ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 1, с. 47–54

УДК 517.54:532.031

ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАГЛУБЛЕННОГО НАЧАЛЬНОГО ИМПУЛЬСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ГИДРОГЕОФИЗИЧЕСКИЙ МАССИВ

© 2023 г.
К. Н. Анахаев[a,b,*], В. В. Беликов[b,]**

[a] *Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук (ИПМА КБНЦ РАН), Нальчик, Россия*

[b] *Институт водных проблем Российской академии наук (ИВП РАН), Москва, Россия*

**e-mail: anaha13@mail.ru*

***e-mail: belvv@bk.ru*

Поступила в редакцию 27.10.2021 г.
После доработки 10.12.2021 г.
Принята к публикации 20.12.2021 г.

В работе рассматривается потенциальная задача заглубленного импульсного воздействия в начальный момент времени на гидрогеофизический массив, что может иметь место при подземных (подводных) взрывах, извержениях вулканов, сейсмах и т.д. Воздействие очага импульса моделировалось источником округленной формы с единичным напором, а область стока – линией нулевого потенциала. Получено строгое гидромеханическое решение задачи с установлением аналитической взаимосвязи между физической областью течения и комплексным потенциалом на основе теории функции комплексного переменного – использования метода последовательных конформных отображений с определением всех необходимых характеристик потока. Приведены примеры расчета для частных случаев с построением криволинейных ортогональных гидродинамических сеток, очертаний семейств линий равных напоров и линий токов, профилей источников импульса, а также эпюр скоростей, напоров и расходов потенциального потока.

Ключевые слова: потенциальный поток, импульсное воздействие, конформные отображения, комплексный потенциал, комплексная область, эллиптические функции, линии токов, линии равных напоров

DOI: 10.31857/S0572329922060022, **EDN:** KFXNIJ

Введение. Импульсные воздействия на гидрогеофизические массивы могут иметь естественное (падения астероидов, извержения вулканов, сейсмические воздействия и т.д.) и искусственное (надземные, подземные и подводные взрывы) происхождения. Во многих случаях они сопровождаются крупномасштабными динамическими изменениями окружающей природной среды с возникновениями цунами, наводнений, оползней и обвалов береговых склонов [1–5] и, нередко, оказывают значительные негативно-разрушающие воздействия на населенные пункты, селитебные территории, объекты экономики, представляя значительную угрозу для безопасности жизнедеятельности людей. При научных исследованиях указанных воздействий с оценкой их мощности и прогнозом возможных последствий наиболее широкое применение получила гидродинамическая модель тяжелой идеальной жидкости [3, 5, 6]. В частности, в работах [6, 7] рассматриваются случаи падения (ударов) высокоскоростных (до 15–50 км/с) астероидов на земную и водную поверхности с проникновениями, соответственно, в грунтовую толщу и до дна водной акватории.

Особенности развития во времени подводного импульса (взрыва) рассматривается в работе [3, с. 279–281], где указано также на наличие гидродинамического парадокса – при увеличении глубины расположения источника импульса (в определенном интервале) не происходит снижение силы импульсного воздействия, то есть пробивная сила ударной волны остается постоянной. Задача о распределении импульсных давлений по ряду плавающих тел в покоящейся жидкости при ударном воздействии на одного из них в момент времени, непосредственно следующий за ударом, изложена в [6, с. 259].

Импульсные (взрывные) методы воздействия на гидрогеофизические массивы могут быть использованы также при создании искусственных островов и оградительных дамб (преимущественно в относительно мелкой воде) путем комбинированных разновременных взрывов, при которых первые (вспомогательные заряды) удаляют слой воды, а вторые (наклонные заряды с двух сторон) набрасывают (сгребают) грунт дна водоема в тело насыпи [8, с. 8].

В работе [9, с. 77] рассматривается задача о распределении давления в безграничной несжимаемой жидкости от воздействия подводного импульсного источника (взрыва мины) в начальный (весьма малый) промежуток времени в гидромеханической постановке как плоская задача осесимметричного потенциального потока без учета наличия водной поверхности.

