

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НАРУЖНОГО ДАВЛЕНИЯ, СОЗДАВАЕМОГО НАМОТКОЙ ГИБКИХ НИТЕЙ

© 2022 г. В. В. Васильев^{a,*}, В. А. Салов^b, А. А. Склезнев^b

^a Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

^b АО Центральный НИИ специального машиностроения, Хотьково, Россия

*e-mail: vvvvas@dol.ru

Поступила в редакцию 15.03.2022 г.

После доработки 16.03.2022 г.

Принята к публикации 17.03.2022 г.

В статье рассматривается задача устойчивости бесконечно длинной цилиндрической оболочки, на которую наматываются с натяжением абсолютно гибкие нити, сжимающие оболочку так, что она может потерять устойчивость. С помощью уравнений нелинейной теории оболочек, получено точное решение, определяющее критическое натяжение нитей. Установлено, что критическое натяжение определяется универсальной формулой, которая включает радиус и изгибную жесткость оболочки. С помощью концепции продолжающегося нагружения полученное решение обобщается на случай упруго-пластического материала оболочки. Рассмотрена задача о давлении на упругую оболочку слоями из упругих нитей, наматываемых с натяжением. Решение сопоставляется с результатами эксперимента, проведенного на оболочках из стали, алюминия и термопласта.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, устойчивость оболочки при внешнем давлении, устойчивость оболочки при натяжении наматываемых на нее нитей

DOI: 10.31857/S0572329922060174

1. Введение. Задача, рассматриваемая в статье, представляет прикладной интерес в связи широким распространением композитных баллонов давления и емкостей различного назначения. Герметичность таких конструкций обеспечивается внутренней металлической или полимерной оболочкой (лейнером), на которую осуществляется намотка несущего композитного слоя [1]. При намотке с предварительным натяжением на оболочку передается наружное давление, которое может привести к потере устойчивости. На рис. 1 показаны формы потери устойчивости оболочек из стали, алюминия и термопласта. Задача устойчивости была сформулирована в нелинейной постановке В.И. Феодосьевым [2] однако ее решение не было найдено. Приближенные решения, основанные на энергетическом подходе и аппроксимации формы потери устойчивости, представлены в работах [3, 4]. Заметим, что рассматриваемая задача отличается от аналогичной задачи устойчивости оболочки в жесткой обойме [5], в которой оболочка остается круговой вне участка, на котором она потеряла устойчивость. При потере устойчивости от натяжения нитей оболочка деформируется по всей поверхности (рис. 1).

2. Исходные уравнения. Рассмотрим деформированное сечение оболочки, показанное на рис. 2 сплошной линией (штриховая линия показывает положение нити). Система нелинейных уравнений, описывающих деформацию оболочки, имеет вид [6]

