ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2022, № 6, с. 104–113

УДК 539.4

К ТЕОРИИ КОВАРИАНТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДВУХТОЧЕЧНЫХ ПСЕВДОТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

Е. В. Мурашкин[a],*, Ю. Н. Радаев[a],**

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
**e-mail: evmurashkin@gmail.com*
***e-mail: radayev@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 09.06.2022 г.
После доработки 10.07.2022 г.
Принята к публикации 11.08.2022 г.

В настоящей работе обсуждаются вопросы ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензорных полей произвольных рангов и весов. Приводятся необходимые сведения из алгебры и анализа псевдотензоров. Вводится понятие двухточечного псевдотензорного поля, основанного на формуле его преобразования при замене систем координат. Приводится формула преобразования двухточечного псевдотензорного поля к двухточечному абсолютному тензорному полю. Вводятся определения полных и неполных операторов частного и ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензоров. Получены формулы для ковариантных производных двухточечного псевдотензорного поля. Отмечаются важные примеры двухточечных псевдотензорных полей из нелинейной механики деформируемого твердого тела.

Ключевые слова: двухточечный псевдотензор, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, ковариантная производная, полный оператор Гамильтона

DOI: 10.31857/S0572329922060149

Вводные замечания и предварительные сведения. Двухточечные тензоры играют исключительно важную роль в нелинейной механике континуума [1–4]. К таким тензорам относятся градиент деформации,[1] тензор конечного поворота, тензор силовых напряжений Пиола–Кирхгофа и т.д. Некоторые из таких полей имеют псевдотензорную природу.[2] Без последовательного использования псевдотензорного формализма двухточечных полей невозможно корректное построение моделей гемитропных микрополярных упругих континуумов [6–8]. Поиск сведений о правилах ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензорных полей представляет довольно сложную задачу. Цель настоящего исследования восполнить этот пробел.

В настоящей работе вначале приводятся минимально необходимые сведения из алгебры и анализа псевдотензоров. Вводится понятие двухточечного псевдотензорного поля, основанного на формуле его преобразования при замене систем координат. Приводятся определения полных и неполных операторов частного и ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензоров. Получены формулы для ковариантных производных двухточечного псевдотензорного поля. Более глубокое и полное

---

[1] Транспонированный градиент деформации называется дисторсией.
[2] Как можно увидеть при прочтении монографии [5, p. 142] даже тензор силовых напряжений Коши с самого начала можно считать аффинорной плотностью веса +1, которую по стандартному алгоритму всегда можно свести к абсолютному тензору.

изложение подходов псевдотензорного формализма можно найти в книгах по тензорному анализу и механике сплошных сред [1, 5, 9—12]. Основы алгебры и анализа абсолютных двухточечных тензорных полей (two-point (double) tensor fields) можно найти в дополнении к работе [1], написанном Эриксеном. В работах [6—8, 13, 14] рассматривались правила ковариантного дифференцирования одноточечных псевдотензорных полей, используемых к механике микрополярных континуумов и механике растущих тел.

Содержание статьи можно охарактеризовать следующим образом. В первом разделе работы приводятся основные сведения о псевдотензорах. Вводится понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра. Даются определения обобщенной дельты Кронекера и символов перестановок. Приводится формула преобразования псевдотензора произвольного веса и ранга к абсолютному тензору того же самого ранга.

Второй раздел статьи посвящен понятию двухточечного псевдотензорного поля. Дается формальное определение двухточечного псевдотензорного поля, основанное на формуле его преобразования при замене обоих систем координат. Приводится формула преобразования двухточечного псевдотензорного поля к двухточечному абсолютному тензорному полю.

В третьем разделе статьи обсуждаются вопросы частного и ковариантного дифференцирований двухточечных псевдотензорных полей. Вводятся определения полных и неполных операторов Гамильтона, операторов частного и ковариантного дифференцирований двухточечных псевдотензоров. Обсуждаются формулы, связывающие полные и неполные ковариантные производные двухточечного псевдотензорного поля.

1. Необходимые сведения из алгебры и анализа псевдотензоров в евклидовом пространстве. Рассмотрим N-мерное евклидово пространство. Его единственной ориентационной характеристикой является фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр e [6—8], который в N-мерном пространстве можно определить как косое произведение [15, с. 63—65] абсолютных векторов ковариантного базиса

$$\lceil \underset{1}{\imath}, \underset{2}{\imath}, \ldots, \underset{N}{\imath} \rfloor = e \tag{1.1}$$

Ясно, что $\overset{[+1]}{e} > 0$ для правоориентированной системы координат, а $\overset{[+1]}{e} < 0$ — для левоориентированной, т.е. $\operatorname{sgn} e$ является единственным признаком, ориентирующим евклидово пространство.

Несложно показать, что в евклидовом пространстве справедливо соотношение

$$e^2 = g \tag{1.2}$$

где g — детерминант, составленный из компонент метрического тензора.