1. Постановка задачи. В работе начальное импульсное воздействие заглубленного источника округленного профиля на гидрогеофизический массив (водный, грунтовый) рассматривается в плоской постановке как задача гидромеханического моделирования потенциального потока [1, 2, 6, 10], принимая контур источника импульса за полный (единичный) потенциал, а горизонтальную поверхность массива (линию стока) – за линию нулевого потенциала (рис. 1).

2. Метод и построение решения. Задача решается на основе теории функции комплексного переменного с использованием метода последовательных конформных отображений, отличительной особенностью от [1, 3, 6] которой является аналитическое определение в элементарных функциях характеристик потенциального потока в первоначальный момент времени импульсного воздействия.

В силу симметрии физической области течения $z = x + iy$ (рис. 1, а) в качестве расчетной схемы принята правая ее половина $ABCDE$ (рис. 2, а), представленная в IV квадранте источником импульса округленного профиля (размером d по вертикальной оси), заглубленным в гидрогеофизический массив на величину h. Решение задачи отыскивается на основе аналитической однозначной взаимосвязи между указанной областью физической течения $z = x + iy$ (рис. 1, 2, а) и областью комплексного потенциала $W = \varphi + i\psi$, геометрический образ которого для принятой расчетной схемы представлен прямоугольником $ABCD(E)$ с точкой A в центре координат $\varphi A \psi$ (рис. 2, i), где φ и ψ – напорная (потенциальная) функция и функция тока. В указанном прямоугольнике линии равного напора BC и AE соответствуют значениям потенциала, равным напорам – единичному $\varphi = H = 1$ (в усл. ед.) и нулевому $\varphi = 0$, а линии тока BA и CD – значениям функции тока нулевого ($\psi = 0$) и полного (для правой половины области течения $\psi = q$) расходов.

При этом имеем следующие граничные условия (рис. 1, 2):

– по линиям осевой симметрии (непроницаемые границы) BA и CD функция тока ψ равна, соответственно, нулевому $\psi = 0$ и полному расходу $\psi = q$;

– вдоль очертания импульсного источника BC и линии поверхности стока AE функции тока ψ растут от нулевого значения $\psi = 0$ до полного расхода $\psi = q$;

– напорная (потенциальная) функция φ на линии контура источника импульса BC равна полному (единичному) напору H ($\varphi = H = 1$), а на выходном участке стока AE – нулевому значению $\varphi = 0$.