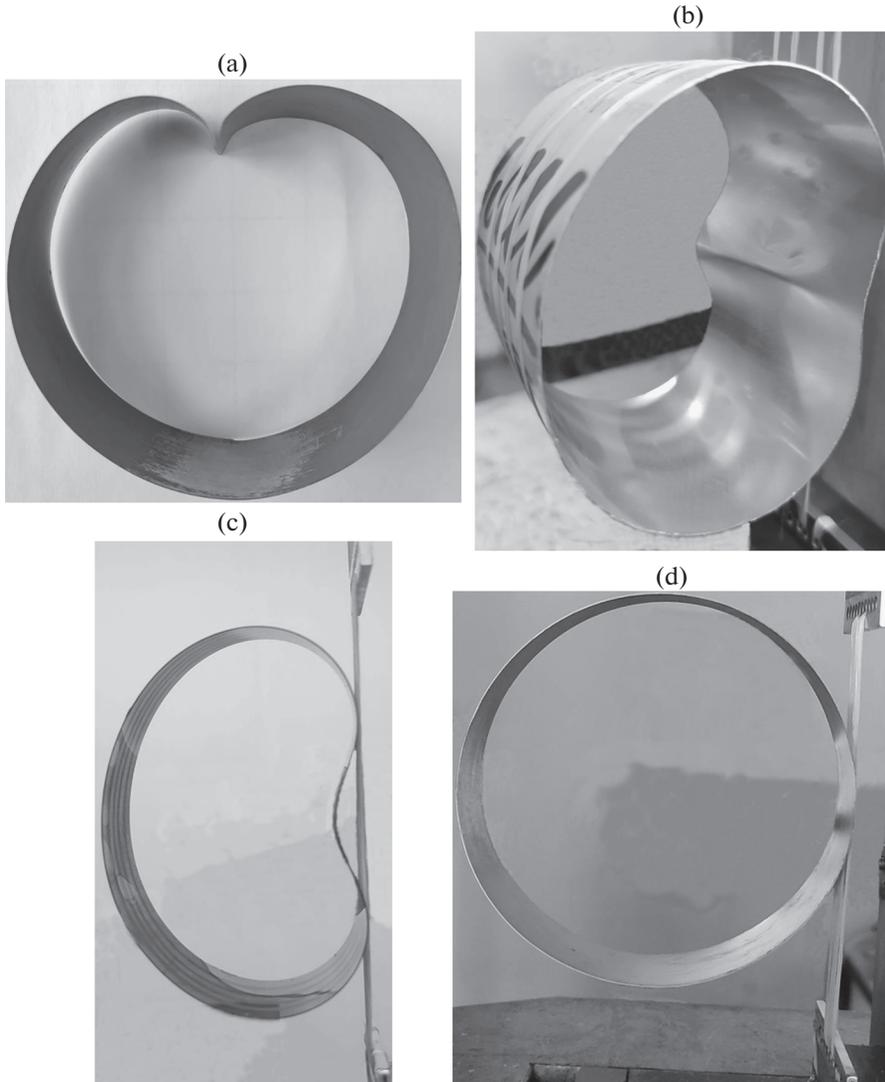


Рис. 1. Формы потери устойчивости оболочек из стали (а), алюминия (б), термопласта (с) и исходная форма оболочки (д) в начале нагружения.

$$N' + Q(1 + \omega') = 0, \quad Q' - N(1 + \omega') = q_T, \quad M' - RQ = 0. \quad (2.1)$$

$$N = B\varepsilon_\alpha, \quad M = \frac{D}{R}\omega', \quad B = \bar{E}h, \quad D = \frac{1}{12}\bar{E}h^3, \quad \bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{R}(u' + w) + \frac{1}{2}\omega^2, \quad \omega = \frac{1}{R}(u - w'), \quad (\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{d\alpha}, \quad (2.3)$$

Здесь N , Q , M – кольцевое усилие, поперечное усилие и изгибающий момент, положительные направления которых показаны на рис. 2, u , w – кольцевое перемещение и

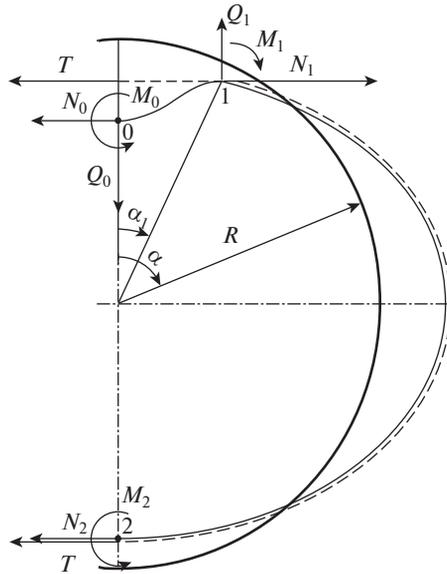


Рис. 2. Условия нагружения и деформированное состояние оболочки.

прогиб, направленный по наружной нормали, ω – угол поворота нормали к поверхности оболочки. Уравнения (2.2) соответствуют бесконечно длинной цилиндрической оболочке. Для кольца в них следует принять $\nu = 0$. Во второе уравнение (2.1) входит давление, создаваемое натяжением нитей T , которое изменяется по углу α следующим образом:

$$q_T = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_1 \quad \text{и} \quad q_T = T(1 + \omega') \quad \text{при} \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \pi \quad (2.4)$$

3. Решение для участка 0-1. Рассмотрим участок оболочки 0-1 (рис. 2). В точке 0 в силу симметрии имеем $Q_0 = 0$. Тогда из условия равновесия участка 0-1 в вертикальном направлении в точке 1 получим $Q_1 = 0$. Из условия равновесия в горизонтальном направлении найдем $N_1 = N_0$. Таким образом, участок 0-1 находится в условиях чистого изгиба и осевого нагружения. Введем безразмерные величины

$$\bar{N} = \frac{N}{T}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{T}, \quad \bar{M} = \frac{M}{TR}, \quad \bar{u} = \frac{u}{R}, \quad \bar{w} = \frac{w}{R} \quad (3.1)$$