Одним из фундаментальных объектов многомерной геометрии является абсолютный тензор $\boldsymbol{\delta}^{j_1 j_2 \ldots j_M}_{i_1 i_2 \ldots i_M}$, называемый обобщенной дельтой Кронекера. $\boldsymbol{\delta}^{j_1 j_2 \ldots j_M}_{i_1 i_2 \ldots i_M}$ можно определить в N-мерном пространстве для $M \le N$ согласно правилу

$$\boldsymbol{\delta}^{j_1 j_2 \ldots j_M}_{i_1 i_2 \ldots i_M} = \begin{cases} +1, & \text{если } j_1, j_2, \ldots, j_M \text{ различные натуральные числа} \\ & 1, 2, \ldots, N \text{ и если } i_1, i_2, \ldots, i_M \text{ есть четная} \\ & \text{перестановка } j_1, j_2, \ldots, j_M \\ -1, & \text{если } j_1, j_2, \ldots, j_M \text{ различные натуральные числа} \\ & 1, 2, \ldots, N \text{ и если } i_1, i_2, \ldots, i_M \text{ есть нечетная} \\ & \text{перестановка } j_1, j_2, \ldots, j_M \\ -0, & \text{во всех остальных случаях} \end{cases} \tag{1.3}$$

С помощью тензора $\boldsymbol{\delta}^{j_1 j_2 \ldots j_M}_{i_1 i_2 \ldots i_M}$ можно легко вычислить символы перестановок:

1. относительный ковариантный N-вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1 i_2 \ldots i_N}$ веса -1

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1 i_2 \ldots i_N} = \boldsymbol{\delta}^{12\ldots N}_{i_1 i_2 \ldots i_N} \tag{1.4}$$

2. относительный контравариантный N-вектор $\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_N}$ веса $+1$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{i_1 i_2 \ldots i_N} = \boldsymbol{\delta}^{i_1 i_2 \ldots i_N}_{12\ldots N} \tag{1.5}$$

В трехмерном пространстве справедливо

$$e = \overset{[+1]}{e}_{123} = \lceil \underset{1}{\imath}, \underset{2}{\imath}, \underset{3}{\imath} \rfloor = (\underset{1}{\imath} \times \underset{2}{\imath}) \cdot \underset{3}{\imath} \tag{1.6}$$

Псевдотензоры произвольного веса легко преобразовывать в абсолютные тензоры при помощи фундаментального ориентирующиего псевдоскаляра e (см. [6–8]. Для произвольного псевдотензора целого веса w и ранга n имеем

$$\underset{(n)}{T}{}^{pqr\ldots s}_{\cdots\cdots ij\ldots l} = e^{-w} \underset{(n)}{\overset{[w]}{T}}{}^{pqr\ldots s}_{\cdots\cdots ij\ldots l} \tag{1.7}$$

Здесь и далее в квадратных скобках сверху корневого символа будем указывать вес псевдотензорного поля, а в круглых скобках снизу – ранг.

Отметим, что равенство (1.7) позволяет обобщить алгебраическую теорему Гамильтона–Кэли, что было продемонстрировано в [14].

Заметим также, что (1.7) отнюдь не единственная схема приведения псевдотензора к абсолютному тензору см. например [9, с. 174].

2. Определение двухточечных псевдотензорных полей. Введем в евклидовом пространстве две системы координат X^α и x^s. Обе системы координат считаются равноправными, однако, в дальнейшем, следуя терминологии нелинейной механики континуума, будем называть одну из них X^α отсчетной (лагранжевой), а вторую x^s – пространственной (эйлеровой). Греческие и латинские индексы будут ассоциироваться с отсчетными X^α и пространственными x^s координатами.[3] Обозначим через $'\underset{\alpha}{\imath}$ и $\underset{s}{\imath}$ векторы ковариантных базисов, а через $'e$ и e – фундаментальные ориентирующие псевдоскаляры. Будем считать заданными метрические тензоры $'g_{\alpha\gamma} = '\underset{\alpha}{\imath} \cdot '\underset{\gamma}{\imath}$ и $g_{sk} = \underset{s}{\imath} \cdot \underset{k}{\imath}$ соответственно введенным системам координат.

Двухточечный псевдотензор с корневым символом T рангов $'n$ и n с весами $'w$ и w будет зависеть от пары переменных X^α и x^s и его компоненты будут содержать как латинские, так и греческие индексы (см. рис. 1):

$$\underset{('n,n)}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\ldots s\qquad \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdots\cdots ij\ldots k\cdots\cdots\lambda\mu\ldots\nu}$$

Для одноточечного псевдтензорного поля используется упрощенная запись

$$\underset{(n)}{\overset{[w]}{T}}{}^{pqr\ldots s}_{\cdots\cdots ij\ldots l} \tag{2.1}$$

При переходе к другим системам координат $x^{\underline{s}}(\underline{s} = 1,2,\ldots,N)$ и $X^{\underline{\alpha}}(\underline{\alpha} = 1,2,\ldots,N)$ компоненты двухточечного псевдотензора преобразуются согласно правилу

[3] Для обозначения индексов отсчетных координат в ранних работах школы рациональной механики [1] использовались прописные латинские буквы K, L, M вместо греческих. Впоследствии Трусделл [2] перешел к использованию букв греческого алфавита.