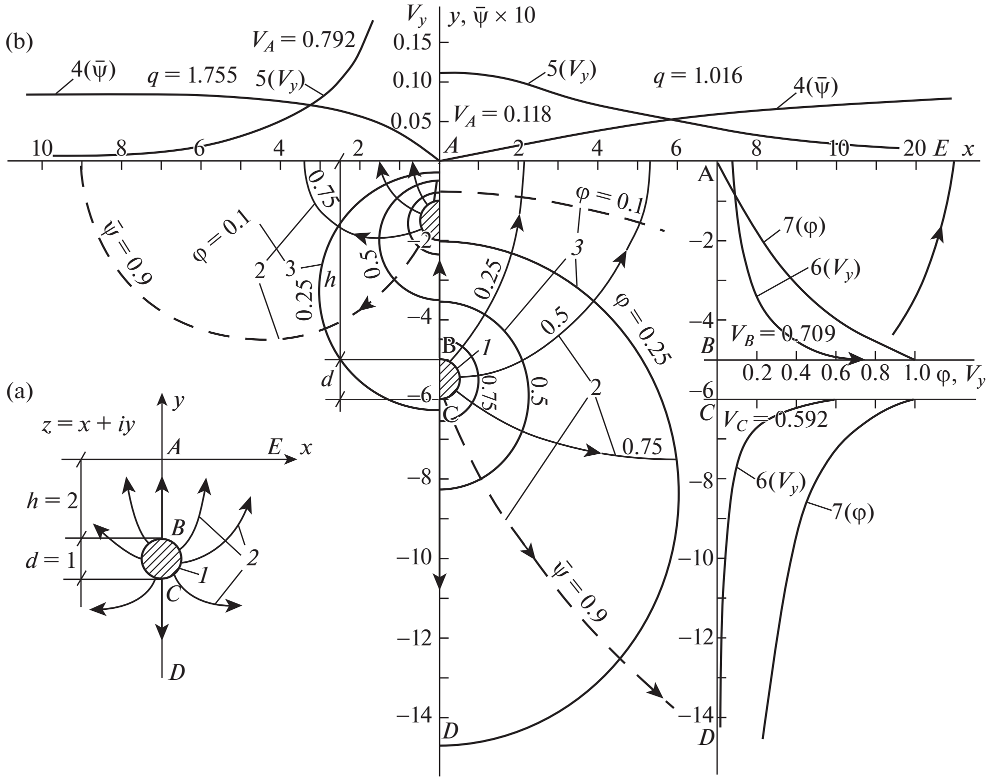

Рис. 1. Расчетные характеристики поля потенциального потока при заглубленном начальном импульсном воздействии: a) общий симметричный характер потенциального потока; b) криволинейные ортогональные гидродинамические сетки потока при $h/d = 5$ (правая половина) и $h/d = 1$ (левая половина); 1 – очертания профилей импульсного источника BC; 2 – очертания семейства кривых функции тока (относительных расходов $\bar\psi$) – через 0.25; 3 – очертания семейства кривых линий равных напоров (потенциальной функции φ) – через 0.25; 4 – эпюры расходов (функции тока $\bar\psi$) вдоль границ стока; 5 – эпюры выходных скоростей потока $V_y = V_{out}$ вдоль границ стока; 6 и 7 – соответственно, эпюры действующих вертикальных скоростей V_y и напоров φ вдоль осевой линии области течения.

Аналитическая взаимосвязь между комплексными областями физического течения $z = x + iy$ (рис. 2, a) и комплексного потенциала $W = \varphi + i\psi$ (рис. 2, i) устанавливается путем их последовательного конформного отображения на единую связующую полуплоскость $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 2, h) [10–12]. При этом для конформного отображения области $z = x + iy$ на полуплоскость $\zeta = \xi + i\eta$ используются промежуточные комплексные области $z_1 = x_1 + iy_1$, $t = t_1 + it_2$, $S = S_1 + iS_2$, $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$, $J = J_1 + iJ_2$ (рис. 2, b, c, d, e, f, g) с помощью функции [10–14]:

$$z = -iz_1, \quad t = \sqrt{z_1^2 - h^2}, \quad S = \sqrt{t^2 - m^2}, \quad \gamma = \frac{S}{m}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right), \quad J = \varepsilon^2 \tag{2.1}$$