При $q_T = 0$ уравнения (2.1) принимают вид

$$N' + \bar{Q}(1 + \omega') = 0, \quad \bar{Q}' - \bar{N}(1 + \omega') = 0, \quad \bar{M}' - \bar{Q} = 0 \quad (3.2)$$

Складывая первые два уравнения, получим $\bar{N}'\bar{N} + \bar{Q}'\bar{Q} = 0$. Интегрируя с учетом граничных условий в точке 0 ($\bar{N} = \bar{N}_0, \bar{Q} = 0$), имеем

$$\bar{N}^2 + \bar{Q}^2 = \bar{N}_0^2 \quad (3.3)$$

Выражая отсюда \bar{Q} и подставляя в первое уравнение (3.2), получим

$$\bar{N}' + \sqrt{\bar{N}_0^2 - \bar{N}^2}(1 + \omega') = 0$$

Интегрируя с учетом граничных условий $\bar{N}(\alpha = 0) = \bar{N}_0, \omega(\alpha = 0) = 0$ (рис. 2), найдем

$$\arcsin \frac{\bar{N}}{\bar{N}_0} = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \omega)$$

Отсюда с учетом равенства (3.3)

$$\bar{N} = \bar{N}_0 \cos(\alpha + \omega), \quad \bar{Q} = \bar{N}_0 \sin(\alpha + \omega) \quad (3.4)$$

Поскольку $\bar{N}(\alpha = \alpha_1) = \bar{N}_1 = \bar{N}_0$ и $\bar{Q}(\alpha = \alpha_1) = \bar{Q}_1 = 0$ (рис. 2) имеем

$$\omega(\alpha = \alpha_1) = -\alpha_1 \quad (3.5)$$

Из уравнений (2.2) с учетом обозначений (3.1) получим следующее выражение для изгибающего момента:

$$M = \frac{\omega'}{\lambda^2}, \quad \lambda^2 = \frac{TR^2}{D} \quad (3.6)$$

Дифференцируя, выражая \bar{M}' через \bar{Q} с помощью последнего уравнения (3.2) и подставляя \bar{Q} из второго равенства (3.4), запишем следующее уравнение для ω :

$$\omega'' - \lambda^2 \bar{N}_0 \sin(\alpha + \omega) = 0 \quad (3.7)$$

Оценим функцию $\varphi = \alpha + \omega$. Согласно граничным условиям в точках 0 и 1 (рис. 2) имеем $\varphi(\alpha = 0) = 0$ и $\varphi(\alpha = \alpha_1) = 0$. Таким образом, функция φ обращается в ноль на границах интервала интегрирования уравнения (3.7). Считая ее малой внутри этого интервала примем $\sin \varphi \approx \varphi$ и упростим соответствующим образом уравнение (3.7).

Учтем также, что $\lambda^2 \bar{N}_0 < 0$ так как усилие N_0 (рис. 2) по условиям задачи является сжимающим. В результате, уравнение (3.7) принимает вид

$$\omega'' + k_1^2(\omega + \alpha) = 0, \quad k_1^2 = -\lambda^2 \bar{N}_0 \quad (3.8)$$

Общее решение этого уравнения

$$\omega = C_1 \sin k_1 \alpha + C_2 \cos k_1 \alpha - \alpha$$

Условия $\omega(\alpha = 0) = 0$ дает $C_2 = 0$, а из условия (3.5) следует $\sin k_1 \alpha_1 = 0$. Таким образом,

$$k_1 = \frac{\pi}{\alpha_1}, \quad \bar{N}_0 = -\frac{\pi^2}{\alpha_1^2 \lambda^2} \quad \text{и} \quad \omega = C_1 \sin \frac{\pi \alpha}{\alpha_1} - \alpha \quad (3.9)$$

Преобразуем этот результат. Используя равенство (3.6), запишем изгибающий момент, действующий в точке 0 (рис. 2)

$$\bar{M}_0 = \frac{1}{\lambda^2} \omega'(\alpha = 0) = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\pi}{\alpha_1} C_1 - 1 \right)$$