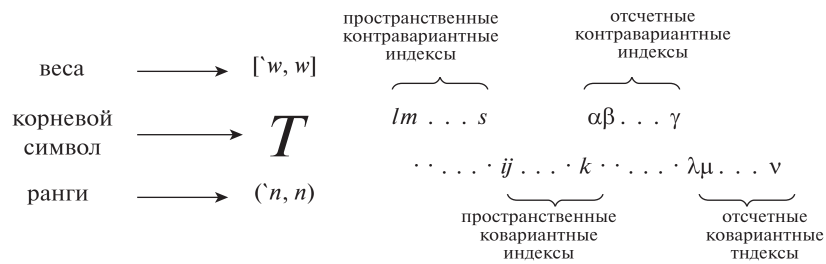

Рис. 1. Визуализация двухточечного псевдотензора.

$$\overset{['w,w]}{\underset{('n,n)}{\underline{T}}}{}^{\underline{l}\,\underline{m}\ldots\underline{s}\quad \underline{\alpha}\,\underline{\sigma}\ldots\underline{\tau}}_{\cdot\cdot\ldots\cdot\underline{i}\,\underline{h}\ldots\underline{k}\cdot\cdot\ldots\cdot\underline{\lambda}\,\underline{\kappa}\ldots\underline{\nu}} = [\det(\partial_{\underline{\beta}}X^{\gamma})]^{'w}[\det(\partial_{\underline{p}}x^{q})]^{w}\times$$
$$\times(\partial_l x^{\underline{l}})(\partial_m x^{\underline{m}})\cdots(\partial_s x^{\underline{s}})(\partial_{\underline{i}}x^{i})(\partial_{\underline{h}}x^{h})\cdots(\partial_{\underline{k}}x^{k})\times \tag{2.2}$$
$$\times(\partial_\alpha x^{\underline{\alpha}})(\partial_\sigma x^{\underline{\sigma}})\cdots(\partial_\tau x^{\underline{\tau}})(\partial_{\underline{\lambda}}x^{\lambda})(\partial_{\underline{\kappa}}x^{\kappa})\cdots(\partial_{\underline{\nu}}x^{\nu})\overset{['w,w]}{\underset{('n,n)}{T}}{}^{lm\ldots s\quad \alpha\sigma\ldots\tau}_{\cdot\cdot\ldots\cdot ih\ldots k\cdot\cdot\ldots\cdot\lambda\kappa\ldots\nu}$$

где

$$\partial_h=\frac{\partial}{\partial x^h},\quad \partial_{\underline{h}}=\frac{\partial}{\partial x^{\underline{h}}},\quad \partial_\alpha=\frac{\partial}{\partial X^\alpha},\quad \partial_{\underline{\alpha}}=\frac{\partial}{\partial X^{\underline{\alpha}}}$$

а веса $'w$ и w — целые числа.

Двухточечные псевдотензоры преобразуются в абсолютные при помощи фундаментальных ориентирующих псевдоскаляров $'e$ и e согласно правилу

$$\underset{('n,n)}{T}{}^{lm\ldots s\quad \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu} = {}'e^{-'w}e^{-w}\overset{['w,w]}{\underset{('n,n)}{T}}{}^{lm\ldots s\quad \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu} \tag{2.3}$$

3. Дифференцирование двухточечных псевдотензорных полей. Введем следующие обозначения для частных (неполных) производных по явному вхождению переменных X^α и x^k:

$$\partial_\alpha^{\mathrm{expl}},\quad \partial_k^{\mathrm{expl}}$$

С этого момента будем считать, что рассматриваемые системы координат связаны между собой с помощью преобразования деформации

$$X^\alpha \rightleftarrows x^i$$

Прямое описание деформации континуума соответствует преобразованию

$$X^\alpha \to x^i$$

а обратное описание[4] задается преобразованием

$$X^\alpha \leftarrow x^i$$

Равноправие способов описания деформации мы будем отражать с помощью обозначения

[4] В современной механике континуума наряду с прямым описанием $X^\alpha \to x^i$, используется обратное описание $x^i \to X^\alpha$ (inversed motion description) [3]. Отметим, что обратное описание деформации было введено в механику Пиола (G. Piola).

$$X^\alpha \rightleftarrows x^i$$

Полное (total) дифференцирование подразумевает вычисление производных не только по явным (explicit) вхождениям переменных, но и по неявным, определяемым преобразованием деформации. Полные производные по переменным X^α и x^k обозначим через

$$\partial_\alpha^{\text{total}}, \quad \partial_k^{\text{total}}$$

Отметим, что в теориях поля [16, 17] для сокращения записи уравнений поля для полных производных используют обычные обозначения

$$\partial_\alpha \equiv \partial_\alpha^{\text{total}}, \quad \partial_k \equiv \partial_k^{\text{total}}$$

В частности для дивергенции одноточечного псевдотензорного поля заданного веса (например для тензора силовых напряжений Коши ($w = +1$) [5, p. 142)] справедливо равенство:

$$\partial_k \underset{(2)}{\overset{[+1]}{T}}{}^{ki} = \partial_k^{\text{total}} \underset{(2)}{\overset{[+1]}{T}}{}^{ki}$$

Полные и неполные производные связаны соотношениями

$$\partial_\alpha^{\text{total}} = \partial_\alpha^{\text{expl}} + (\partial_\alpha x^k)\partial_k^{\text{expl}} \tag{3.1}$$

$$\partial_k^{\text{total}} = \partial_k^{\text{expl}} + (\partial_k X^\alpha)\partial_\alpha^{\text{expl}} \tag{3.2}$$

Неполные операторы Гамильтона определяются согласно

$${}'\boldsymbol{\nabla}^{\text{expl}} = {}'\overset{\alpha}{\imath}\,\partial_\alpha^{\text{expl}} \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^{\text{expl}} = \overset{k}{\imath}\,\partial_k^{\text{expl}} \tag{3.4}$$