в которых

$$m = \sqrt{d\,(h + 0.5d)} \tag{2.2}$$

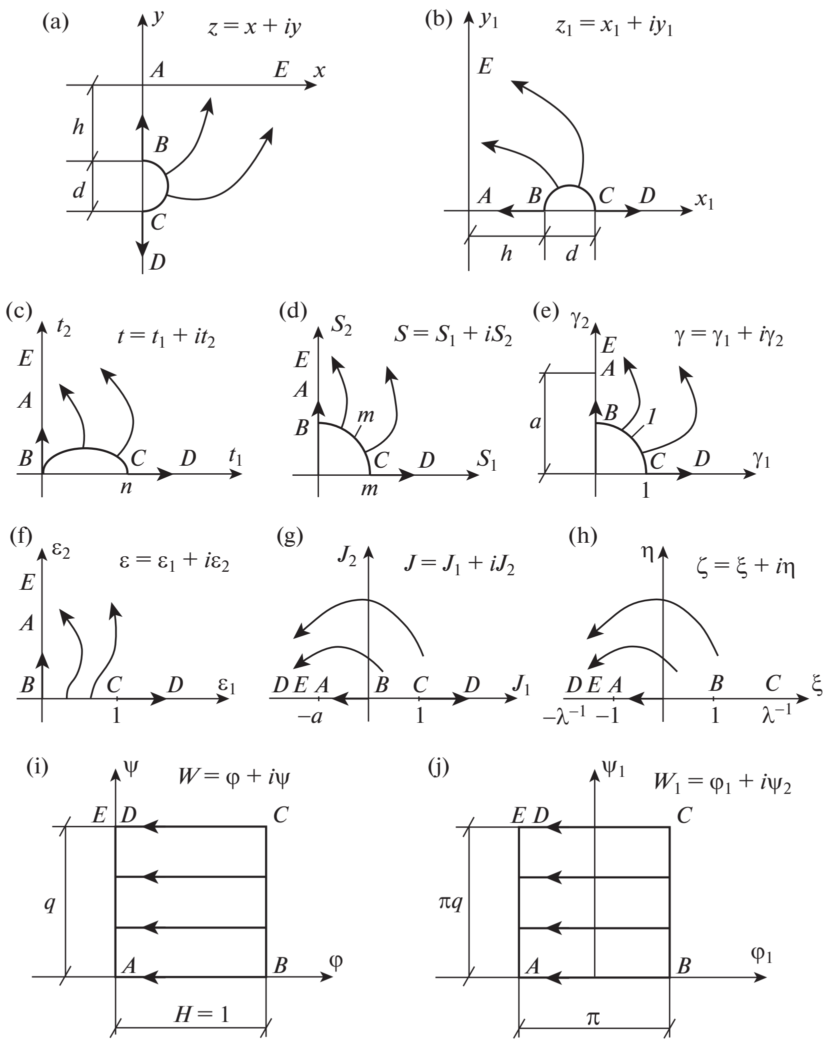

Рис. 2. Схема последовательных конформных отображений, устанавливающая аналитическую взаимосвязь областей физического течения $z = x + iy$ и комплексного потенциала $W = \varphi + i\psi$ (прямоугольника).

С другой стороны, необходимо также конформно отобразить на полуплоскость $\zeta = \xi + i\eta$ область комплексного потенциала $W = \varphi + i\psi$, имеющего вид прямоугольника шириной $H = 1$ и длиной равной q (рис. 2, i), для точного отображения которого на полуплоскость требуется использование эллиптического синуса Якоби [10–15]. Однако, возникающие при этом математические сложности (в том числе при последующих преобразованиях эллиптических функций Якоби [15, 16]), затрудняют получение итоговых аналитических выражений в элементарных функциях для непосредственного определения гидромеханических характеристик потока в начальный момент импульсного воздействия, что имеет важное значение как для теоретического анализа, так и решения прикладных задач.

Для преодоления изложенных математических трудностей ниже приводится новая методика конформного отображения области комплексного потенциала $W = \varphi + i\psi$, представленного в виде прямоугольника, на полуплоскость $\zeta = \xi + i\eta$ [10, 17, 18]. При этом используется промежуточная комплексная область $W_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ – прямоугольник шириной π с осевым расположением мнимой оси $O\varphi_1$ (рис. 2, j), определяемая зависимостью (при $H = 1$)

$$W_1 = \pi(W - 0.5) \tag{2.3}$$

который (при "удлиненном" прямоугольнике $q/H \geq 1$) отображается на полуплоскость $\zeta = \xi + i\eta$ элементарными алгебраическими соотношениями (с погрешностью $\ll 1\%$) [17, 18]:

$$\zeta = \frac{2}{\lambda R} \cdot \frac{\sin W_1}{1 + \dfrac{\sin^2 W_1}{R^2}}, \quad R = \operatorname{ch}(\pi q), \quad \lambda = \frac{2R}{1 + R^2} \tag{2.4}$$

При этом комплексные области $J = J_1 + iJ_2$ (рис. 2, g) и $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 2, h) связываются между собой по соответствию трех точек: A ($J_A = -a$, $\zeta_A = -1$), B ($J_B = 0$, $\zeta_B = 1$) и D ($J_D = -\infty$, $\zeta_D = -1/\lambda$) зависимостями:

$$J = J_1 + iJ_2 = \frac{a(\zeta - 1)(1 - \lambda)}{2(\lambda\zeta + 1)}, \quad \zeta = \xi + i\eta = -\frac{2J + a(1 - \lambda)}{2J\lambda - a(1 - \lambda)} \tag{2.5}$$