Выражая отсюда C_1 и подставляя в решение (3.9), получим следующее окончательное выражение для угла поворота на участке 0-1:

$$\omega_{01} = \frac{\alpha_1}{\pi} (1 + \lambda^2 \bar{M}_0) \sin \frac{\pi \alpha}{\alpha_1} - \alpha \quad (3.10)$$

Найдем прогиб оболочки на участке 0-1. Предположим, что оболочка является недеформируемой в кольцевом направлении и примем в равенствах (2.2) $B \rightarrow \infty$. Тогда $\varepsilon_\alpha = 0$ и из уравнений (2.3) при учете обозначений (3.1) следует

$$\bar{u}' = -\bar{w} - \frac{\omega^2}{2}, \quad \omega' = \bar{u}' - \bar{w}'' \quad (3.11)$$

Исключая u' , придем к уравнению для прогиба

$$\bar{w}'' + \bar{w} = -f(\alpha), \quad f(\alpha) = \omega' + \frac{\omega^2}{2} \quad (3.12)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию симметрии $\bar{w}'(\alpha = 0) = 0$ (рис. 2), определяет прогиб оболочки на участке 0-1

$$\begin{aligned} \bar{w}_{01} &= C_{01} \cos \alpha - \sin \alpha \int_0^\alpha f_{01}(\alpha) \cos \alpha d\alpha + \cos \alpha \int_0^\alpha f_{01}(\alpha) \sin \alpha d\alpha \\ f_{01}(\alpha) &= \omega'_{01} + \frac{1}{2} \omega_{01}^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Постоянная C_{01} соответствует смещению оболочки как твердого тела. Кольцевое перемещение следует из первого уравнения (3.11). Интегрируя его с учетом условия симметрии $\bar{u}(\alpha = 0) = 0$, получим

$$\bar{u}_{01} = -\int_0^\alpha \left(\bar{w}_{01} + \frac{\omega_{01}^2}{2} \right) d\alpha \quad (3.14)$$

4. Решение для участка 1-2. Для участка 1-2 (рис. 2) уравнения равновесия (2.1) с учетом равенств (2.4) и (3.1) записываются следующим образом:

$$\bar{N}' + \bar{Q}(1 + \omega') = 0, \quad \bar{Q}' - \bar{N}(1 + \omega') = 1 + \omega', \quad \bar{M}' - \bar{Q} = 0 \quad (4.1)$$

Обозначим $\bar{N} + 1 = \bar{N}_r$. Учитывая, что $\bar{N}' = \bar{N}_r'$, представим первые два уравнения (4.1) в виде

$$\bar{N}_r' + \bar{Q}(1 + \omega') = 0, \quad \bar{Q}' - \bar{N}_r(1 + \omega') = 0 \quad (4.2)$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям (3.2) и имеют решение аналогичное равенству (3.3), то есть $\bar{N}_r^2 + \bar{Q}^2 = C^2$. При $\alpha = \alpha_1$ (рис. 2) имеем $\bar{N}_1 = \bar{N}_0$, $\bar{N}_r = 1 + \bar{N}_0$, $\bar{Q}_1 = 0$. Таким образом, $C = \bar{N}_r(\alpha = \alpha_1) = 1 + \bar{N}_0$ и

$$(1 + \bar{N})^2 + \bar{Q}^2 = (1 + \bar{N}_0)^2 \quad (4.3)$$

Выражая отсюда \bar{Q} и подставляя в первое уравнение (4.1), получим

$$\bar{N}' + \sqrt{(1 + \bar{N}_0)^2 - (1 + \bar{N})^2} (1 + \omega') = 0$$

Общее решение этого уравнения

$$\arcsin \frac{1 + \bar{N}}{1 + \bar{N}_0} + \alpha + \omega = C$$

В точке 1 (рис. 2) имеем $\alpha = \alpha_1$, $\bar{N} = \bar{N}_0$ и $\omega = -\alpha_1$. Тогда $C = \pi / 2$ и решение принимает вид

$$\bar{N} = (1 + \bar{N}_0) \cos(\alpha + \omega) - 1, \quad \bar{Q} = (1 + \bar{N}_0) \sin(\alpha + \omega) \quad (4.4)$$