Определим неполные отсчетный и пространственный градиенты двухточечного псевдотензорного поля произвольных рангов и весов $'w, w$ с помощью соотношений [13]:

$$\begin{aligned} &{}'e^{'w}\,{}'\boldsymbol{\nabla}^{\text{expl}} \otimes {}'e^{-'w} \underset{('n,n)}{\overset{['w,w]}{\mathbf{T}}} = {}'e^{'w}\,{}'\overset{\sigma}{\imath} \otimes \partial_\sigma^{\text{expl}}\Big({}'e^{-'w} \underset{('n,n)}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\ldots s\;\;\;\alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu} \times \\ &\times \underset{l}{\imath} \otimes \cdots \otimes \underset{s}{\imath} \otimes \overset{i}{\imath} \otimes \cdots \otimes \overset{k}{\imath} \otimes {}'\underset{\alpha}{\imath} \otimes \cdots \otimes {}'\underset{\gamma}{i} \otimes {}'\overset{\lambda}{i} \otimes \cdots \otimes {}'\overset{\nu}{\imath}\Big) \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} &e^{w}\nabla^{\text{expl}} \otimes e^{-w} \underset{('n,n)}{\overset{['w,w]}{\mathbf{T}}} = e^{w}\,\overset{p}{\imath} \otimes \partial_p^{\text{expl}}\Big(e^{-w} \underset{('n,n)}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\ldots s\;\;\;\alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu} \times \\ &\times \underset{l}{\imath} \otimes \cdots \otimes \underset{s}{\imath} \otimes \overset{i}{\imath} \otimes \cdots \otimes \overset{k}{\imath} \otimes {}'\underset{\alpha}{\imath} \otimes \cdots \otimes {}'\underset{\gamma}{\imath} \otimes {}'\overset{\lambda}{\imath} \otimes \cdots \otimes {}'\overset{\nu}{\imath}\Big) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Преобразуем формулы (3.5) и (3.6) с учетом хорошо известных зависимостей

$$\partial_\nu^{\text{expl}}\,{}'\overset{\mu}{\imath} = -{}'\Gamma^\mu_{\alpha\nu}\,{}'\overset{\alpha}{\imath}, \quad \partial_\nu^{\text{expl}}\,{}'\underset{\mu}{\imath} = {}'\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,\underset{\alpha}{\imath}, \quad \frac{\partial_\alpha^{\text{expl}}\,{}'e}{{}'e} = {}'\Gamma^\nu_{\alpha\nu} \tag{3.7}$$

$$\partial_p^{\text{expl}}\,\overset{m}{\imath} = -\Gamma^m_{sp}\,\overset{s}{\imath}, \quad \partial_p^{\text{expl}}\,\underset{m}{\imath} = \Gamma^s_{mp}\,\underset{s}{\imath}, \quad \frac{\partial_p^{\text{expl}} e}{e} = \Gamma^s_{ps} \tag{3.8}$$

В результате несложных преобразований получим

$$
\begin{gathered}
e^{w}\nabla^{\mathrm{expl}}\otimes e^{-w}\underset{('n,n)}{\overset{['w,w]}{\mathbf{T}}} = e^{w}\overset{p}{\iota}\otimes\partial_p^{\mathrm{expl}}\Big(e^{-w}\underset{('n,n)}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\dots s\quad\alpha\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots k\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\nu}\times\\
\times\underset{l}{\iota}\otimes\dots\otimes\underset{s}{\iota}\otimes\overset{i}{\iota}\otimes\dots\otimes\overset{k}{\iota}\otimes{}'\underset{\alpha}{\iota}\otimes\dots\otimes{}'\underset{\gamma}{\iota}\otimes{}'\overset{\lambda}{\iota}\otimes\dots\otimes{}'\overset{\nu}{\iota}\Big)=\\
=\Big(\partial_p^{\mathrm{expl}}\underset{('n,n)}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\dots s\quad\alpha\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots k\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\nu}-w\underset{('n,n)}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\dots s\quad\alpha\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots k\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\nu}\Gamma^{q}_{pq}\Big)\times\\
\times\overset{p}{\iota}\otimes\underset{l}{\iota}\otimes\dots\otimes\underset{s}{\iota}\otimes\overset{i}{\iota}\otimes\dots\otimes\overset{k}{\iota}\otimes{}'\underset{\alpha}{\iota}\otimes\dots\otimes{}'\underset{\gamma}{\iota}\otimes{}'\overset{\lambda}{\iota}\otimes\dots\otimes{}'\overset{\nu}{\iota}+\\
+\underset{('n,n)}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\dots s\quad\alpha\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots k\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\nu}\Gamma^{q}_{lp}\times\\
\times\overset{p}{\iota}\otimes\underset{q}{\iota}\otimes\dots\otimes\underset{s}{\iota}\otimes\overset{i}{\iota}\otimes\dots\otimes\overset{k}{\iota}\otimes{}'\underset{\alpha}{\iota}\otimes\dots\otimes{}'\underset{\gamma}{\iota}\otimes{}'\overset{\lambda}{\iota}\otimes\dots\otimes{}'\overset{\nu}{\iota}+\dots+\\
+\underset{('n,n)}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\dots s\quad\alpha\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots k\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\nu}\Gamma^{q}_{sp}\times\\
\times\overset{p}{\iota}\otimes\underset{l}{\iota}\otimes\dots\otimes\underset{q}{\iota}\otimes\overset{i}{\iota}\otimes\dots\otimes\overset{k}{\iota}\otimes{}'\underset{\alpha}{\iota}\otimes\dots\otimes{}'\underset{\gamma}{\iota}\otimes{}'\overset{\lambda}{\iota}\otimes\dots\otimes{}'\overset{\nu}{\iota}-\\
-\underset{('n,n)}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\dots s\quad\alpha\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots k\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\nu}\Gamma^{i}_{pq}\times\\
\times\overset{p}{\iota}\otimes\underset{l}{\iota}\otimes\dots\otimes\underset{s}{\iota}\otimes\overset{q}{\iota}\otimes\dots\otimes\overset{k}{\iota}\otimes{}'\underset{\alpha}{\iota}\otimes\dots\otimes{}'\underset{\gamma}{\iota}\otimes{}'\overset{\lambda}{\iota}\otimes\dots\otimes{}'\overset{\nu}{\iota}-\dots-\\
-\underset{('n,n)}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\dots s\quad\alpha\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots k\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\nu}\Gamma^{k}_{pq}\times\\
\times\overset{p}{\iota}\otimes\underset{l}{\iota}\otimes\dots\otimes\underset{s}{\iota}\otimes\overset{i}{\iota}\otimes\dots\otimes\overset{q}{\iota}\otimes{}'\underset{\alpha}{\iota}\otimes\dots\otimes{}'\underset{\gamma}{\iota}\otimes{}'\overset{\lambda}{\iota}\otimes\dots\otimes{}'\overset{\nu}{\iota}
\end{gathered}
\tag{3.9}
$$