где a – модуль точки A в комплексной области $J = J_1 + iJ_2$ (рис. 2, g), определяемый из последовательных отображений областей $z \to z_1 \to t \to S \to \gamma \to \varepsilon \to J$ по формуле

$$a = \frac{h^4}{4m^2(m^2 + h^2)} \tag{2.6}$$

При этом, для определения в формулах (2.4) значений параметров λ, R и расхода q, из зависимости (2.5) для образа точки C в области $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 2, h)

$$\zeta_C = -\frac{2J_C + a(1 - \lambda)}{2J_C\lambda - a(1 - \lambda)}$$

выразим (при $J_C = 1$; $\zeta_C = 1/\lambda$) значение λ в виде

$$\lambda = \frac{1}{a}[a + 2(1 - \sqrt{a + 1})] \tag{2.7}$$

подставляя которое в формулы (2.4), получим

$$R = \frac{1}{\lambda}(1 + \sqrt{|1 - \lambda^2|}), \quad q = \frac{1}{\pi}\operatorname{Arch}(R) \tag{2.8}$$

Таким образом, устанавливаем аналитическую взаимосвязь $z = f(W)$ между областями физического течения $z = x + iy$ (рис. 2, a) и комплексного потенциала $W = \varphi + i\psi$ (рис. 2, i) с учетом значений промежуточных функций $z_1, t, S, \gamma, \varepsilon, J, \zeta, W_1$, определяемых по зависимостям (2.1)–(2.8). Разделяя в последних действительную и мнимую части и преобразовывая получим окончательные выражения в элементарных функциях для определения координат x и y области физического течения $z = x + iy$ при известных величинах d и h в зависимости от заданных значений напорной функции φ и функции тока ψ в виде:

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{A_{10}^2 + B_{10}^2} - A_{10}}{2}}, \quad y = -\sqrt{\frac{\sqrt{A_{10}^2 + B_{10}^2} + A_{10}}{2}} \tag{2.9}$$

в которых

$$A_{10} = t_1^2 - t_2 + h^2, \quad B_{10} = 2t_1t_2, \quad t_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{A_9^2 + B_9^2} + A_9}{2}}, \quad t_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{A_9^2 + B_9^2} - A_9}{2}}$$

$$A_9 = S_1^2 - S_2^2 + m^2, \quad B_9 = 2S_1S_2, \quad S_1 = \gamma_1 m, \quad S_2 = \gamma_2 m$$

$$\gamma_1 = \varepsilon_1 + A_8, \quad \gamma_2 = \varepsilon_2 + B_8, \quad A_8 = \sqrt{\frac{\sqrt{A_7^2 + B_7^2} + A_7}{2}}, \quad B_8 = \sqrt{\frac{\sqrt{A_7^2 + B_7^2} - A_7}{2}}$$

$$A_7 = \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - 1, \quad B_7 = 2\varepsilon_1\varepsilon_2, \quad \varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{J_1^2 + J_2^2} + J_1}{2}}, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{J_1^2 + J_2^2} - J_1}{2}} \tag{2.10}$$

$$J_1 = \frac{A_5A_6 + B_5B_6}{A_6^2 + B_6^2}, \quad J_2 = \frac{A_6B_5 - A_5B_6}{A_6^2 + B_6^2}, \quad A_6 = 2(\lambda\xi + 1), \quad B_6 = 2\lambda\eta$$

$$A_5 = a(1 - \lambda)(\xi - 1), \quad B_5 = a(1 - \lambda)\eta, \quad \xi = \frac{2}{\lambda R} \cdot A_4, \quad \eta = \frac{2}{\lambda R} \cdot B_4$$

$$A_4 = \frac{A_1A_3 + B_1B_3}{A_3^2 + B_3^2}, \quad B_4 = \frac{A_3B_1 - A_1B_3}{A_3^2 + B_3^2}, \quad A_3 = 1 + \frac{A_2}{R^2}, \quad B_3 = \frac{B_2}{R^2}$$