В точке 2 (рис. 2) имеем $\alpha = \pi$, $\omega = 0$ и $\bar{N}_2 = -2 - \bar{N}_0$, $\bar{Q}_2 = 0$. Уравнение равновесия половины оболочки, показанной на рис. 2 ($N_0 + N_2 + 2T = 0$), удовлетворяется при этом тождественно. Дальнейшие преобразования приводят к уравнению аналогичному уравнениям (3.7) и (3.8). Окончательно получим

$$\omega'' + k_2^2 \sin(\alpha + \omega) = 0, \quad k_2^2 = -\lambda^2(1 + \bar{N}_0) \quad (4.5)$$

Предполагается и подтверждается дальнейшим расчетом, что при $\bar{N}_0 < 0$ абсолютная величина $|\bar{N}_0| > 1$. В отличие от уравнения (3.7) это уравнение нельзя упростить и при-

вести к форме (3.8). Для решения уравнения (4.5) введем новую переменную [7] $y(\alpha) = \alpha + \omega(\alpha)$ и приведем уравнение (4.5) к виду $y'' + k_2^2 \sin y = 0$. В этом уравнении проведем замену $(y')^2 = z(y)$, в результате которой придем к уравнению первого порядка $z' = -2k_2^2 y' \sin y = 2k_2^2 (\cos y)'$. Решение этого уравнения в исходных переменных имеет вид

$$(1 + \omega')^2 = 2k_2^2 \cos(\alpha + \omega) + C_\omega \quad (4.6)$$

Используя формулы (3.9) для \bar{N}_0 и (4.5) для k_2^2 , найдем $k_2^2 = (\pi^2/\alpha_1^2) - \lambda^2$. Постоянная C_ω определяется из условия непрерывности угла поворота в точке $\alpha = \alpha_1$ (рис. 2). Функция $\omega(\alpha_1)$, определяемая уравнением (4.6), должна быть равна функции $\omega_{01}(\alpha_1)$ (3.10). Окончательно, получим следующее уравнение для угла поворота на участке 1-2:

$$\omega'_{12} = \sqrt{(1 + \lambda^2 \bar{M}_0)^2 - 2 \left(\frac{\pi^2}{\alpha_1^2} - \lambda^2 \right) [1 - \cos(\alpha + \omega_{12})]} - 1 \quad (4.7)$$

Решение этого уравнения выражается через эллиптические интегралы. Однако при этом получается достаточно сложная неявная функция $\alpha(\omega_{12})$, неудобная для расчета. В связи с этим уравнение (4.7) интегрируется численно при граничном условии $\omega_{12}(\alpha = \pi) = 0$ (рис. 2).

Прогиб оболочки на участке 1-2 определяется равенством аналогичным выражению (3.13), то есть

$$\begin{aligned} \bar{w}_{12} &= C_{12} \cos \alpha - \sin \alpha \int_{\alpha_1}^{\alpha} f_{12}(\alpha) \cos \alpha d\alpha + \cos \alpha \int_{\alpha_1}^{\alpha} f_{12}(\alpha) \sin \alpha d\alpha \\ f_{12}(\alpha) &= \omega'_{12} + \frac{1}{2} \omega_{12}^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Постоянная C_{12} выражается через постоянную C_{01} в равенстве (3.13) из условия непрерывности прогиба в точке $\alpha = \alpha_1$ (рис. 2). Из этого условия получим $C_{12} = \bar{w}_{01}(\alpha_1, C_{01})/\cos \alpha_1$. Постоянная C_{01} соответствует, как уже отмечалось, смещению оболочки как твердого тела.

Кольцевое перемещение оболочки на участке 1-2 определяется выражением аналогичным равенству (3.14). Учитывая условие непрерывности перемещения в точке $\alpha = \alpha_1$ (рис. 2), получим

$$\bar{u}_{12} = -\int_0^{\alpha_1} \left(\bar{w}_{01} + \frac{1}{2} \omega_{01}^2 \right) d\alpha - \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left(\bar{w}_{12} + \frac{1}{2} \omega_{12}^2 \right) d\alpha \quad (4.9)$$

При этом должно выполняться условие симметрии $\bar{u}_{12}(\alpha = \pi) = 0$ (рис. 2).

