt{\lambda}\right) = 2\sin\sqrt{\lambda} \tag{4.6}$$

$$f(\lambda) = 1: \quad \sqrt{\lambda}\left(\cos\sqrt{\lambda} - 1\right) = 0 \tag{4.7}$$

Уравнению (4.6) удовлетворяют корни уравнений

$$\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) = 0, \quad \tan\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}$$

а уравнение (4.7) имеет решение

$$\sqrt{\lambda_k} = 2k\pi, \quad k \neq 0$$

Решение $\lambda = 0$ исключается из рассмотрения.

Таким образом, спектр критических сил потери устойчивости неразрезного упругого кольца, сжатого равномерным давлением и шарнирно закрепленного в равноотстоящих точках, состоит из полос с непрерывным спектром. Нижние границы полос описываются выражением

$$\sqrt{\lambda_k} = (2k+1)\pi, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.8}$$

а верхние границы полос определяются корнями уравнения $\tan\left(\sqrt{\lambda}/2\right) = \sqrt{\lambda}/2$ с асимптотическим представлением

$$\sqrt{\lambda_k} = (2k+1)\pi - 2\varepsilon_k \tag{4.9}$$

где $\varepsilon_k \approx 2/(2k+1)\pi$ при $k \gg 1$. Расстояние между границами соседних полос $\Delta\lambda_k = 2\varepsilon_k$ с ростом k стремится к нулю.

5. Заключение и некоторые замечания. В работе представлены результаты исследования задач о спектре циклических систем, описываемых краевыми задачами на собственные значения. В предположении об инвариантности определяющих соотношений относительно поворота на углы, кратные периоду аргумента, и ограниченности решения спектральной задачи получены представления для собственных функций в случае простого и кратного собственных значений.

Представлена декомпозиция собственных функций, упрощающая анализ поведения рассматриваемой механической системы за счет сведения решения исходной задачи к ее решению на элементарной ячейке. С использованием метода декомпозиции дана также вариационная формулировка рассматриваемой задачи на собственные значения.

На примере рассмотрения задачи об устойчивости сжимаемого упругого кольца показана эффективность применения развитых представлений и декомпозиции циклических систем. Приведем некоторые замечания.

Замечание 1. Континуальные механические системы характеризуются наличием оси симметрии n-го порядка, при вращении вокруг которой на углы, кратные углу $2\pi/n$, эти системы совмещаются сами с собой. При $n \to \infty$ циклические системы трансформируются в системы с круговой симметрией.

Замечание 2. Данная работа посвящена циклическим механическим системам. Другим видом периодических систем служат трансляционно-инвариантные системы, являющиеся бесконечно протяженными и используемыми в качестве асимптотических моделей реальных механических объектов, находящихся в условиях свободных колебаний или в состоянии потери устойчивости при сжатии. Общие представления для трансляционно-инвариантных систем, включая собственные функции и собственные значения, получаются из представленных в работе для циклических систем заменой угла θ на осевую координату x и периода θ_n на параметр периодичности a, фигурирующий в операции сдвига системы: $x \to x + a$.

Замечание 3. Помимо трансляционно-инвариантных и циклических систем к инвариантным относятся также случаи, когда операторы A и B, а также и решение спектральной задачи w характеризуются инверсией относительно операции $x \to a - x$ (инверсионный случай). В частности, условия инверсии выполняются, когда операторы A и B содержат только четные производные по x, а варьируемые коэффициенты задачи являются четными функциями аргумента $a/2 - x$. При наличии данной инверсии вводится функция $\hat{w}(q;x) \equiv w(q;a-x)$, удовлетворяющая уравнению

$$A\hat{w}(q;x) = \lambda B\hat{w}(q;x)$$

и учитываются граничные условия. При этом

$$\hat{w}(q;a) = w(q;0) = \exp[-i\alpha_k]w(q;a) = \exp[-i\alpha_k]\hat{w}(q;x)$$

и в результате имеем представление для уравнения и производных

$$A\hat{w}_{\alpha_k}(q;x) = \lambda B\hat{w}_{\alpha_k}(q;x), \quad \alpha_k = \alpha a$$
$$\hat{w}^{(s)}_{\alpha_k}(q;x) = \exp[-i\alpha_k]\hat{w}^{(s)}_{\alpha_k}(q;0)$$

Опуская проведенные дальнейшие элементарные операции (включая операции комплексного сопряжения), приходим к представлениям

$$w_\alpha(q;x) = u_\alpha(q;x) + iv_\alpha(q;x)$$
$$u_\alpha(q;x) = \operatorname{Re} w_\alpha(q;x), \quad v_\alpha(q;x) = \operatorname{Im} w_\alpha(q;x)$$
$$u_\alpha(q;a-x) \equiv u_\alpha(q;x), \quad v_\alpha(q;a-x) = -v_\alpha(q;x)$$

где вещественная часть функции $w_\alpha(q;x)$ является четной, а мнимая часть — нечетной по отношению к $x = a/2$. Это позволяет уменьшить число операций, используя переходы к интервалам $x \in [0,a/2]$ или $x \in [a/2,a]$.

Автор благодарит А.А. Барсука и С.Ю. Иванову за полезные обсуждения и помощь в оформлении статьи.

Работа выполнена по теме госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 20-08-00082а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
2. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1984. 488 с.
3. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1984. 381 с.
4. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971. 272 с.
5. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
7. *Евграфов М.А.* Аналитические функции. М.: Наука, 1968. 472 с.
8. *Баничук Н.В., Барсук А.А.* Применение декомпозиции спектра собственных значений в задачах оптимизации / Проблемы устойчивости предельной несущей способности конструкций. Л.: ЛИСИ, 1983. С. 17–24.
9. *Арнольд В.И.* Моды и квазимоды // Функциональный анализ и его приложения. 1972. Т. 6. № 2. С. 12–20.
10. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
11. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. М.: Госиздат, 1955. 568 с.
12. *Томпсон Дж.М.Т.* Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 254 с.