$$A_2 = A_1^2 - B_1^2, \quad B_2 = 2A_1B_1, \quad A_1 = \sin\varphi_1 \cdot \mathrm{ch}\psi_1, \quad B_1 = \cos\varphi_1 \cdot \mathrm{sh}\psi_1$$

$$\varphi_1 = \pi(\varphi - 0.5), \quad \psi_1 = \pi\psi$$

3. Анализ результатов и примеры. Полученное строгое решение рассматриваемой задачи, представленное в виде аналитической взаимосвязи $z = f(W)$, позволяет определять на основе элементарных расчетных зависимостей (2.7)–(2.10) для заданных значений параметра импульсного очага d и глубины его расположения h значения всех необходимых гидромеханических характеристик потенциального потока (поля) в области физического течения в начальный момент времени.

При этом значения скоростей потока V_x и V_y – горизонтальной и вертикальной составляющих полной скорости V, определяются по зависимостям [10, 15]:

$$V_x = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{\Delta\psi}{\Delta y}, \quad V_y = \pm\frac{\Delta\varphi}{\Delta y} = \pm\frac{\Delta\psi}{\Delta x}, \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \tag{3.1}$$

в которых $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$ и Δx, Δy расчетные величины приращений напоров и функции тока при соответствующих приращениях координат для рассматриваемых (весьма малых) участков области течения.

Очертание же профиля самого источника импульса определяется полуобратным методом – последовательным конформным отображением четверти дуги BC единичной окружности в области $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ (рис. 2, e) на область физического течения $z = x + iy$ (рис. 2, a) через промежуточные комплексные области $S = S_1 + iS_2$, $t = t_1 + it_2$, $z_1 = x_1 + iy_1$ (рис. 2, d, c, b). При этом профиль источника импульса BC получает вид, описываемый параметрическими зависимостями:

$$\begin{aligned} x_{BC} &= \sqrt{\frac{\sqrt{(2m^2\gamma_1^2 + h^2)^2 + 4m^4\gamma_1^2(1 - \gamma_1^2)} - (2m^2\gamma_1^2 + h^2)}{2}} \\ y_{BC} &= -\sqrt{\frac{\sqrt{(2m^2\gamma_1^2 + h^2)^2 + 4m^4\gamma_1^2(1 - \gamma_1^2)} + (2m^2\gamma_1^2 + h^2)}{2}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

для задаваемых значений $0 \le \gamma_1 \le 1$ – от 0 (точки B) до 1 (точки C), где величина m находится по формуле (2.2).

На рис. 1, a, b приведены общая схема задачи в виде симметричного потенциального потока, а также результаты расчетов основных гидромеханических параметров для двух частных случаев при начальном импульсном воздействии (в усл. ед.):

– при $h = 5$; $d = 1$ (на правой половине рисунка)

$$q = 1.016, \quad V_A = 0.118, \quad V_B = 0.709, \quad V_C = 0.592$$

– при $h = 1$; $d = 1$ (на левой половине рисунка)

$$q = 1.755, \quad V_A = 0.792, \quad V_B = 1.667, \quad V_C = 0.833$$

При этом, для указанных случаев на рисунке также представлены:

– криволинейные ортогональные гидродинамические сетки потенциального потока;

– очертания профилей импульсного источника BC в физической области течения (кривые 1);

– очертания семейств кривых функции тока (относительных расходов $\bar{\psi} = \psi/q$) – через 0.25 (кривые 2);

– очертания семейств кривых линий равных напоров (потенциальной функции φ) – через 0.25 (кривые 3);

– эпюры функции тока $\bar{\psi}$ вдоль границ стока (кривые 4);

– эпюры выходных скоростей потока $V_y = V_{out}$ вдоль границ стока (кривые 5);

– эпюры действующих вертикальных скоростей V_y и напоров φ вдоль осевой линии области течения при $h/d = 5$ (соответственно, кривые 6 и 7).