5. Определение критического натяжения. Критическое натяжение нитей, при котором оболочка теряет устойчивость, определяется в результате расчета, состоящего из нескольких этапов. На первом этапе задается параметр λ^2 (3.6), в который входит неизвестное усилие натяжения T . На втором этапе задается угол α_1 . Тогда для определения угла поворота $\omega(\alpha)$ с помощью уравнений (3.10) и (4.7) необходимо знать момент \bar{M}_0 . Этот момент находится в результате численного интегрирования уравнения (3.7) – он определяется методом пристрелки так, чтобы выполнялось граничное условие $\omega_{12}(\alpha = \pi) = 0$ (рис. 2). На третьем этапе при найденном значении \bar{M}_0 и заданной величине λ^2 определяется соответствующий этим параметрам угол α_1 . Для этого используется условие симметрии осевого перемещения (4.9) – $\bar{u}_{12}(\alpha = \pi) = 0$. В результате такой довольно

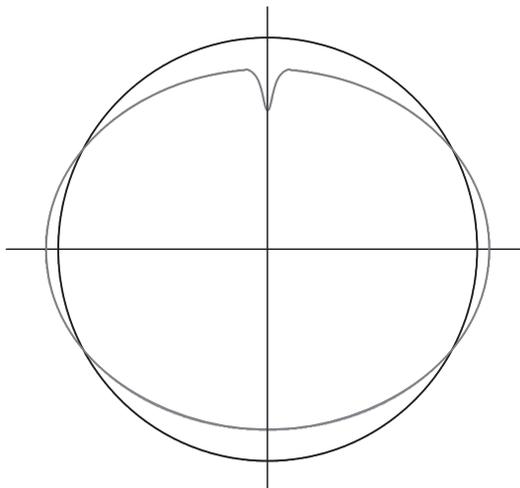


Рис. 3. Прогиб оболочки, построенный по результатам параметрического анализа.

сложной процедуры получается угол поворота $\omega(\alpha)$, соответствующий заданному параметру λ^2 . На заключительном этапе расчета с помощью уравнений (3.13) и (4.8) определяется прогиб оболочки. При этом оказывается, что существует некоторое критическое значение параметра λ_{cr}^2 такое, что при $\lambda^2 < \lambda_{cr}^2$ существует только тривиальное решение $w \equiv 0$, соответствующее докритическому состоянию оболочки. В результате трудоемкого параметрического анализа получено $\lambda_{cr}^2 = 732$. Прогиб оболочки при этом значении параметра и $\alpha_1 = 6.39^\circ$, $C_{01} = \bar{w}(\alpha = 0) = 0.2$ показан на рис. 3.

Таким образом, результатом приведенного выше достаточно сложного анализа является универсальная и простая формула для критического натяжения

$$T_{cr} = \frac{\lambda_{cr}^2 D}{R^2}, \quad \lambda_{cr}^2 = 732 \quad (5.1)$$

Для проверки полученного результата были испытаны оболочки из алюминия, стали и термопласта (ПЭТФ), нагружавшиеся натянутыми нитями. Результаты эксперимента представлены в таблице. Среднее экспериментальное значение λ_{cr}^2 составляет 741, что отличается от расчетного результата на 1.2%. Критическое напряжение в оболочке определяется по формуле $\sigma_{cr} = q_{cr} R/h$, где $q_{cr} = T_{cr}/R$ – контактное давление на оболочку, создаваемое нитями. С учетом равенства (5.1) получим

$$\sigma_{cr} = \frac{\lambda_{cr}^2 D}{R^2 h} \quad (5.2)$$

Как известно, при действии равномерного давления жидкости или газа на бесконечно длинную цилиндрическую оболочку критическое напряжение имеет вид $\sigma_{cr} = 3D/R^2 h$. Это напряжение в 244 раза меньше напряжения (5.2).

Полученный результат справедлив для упругой оболочки при $\sigma_{cr} \leq \sigma_t$, где σ_t – предел текучести материала. Величина σ_{cr} для экспериментальных оболочек приведена в таблице 1. Она значительно меньше предела текучести, который для алюминия, стали и термопласта составляет соответственно 267, 486 и 63 МПа. Если $\sigma_{cr} > \sigma_t$, оболочка те-

Таблица 1. Результаты экспериментальных исследований устойчивости кольцевых образцов

Материал оболочки	R , мм	h , мм	T_{cr} , Н/мм	σ_{cr} , МПа	E , ГПа	ν	λ_{cr}^2
Алюминий	42.00	0.165	12.50	75.8	72.1	0.3	753
Алюминий	31.50	0.096	4.44	46.3	72.3	0.3	741
Сталь	50.02	0.183	37.33	204	222	0.3	736
Термопласт	40.10	0.242	3.13	12.9	5.22	0.4	739
Термопласт	40.14	0.232	2.57	11.1	5.10	0.4	739
Термопласт	40.40	0.260	3.94	15.2	5.26	0.4	737

ряет устойчивость за пределом упругости. Согласно концепции продолжающегося нагружения [8], в этом случае в выражении (2.2) для изгибной жесткости принимается $\nu = 1/2$ и $E = E_t$, где E_t – касательный модуль. Таким образом, в равенстве (5.1) принимается $D = E_t h^3/9$.