На основании (3.9) заключаем, что неполная ковариантная производная по координатам x^p определяется согласно

$$
\begin{gathered}
\nabla_p^{\mathrm{expl}}\underset{['n,n]}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\dots s\quad\alpha\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots k\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\nu}=\partial_p^{\mathrm{expl}}\underset{['n,n]}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\dots s\quad\alpha\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots k\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\nu}+\underset{['n,n]}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{qm\dots s\quad\alpha\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots k\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\nu}\Gamma^{l}_{qp}+\dots+\\
+\underset{['n,n]}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\dots q\quad\alpha\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots k\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\nu}\Gamma^{s}_{qp}-\underset{['n,n]}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\dots s\quad\alpha\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots qj\dots k\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\nu}\Gamma^{q}_{ip}-\dots-\underset{['n,n]}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\dots s\quad\alpha\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots q\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\nu}\Gamma^{q}_{kp}-\\
-w\underset{['n,n]}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\dots s\quad\alpha\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots k\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\nu}\Gamma^{q}_{qp}
\end{gathered}
\tag{3.10}
$$

Аналогично, вычисляется неполная ковариантная производная по координатам X^σ

$$
\begin{gathered}
{}'\nabla_\sigma^{\mathrm{expl}}\underset{['n,n]}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\dots q\quad\alpha\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots k\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\nu}=\partial_\sigma^{\mathrm{expl}}\underset{['n,n]}{\overset{[',w]}{T}}{}^{lm\dots q\quad\alpha\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots k\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\nu}+\underset{['n,n]}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\dots q\quad\varsigma\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots k\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\nu}{}'\Gamma^{\alpha}_{\varsigma\sigma}+\dots+\\
+\underset{['n,n]}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\dots q\quad\alpha\beta\dots\varsigma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots k\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\nu}{}'\Gamma^{\gamma}_{\varsigma\sigma}-\underset{['n,n]}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\dots q\quad\alpha\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots k\cdot\cdot\dots\varsigma\mu\dots\nu}{}'\Gamma^{\varsigma}_{\lambda\sigma}-\dots-\underset{['n,n]}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\dots q\quad\alpha\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots k\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\varsigma}{}'\Gamma^{\varsigma}_{\nu\sigma}-\\
-{}'w\underset{['n,n]}{\overset{['w,w]}{T}}{}^{lm\dots q\quad\alpha\beta\dots\gamma}_{\cdot\cdot\dots ij\dots k\cdot\cdot\dots\lambda\mu\dots\nu}{}'\Gamma^{\varsigma}_{\varsigma\sigma}
\end{gathered}
\tag{3.11}
$$

Полные операторы Гамильтона определяются соотношениями

$$'\boldsymbol{\nabla}^{\text{total}} = \overset{\alpha}{'\iota}\partial_{\alpha}^{\text{total}}, \quad \boldsymbol{\nabla}^{\text{total}} = \overset{k}{\iota}\partial_{k}^{\text{total}} \tag{3.12}$$

Заметим, например, что для дивергенции одноточечного псевдотензорного поля (например, псевдотензора веса +1 силовых напряжений Коши) справедливы равенства

$$\nabla_k \overset{[+1]}{\underset{(2)}{T}}{}^{ki} = \nabla_k^{\text{total}} \overset{[+1]}{\underset{(2)}{T}}{}^{ki}$$

играющие особенно важную роль в теориях поля [16, 17].

Полные отсчетный и пространственный градиенты двухточечного псевдотензорного поля произвольных рангов $'n, n$ и весов $'w, w$ определяются с помощью соотношений [13]:

$$\begin{gathered}'e^{'w}e^{w}\,'\boldsymbol{\nabla}^{\text{total}} \otimes {}'e^{-'w}e^{-w} \overset{['w,w]}{\underset{('n,n)}{\mathbf{T}}} = {}'e^{'w}e^{w}\,\overset{\sigma}{'\iota} \otimes \partial_{\sigma}^{\text{total}}({}'e^{-'w}e^{-w} \overset{['w,w]}{\underset{('n,n)}{T}}{}^{lm\ldots s}{}_{\cdot\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\cdot\ldots\cdot}{}^{\alpha\beta\ldots\gamma}{}_{\lambda\mu\ldots\nu}\times \\ \times \underset{l}{\iota} \otimes \cdots \otimes \underset{s}{\iota} \otimes \overset{i}{\iota} \otimes \cdots \otimes \overset{k}{\iota} \otimes \underset{\alpha}{'\iota} \otimes \cdots \otimes \underset{\gamma}{'\iota} \otimes \overset{\lambda}{'\iota} \otimes \cdots \otimes \overset{\nu}{'\iota})\end{gathered} \tag{3.13}$$