Ортогональность расчетных криволинейных ячеек гидродинамических сеток (рис. 1, b) непосредственно подтверждает потенциальность распределения гидромеханических характеристик потока импульсного источника.

Заключение. В работе дано новое гидромеханическое решение задачи заглубленного начального импульсного воздействия на гидрогеофизический массив (водный, грунтовый) с непосредственным аналитическим определением в элементарных функциях гидромеханических характеристик потенциального потока. При этом, воздействие очага импульса для начального момента времени моделировалось источником потенциального потока округленного профиля с единичным напором, а область стока – линией нулевого потенциала. Полученное строгое решение рассматриваемой задачи с установлением аналитической взаимосвязи между физической областью течения и комплексным потенциалом основано на теории функции комплексного переменного – использовании метода последовательных конформных отображений с определением полей гидромеханических характеристик потока в начальный момент времени. Приведены примеры расчета для двух частных случаев с построением: криволинейных ортогональных гидродинамических сеток, очертаний семейств линий равных напоров и линий токов, профилей источников импульса, а также эпюр скоростей потока, напоров и относительных расходов потенциального потока.

Часть работы, связанная с гидродинамикой водоемов, выполнена в рамках темы № FMWZ-2022-0001 государственного задания ИВП РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильинский Н.Б., Лабуткин А.Г., Салимов Р.Б.* Некоторые задачи о взрыве заглубленных зарядов // Труды семинара по краевым задачам. Вып. 12. Казань: КГУ, 1975. С. 63–75.
2. *Меркулов В.И.* Популярная гидродинамика. Киев: Техніка, 1976. 145 с.
3. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977. 407 с.

4. *Пелиновский Е.Н.* Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. 276 с.
5. *Иванов Б.А.* Распределение в пространстве энергии сейсмических волн при метеоритном ударе и взрыве // Динамические процессы в геосферах. Сб. науч. трудов ИДГ РАН. Вып. 10. М.: Графитекс, 2018. С. 46–53. https://doi.org/10.26006/IDG.2018.10.20170
6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука. 1973. 736 с.
7. *Шувалов В.В.* Выброс воды в атмосферу при падении астероидов в океан // Динамические процессы в геосферах. Сб. науч. трудов ИДГ РАН. Вып. 10. М.: Графитекс, 2018. С. 126–131. https://doi.org/10.26006/IDG.2018.10.20187
8. *Покровский Г.И.* Возведение плотин направленным взрывом. М.: Недра, 1974. 113 с.
9. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Часть 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
10. *Анахаев К.Н.* Гидромеханический расчет потенциального потока при ударе плиты о воду // Доклады Академии наук. 2012. Т. 445. № 4. С. 407–411.
11. *Лаврик В.И., Фильчакова В.П., Яшин А.А.* Конформные отображения физико-топологических моделей. Киев: Наукова думка, 1990. 374 с.
12. *Anakhaev K.N., Ivanov P.M., Temikuev Kh.M., Chechenov M.M.* The hydromechanical problem of pulse punching of a plate // Doklady Physics. 2018. V. 63. № 7. P. 288–292. https://doi.org/10.1134/S1028335818070017
13. *Betz A.* Konforme Abbildung. Berlin: Springer – Verlag, 1960. 407 s.
14. *Лаврик В.И., Савенков В.Н.* Справочник по конформным отображениям. Киев: Наукова думка, 1970. 252 с.
15. *Павловский Н.Н.* Собрание сочинений. Т. 2. Движение грунтовых вод. М.– Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 771 с.
16. *Милн-Томсон Л.* Эллиптические функции Якоби и тета-функции // Справочник по специальным функциям. Под редакцией *М. Абрамовица и И. Стиган* М.: Наука. 1979. С. 380–400.
17. *Анахаев К.Н.* О расчете потенциальных потоков // Доклады Академии наук. 2005. Т. 401. № 3. С. 337–341.
18. *Анахаев К.Н.* Об определении эллиптических функций Якоби // Вестник РУДН. Серия: математика, информатика, физика. 2009. № 2. С. 90–95.