6. Напряжения в оболочке, вызванные многослойной намоткой с натяжением. Рассмотрим металлическую цилиндрическую оболочку с толщиной h , на которую наматывается система композитных слоев. Предположим, что элементарный слой имеет толщину δ и предварительное напряжение s . Эффект от намотки такого слоя на оболочку моделируется приложением к оболочке наружного давления $q = s\delta/R$. В результате намотки одного слоя в оболочке возникнет напряжение $\sigma_1 = -qR/h = -s\delta/h$. Если оболочка является абсолютно жесткой, то после намотки n слоев в ней будет действовать напряжение $\sigma_n = -s\delta n/h$. Однако оболочка является податливой и при намотке каждого следующего слоя натяжение ранее уложенных слоев снижается [9].

Итак, после намотки первого слоя в нем действует напряжение s , а в металлической оболочке – напряжение $\sigma_1 = -s\delta/h$. В результате намотки второго слоя в первом слое и в оболочке возникают дополнительные напряжения s_{12} и σ_{12} , которые связаны уравнением равновесия и условием совместности деформаций

$$s_{12}\delta + \sigma_{12}h = -q = -\frac{s\delta}{R}, \quad \frac{s_{12}}{E_c} = \frac{\sigma_{12}}{E}$$

где E_c – модуль упругости слоя композитного слоя. Выражая отсюда σ_{12} , найдем напряжение в оболочке после намотки второго слоя

$$\sigma_2 = -\frac{s\delta}{h} \left(1 + \frac{1}{\eta} \right), \quad \eta = \frac{E_c \delta}{Eh}$$

Аналогичным способом получим напряжение в оболочке после намотки третьего слоя

$$\sigma_3 = -\frac{s\delta}{h} \left(1 + \frac{1}{1 + \eta} + \frac{1}{1 + 2\eta} \right)$$

В общем случае после намотки слоя с номером n найдем

$$\sigma_n = -\frac{s\delta}{h} \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 + \eta i} \right)$$

Заключение. В рамках нелинейной теории оболочек получено решение, определяющее критическую величину натяжения нитей, наматываемых на бесконечно длинную цилиндрическую оболочку. Установлено универсальное выражение для критического натяжения, зависящего от радиуса и изгибной жесткости оболочки. Полученное ре-

шение подтверждено экспериментально на модельных оболочках из алюминия, стали и термопласта. Исследован процесс намотки композита на упругую оболочку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В.В., Мороз Н.Г.* Композитные баллоны давления. Проектирование, расчет, изготовление и испытания. М.: Машиностроение, 2015. 372 с.
2. *Феодосьев В.И.* Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1996. 368 с.
3. *Langhaar H., Boresi A., Marcus L., Love G.* Buckling of a long fiber-wound cylindrical shell due to stresses caused by winding // *J. Appl. Mech.* 1965. V. 32. Ser. E. № 1. P. 81–86.
<https://doi.org/10.1115/1.3625789>
4. *Постоев В.С.* К теории устойчивости предварительно напряженной цилиндрической оболочки / Прочность гидротурбин. Труды ЦКТИ. Вып. 72. Л.: ЦКТИ, 1966. С. 3–12.
5. *Васильев В.В., Салов В.А.* Устойчивость бесконечно длинной цилиндрической оболочки, нагруженной наружным давлением, создаваемым жесткой внешней средой // *Изв. РАН. МТТ.* 2021. № 4. С. 134–144.
<https://doi.org/10.31857/S0572329921040127>
6. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 270 с.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961, 703 с.
8. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967, 984 с.
9. *Васильев В.В.* Упруго-пластические деформации металлических баллонов давления, усиленных однонаправленным стеклопластиком // *Механика полимеров.* 1969. № 6. С. 1069–1074.