$$\begin{gathered}'e^{'w}e^{w}\boldsymbol{\nabla}^{\text{total}} \otimes {}'e^{-'w}e^{-w} \overset{['w,w]}{\underset{('n,n)}{\mathbf{T}}} = {}'e^{'w}e^{w}\,\overset{p}{\iota} \otimes \partial_{p}^{\text{total}}({}'e^{-'w}e^{-w} \overset{['w,w]}{\underset{('n,n)}{T}}{}^{lm\ldots s}{}_{\cdot\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\cdot\ldots\cdot}{}^{\alpha\beta\ldots\gamma}{}_{\lambda\mu\ldots\nu}\times \\ \times \underset{l}{\iota} \otimes \cdots \otimes \underset{s}{\iota} \otimes \overset{i}{\iota} \otimes \cdots \otimes \overset{k}{\iota} \otimes \underset{\alpha}{'\iota} \otimes \cdots \otimes \underset{\gamma}{'\iota} \otimes \overset{\lambda}{'\iota} \otimes \cdots \otimes \overset{\nu}{'\iota})\end{gathered} \tag{3.14}$$

В случае двухвалетного псевдотензора $\overset{['w,w]}{\underset{(1,1)}{\mathbf{S}}}$ можно получить:

$$\begin{gathered}'e^{'w}e^{w}\,'\boldsymbol{\nabla}^{\text{total}} \otimes {}'e^{-'w}e^{-w} \overset{['w,w]}{\underset{(1,1)}{\mathbf{S}}} = {}'e^{'w}\,\overset{\sigma}{'\iota} \otimes \partial_{\sigma}^{\text{expl}}({}'e^{-'w} \overset{['w,w]}{\underset{(1,1)}{S}}{}^{\alpha m}\,{}'\underset{\alpha}{\iota} \otimes \underset{m}{\iota}) + \\ + \partial_\sigma x^p e^{w}\,\overset{\sigma}{'\iota} \otimes \partial_{p}^{\text{expl}}(e^{-w} \overset{['w,w]}{\underset{(1,1)}{S}}{}^{\alpha m}\,{}'\underset{\alpha}{\iota} \otimes \underset{m}{\iota}) = ({}'\nabla_{\sigma}^{\text{expl}} \overset{['w,w]}{\underset{(1,1)}{S}}{}^{\alpha m})\,\overset{\sigma}{'\iota} \otimes \underset{\alpha}{'\iota} \otimes \underset{m}{\iota} + \\ + (\partial_\sigma x^p \nabla_{p}^{\text{expl}} \overset{['w,w]}{\underset{(1,1)}{S}}{}^{\alpha m})\,\overset{\sigma}{'\iota} \otimes \underset{\alpha}{'\iota} \otimes \underset{m}{\iota} = ({}'\nabla_{\sigma}^{\text{total}} \overset{['w,w]}{\underset{(1,1)}{S}}{}^{\alpha m})\,\overset{\sigma}{'\iota} \otimes \underset{\alpha}{'\iota} \otimes \underset{m}{\iota}\end{gathered} \tag{3.15}$$

Отметим, что дивергентные слагаемые $'\nabla_{\alpha}^{\text{total}} S^{\alpha m}$ возникают в записи уравнений баланса импульса в отсчетной конфигурации, где $S^{\alpha m}$ – первый тензор силовых напряжений Пиола–Кирхгофа.

Подставив выражение (3.1) в формулу (3.13) и найдем

$$\begin{gathered}'e^{'w}e^{w}\,'\boldsymbol{\nabla}^{\text{total}} \otimes {}'e^{-'w}e^{-w} \overset{['w,w]}{\underset{('n,n)}{\mathbf{T}}} = {}'e^{'w}\,\overset{\sigma}{'\iota} \otimes \partial_{\sigma}^{\text{expl}}({}'e^{-'w} \overset{['w,w]}{\underset{('n,n)}{T}}{}^{lm\ldots s}{}_{\cdot\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\cdot\ldots\cdot}{}^{\alpha\beta\ldots\gamma}{}_{\lambda\mu\ldots\nu}\times \\ \times \underset{l}{\iota} \otimes \cdots \otimes \underset{s}{\iota} \otimes \overset{i}{\iota} \otimes \cdots \otimes \overset{k}{\iota} \otimes \underset{\alpha}{'\iota} \otimes \cdots \otimes \underset{\gamma}{'\iota} \otimes \overset{\lambda}{'\iota} \otimes \cdots \otimes \overset{\nu}{'\iota}) + \\ + \partial_\sigma x^p e^{w}\,\overset{\sigma}{'\iota} \otimes \partial_{p}^{\text{expl}}(e^{-w} \overset{['w,w]}{\underset{('n,n)}{T}}{}^{lm\ldots s}{}_{\cdot\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\cdot\ldots\cdot}{}^{\alpha\beta\ldots\gamma}{}_{\lambda\mu\ldots\nu}\times \\ \times \underset{l}{\iota} \otimes \cdots \otimes \underset{s}{\iota} \otimes \overset{i}{\iota} \otimes \cdots \otimes \overset{k}{\iota} \otimes \underset{\alpha}{'\iota} \otimes \cdots \otimes \underset{\gamma}{'\iota} \otimes \overset{\lambda}{'\iota} \otimes \cdots \otimes \overset{\nu}{'\iota}) = \\ = ({}'\nabla_{\sigma}^{\text{expl}} \overset{['w,w]}{\underset{['n,n]}{T}}{}^{lm\ldots s}{}_{\cdot\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\cdot\ldots\cdot}{}^{\alpha\beta\ldots\gamma}{}_{\lambda\mu\ldots\nu} + \partial_\sigma x^p \nabla_{p}^{\text{expl}} \overset{['w,w]}{\underset{['n,n]}{T}}{}^{lm\ldots s}{}_{\cdot\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\cdot\ldots\cdot}{}^{\alpha\beta\ldots\gamma}{}_{\lambda\mu\ldots\nu})\times\end{gathered} \tag{3.16}$$

$$\times\,'\overset{\sigma}{\imath}\otimes\underset{l}{\imath}\otimes\cdots\otimes\underset{s}{\imath}\otimes\overset{i}{\imath}\otimes\cdots\otimes\overset{k}{\imath}\otimes{}'\underset{\alpha}{\imath}\otimes\cdots\otimes{}'\underset{\gamma}{\imath}\otimes{}'\overset{\lambda}{\imath}\otimes\cdots\otimes{}'\overset{\nu}{\imath}=$$

$$=({}'\nabla^{\text{total}}_{\sigma}\,{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu})\,'\overset{\sigma}{\imath}\otimes\underset{l}{\imath}\otimes\cdots\otimes\underset{s}{\imath}\otimes\overset{i}{\imath}\otimes\cdots\otimes\overset{k}{\imath}\otimes{}'\underset{\alpha}{\imath}\otimes\cdots\otimes{}'\underset{\gamma}{\imath}\otimes{}'\overset{\lambda}{\imath}\otimes\cdots\otimes{}'\overset{\nu}{\imath}$$

Вычисляя (3.13) и (3.14) с учетом (3.1) и (3.2) получим выражения для полных ковариантных производных двухточечного псевдотензорного поля:[5]

$$\begin{aligned}
{}'\nabla^{\text{total}}_{\sigma}\,{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu} &= \partial^{\text{expl}}_{\sigma}\,{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu} + {}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \varsigma\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu}\,{}'\Gamma^{\alpha}_{\varsigma\sigma}+\cdots+\\
&+{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\varsigma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu}\,{}'\Gamma^{\gamma}_{\varsigma\sigma} - {}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\varsigma\mu\ldots\nu}\,{}'\Gamma^{\varsigma}_{\lambda\sigma}-\cdots-{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\varsigma}\,{}'\Gamma^{\varsigma}_{\nu\sigma}-\\
&-{}'w\,{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu}\,{}'\Gamma^{\varsigma}_{\varsigma\sigma}+(\partial_{\sigma}x^{p})[\partial^{\text{expl}}_{p}\,{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu}+\\
&+{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{qm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu}\,\Gamma^{l}_{qp}+\cdots+{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots q\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu}\,\Gamma^{s}_{qp}-{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot qj\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu}\,\Gamma^{q}_{ip}-\\
&-\cdots-{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots q\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu}\,\Gamma^{q}_{kp}-w\,{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu}\,\Gamma^{q}_{qp}]
\end{aligned}\tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^{\text{total}}_{p}\,{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu} &= \partial^{\text{expl}}_{p}\,{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu} + {}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{qm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu}\,\Gamma^{l}_{qp}+\cdots+\\
&+{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots q\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu}\,\Gamma^{s}_{qp}-{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot qj\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu}\,\Gamma^{q}_{ip}-\cdots-{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots q\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu}\,\Gamma^{q}_{kp}-\\
&-w\,{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu}\,\Gamma^{q}_{qp}+(\partial_{p}X^{\sigma})[\partial^{\text{expl}}_{\sigma}\,{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu}+\\
&+{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \varsigma\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu}\,{}'\Gamma^{\alpha}_{\varsigma\sigma}+\cdots+{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\varsigma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu}\,{}'\Gamma^{\gamma}_{\varsigma\sigma}-\\
&-{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\varsigma\mu\ldots\nu}\,{}'\Gamma^{\varsigma}_{\lambda\sigma}-\cdots-{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\varsigma}\,{}'\Gamma^{\varsigma}_{\nu\sigma}-{}'w\,{}^{['w,w]}_{['n,n]}T^{lm\ldots s\ \ \alpha\beta\ldots\gamma}_{\cdot\ldots\cdot ij\ldots k\cdot\ldots\cdot\lambda\mu\ldots\nu}\,{}'\Gamma^{\varsigma}_{\varsigma\sigma}]
\end{aligned}\tag{3.18}$$

Отметим, что выражения (3.17) и (3.18), можно записать в компактной форме, принимая во внимание (3.10) и (3.11):

$$'\nabla^{\text{total}}_{\sigma} = {}'\nabla^{\text{expl}}_{\sigma}+(\partial_{\sigma}x^{p})\nabla^{\text{expl}}_{p} \tag{3.19}$$

$$\nabla^{\text{total}}_{p} = \nabla^{\text{expl}}_{p}+(\partial_{p}X^{\sigma})\,{}'\nabla^{\text{expl}}_{\sigma} \tag{3.20}$$

Заключение и выводы. В настоящей работе обсуждаются вопросы ковариантного дифференцирования двухточечных псевдотензоров произвольных рангов и весов.

1. Приводятся необходимые сведения из алгебры и анализа псевдотензоров в ориентированном евклидовом пространстве.

2. Вводится понятие двухточечного псевдотензорного поля, основанного на формуле его преобразования при замене обеих систем координат.

3. Приводится формула преобразования двухточечного псевдотензорного поля к двухточечному абсолютному тензорному полю.

4. Вводятся определения полных и неполных операторов частного и ковариантного дифференцирований двухточечных псевдотензоров.

[5] Опустим детали вычислений, поскольку они имеют очевидный характер.

Таблица 1. Операции частного и ковариантного дифференцирований двухточечных псевдотензоров

	отсчетные координаты X^{α}	пространственные координаты x^{k}
базисные векторы	${}^{\prime}\underset{\alpha}{\iota}$	$\underset{s}{\iota}$
частное (неполное) дифференцирование по явному вхождению переменной	$\partial_{\alpha}^{\mathrm{expl}}$	$\partial_{s}^{\mathrm{expl}}$
полное дифференцирование	$\partial_{\alpha}^{\mathrm{total}}$	$\partial_{s}^{\mathrm{total}}$
неполный оператор Гамильтона	${}^{\prime}\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{expl}} = {}^{\prime}\overset{\alpha}{\iota}\partial_{\alpha}^{\mathrm{expl}}$	$\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{expl}} = \overset{s}{\iota}\partial_{s}^{\mathrm{expl}}$
полный оператор Гамильтона	${}^{\prime}\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{total}} = {}^{\prime}\overset{\alpha}{\iota}\partial_{\alpha}^{\mathrm{total}}$	$\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{total}} = \overset{s}{\iota}\partial_{s}^{\mathrm{total}}$
цепное правило (chain rule)	$\partial_{\alpha}^{\mathrm{total}} = (\partial_{\alpha}x^{s})\partial_{s}^{\mathrm{total}}$	$\partial_{s}^{\mathrm{total}} = (\partial_{s}X^{\alpha})\partial_{\alpha}^{\mathrm{total}}$
цепное правило (chain rule)	${}^{\prime}\nabla_{\alpha}^{\mathrm{total}} = (\partial_{\alpha}x^{s})\nabla_{s}^{\mathrm{total}}$	$\nabla_{s}^{\mathrm{total}} = (\partial_{s}X^{\alpha}){}^{\prime}\nabla_{\alpha}^{\mathrm{total}}$
полное дифференцирование	$\partial_{\alpha}^{\mathrm{total}} = \partial_{\alpha}^{\mathrm{expl}} + (\partial_{\alpha}x^{s})\partial_{s}^{\mathrm{expl}}$	$\partial_{s}^{\mathrm{total}} = \partial_{s}^{\mathrm{expl}} + (\partial_{s}X^{\alpha})\partial_{\alpha}^{\mathrm{expl}}$
полное ковариантное дифференцирование	${}^{\prime}\nabla_{\alpha}^{\mathrm{total}} = {}^{\prime}\nabla_{\alpha}^{\mathrm{expl}} + (\partial_{\alpha}x^{s})\nabla_{s}^{\mathrm{expl}}$	$\nabla_{s}^{\mathrm{total}} = \nabla_{s}^{\mathrm{expl}} + (\partial_{s}X^{\alpha}){}^{\prime}\nabla_{\alpha}^{\mathrm{expl}}$

5. Обсуждаются формулы, связывающие полные и неполные ковариантные производные двухточечного псевдотензорного поля (см. таблицу).

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проект № 20-01-00666.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Truesdell C., Toupin R.* The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Ed. by S. Flügge. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. 1960. P. 226–858. https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
2. *Truesdell C., Noll W.* The non-linear field theories of mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer. 2004. 579 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3_1
3. *Maugin G.* Material inhomogeneities in elasticity. New York: Chapman and Hall/CRC. 2020. 292 p. https://doi.org/10.1201/9781003059882
4. *Весоловский З.* Динамические азадачи нелинейной теории упругости. Пер. с польского Киев: Наукова думка. 1981. 216 p.
5. *Schouten J.A.* Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press. 1965. 434 p. [Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. М.% Наука. 1965. 456 с.].
6. *Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В.* Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 4. С. 399–412. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412
7. *Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On a micropolar theory of growing solids // Вестн. Сам. Гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 3. С. 424–444. https://doi.org/10.14498/vsgtu1792
8. *Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Вестн. Сам. Гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. V. 24.

№ 4. P. 752–761.
https://doi.org/10.14498/vsgtu1799

9. *Гуревич Г.Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТД. 1948. 408 с. [Gurevich G.B. Foundations of the theory of algebraic invariants. Gröningen, P. Noordhoff, 1964. 429 p.].
10. *Sokolnikoff I.* Tensor Analysis: Theoryand Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc. 1964. 361 p. [Сокольников И.С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.].
11. *Synge J.L., Schild A.* Tensor calculus. Toronto: Toronto University Press. 1949. V. 5. 334 p.
12. *Мак-Коннел А.Дж.* Введение в тензорный анализ. С приложениями к геометрии механике в физике. М.: Физматгиз. 1963. 411 с.
13. *Radayev Y.N., Murashkin E.V., Nesterov T.K.* On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors // Вестн. Сам. Гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. V. 26. № 1. P. 36–47.
https://doi.org/10.14498/vsgtu1891
14. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона-Кэли // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 6. С. 130–138.
https://doi.org/10.31857/S0572329921060106
15. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Наука. 1966.
16. *Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.* Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009. 156 с.
17. *Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2010. 328 с.