

УДК 531.259.2; 532.321

## К СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ТРУБОПРОВОДА, ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКИ

© 2023 г. А. Г. Хакимов<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup> *Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия*

*\*e-mail: hakimov@anrb.ru*

Поступила в редакцию 17.02.2022 г.

После доработки 21.04.2022 г.

Принята к публикации 26.04.2022 г.

На основе предположения о начальной деформированной форме поперечного сечения трубопровода, цилиндрической оболочки, углеродной нанотрубки (УНТ) без начальных напряжений определяются критические давления внутри и вне этих элементов конструкций. Изучено статическое взаимодействие неустойчивостей под действием вышеуказанных факторов.

*Ключевые слова:* трубопровод, цилиндрическая оболочка, УНТ, жидкость, газ, плотность, давление

**DOI:** 10.31857/S0572329922060101, **EDN:** KHNUNH

**1. Введение.** Актуальность работы заключается в том, что до сих пор не учитывается влияние среднего давления на устойчивость кругового поперечного сечения трубопровода, цилиндрической оболочки, УНТ. Эти элементы конструкций широко применяются в нефте–газо–продуктопроводах, в ракетных и авиационных двигателях, в воздушной и гидравлической системах самолетов и т.д. В гидроупругих системах одновременно происходит взаимодействие упругих и гидродинамических неустойчивостей. Внешние воздействия могут быть как независимыми друг от друга, так и связанными [1]. Этой теме посвящена обширная литература. К ней примыкает также серия работ по колебаниям тонкостенных тел, не контактирующих с внешней средой. Работа [2] посвящена аналитическому и численному исследованиям свободных колебаний цилиндрических оболочек с акустической средой. Сравнительный анализ результатов расчетов, полученных для моделей сжимаемой и несжимаемой среды, показывает, что при решении задачи определения параметров свободных колебаний оболочки сжимаемостью среды можно пренебречь. В то же время для решения практических задач, требующих учета полного спектра собственных частот системы оболочка–среда, должна использоваться модель сжимаемой среды, в рамках которой получены результаты о влиянии жесткости оболочки на спектр частот объема среды. Некоторые результаты решений для цилиндрических оболочек, в том числе взаимодействующих со средой, представлены в статьях [3–5].

В [6] представлен метод, позволяющий определять частоты колебаний цилиндрических оболочек бесконечной длины в акустической среде. Полученные результаты показывают, что существует низкая частота, когда излучение не происходит, и высокая частота, когда внешний источник обеспечивает передачу энергии, которая излучает-

ся. Резонанс возникает только в диапазоне низких частот. Метод требует только модификации для учета эффекта статического давления в окружающей среде.

Среди многочисленных видов применения микро- и нанопленок, нанопроволок, нанотрубок может быть указано также использование их в качестве детекторов и сенсоров в химии, биологии и т.д. [7–9].

Моделируя микротрубки тонкими упругими цилиндрическими оболочками [10], получены собственные частоты и собственные моды ограниченных упругих колебаний в системе оболочка–жидкость. Метод молекулярной механики (ММ) применяется для определения частот и форм собственных колебаний, а также для определения критических параметров выпучивания и послекритических форм деформирования закрученных по торцам однослойных УНТ [11].

Обзор инженерных микро- и наноматериалов для биомедицинского применения приводится в [12], который дает представление об уникальных свойствах технологии микроигл и ее способности к эффективному трансдермальному транспорту терапевтических соединений.

Однако во всех этих работах влияние среднего давления сред и разности площадей выпуклой и вогнутой поверхностей не учитывается. Это взаимодействие принимается во внимание в статьях [13, 14] в случае легких газов, когда присоединенная масса сред мала. В [15] определяется спектр частот двухпорного резонатора с учетом взаимодействия среднего избыточного давления на поверхности резонатора и кривизны, а также действия осевой нагрузки.

В данной работе определяются критические давления внутри и вне трубопровода, цилиндрической оболочки, УНТ с учетом действия среднего избыточного давления на их поверхностях.

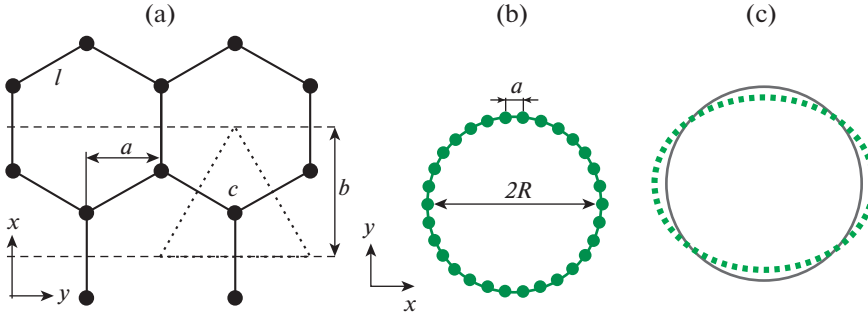
Например, ввиду одинакового давления по всей поверхности УНТ объектом исследования может быть принято кольцо с эффективными значениями радиуса  $R$ , толщины  $h$ , ширины  $b$ , плотности по площади  $\rho h$ , модуля упругости  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ . Кольцо образуется зигзагообразным рядом атомов углерода [16, 17]. Если ось  $x$  направлена вдоль трубки, ось  $y = R\theta$  по окружности ( $\theta$  – центральный угол), то расстояние по  $y$  равно  $a = l\cos 30^\circ = 0.123$  нм. На рис. 1, а в виде равностороннего треугольника показана площадь  $S$ , приходящаяся на один атом. При  $4S = 3\sqrt{3}l^2$  эффективная ширина кольца равна  $b = Sa^{-1} = 0.213$  нм. Так как масса атома углерода равна  $m = 1.99 \times 10^{-26}$  кг, то эффективная плотность по площади

$$\rho h = mS^{-1} = 0.76 \times 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-2} \quad (1.1)$$

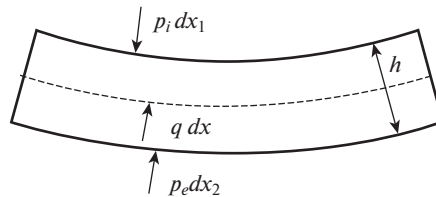
Во многих работах (в том числе в обзорных статьях [18–20]) приводятся значения модуля упругости  $E = (1–5) \times 10^6$  МПа, толщины однослойного графена  $h = 0.07–0.34$  нм. Эти данные получены экспериментально, а также с привлечением теоретического моделирования. Разброс значений  $E$  и  $h$  объясняется разными образцами для испытаний, аппаратурой, методами определения и т.д. Эффективный радиус  $R$  определяется через число атомов  $N$ , образующих кольцо рис. 1, б.

$$2\pi R = aN \quad (1.2)$$

**2. Постановка задачи.** На внутреннюю и внешнюю поверхности элемента конструкции действуют давления  $p_i$  и  $p_e$  жидкостей с плотностями  $\rho_i$  и  $\rho_e$  (рис. 2). Здесь  $p_i, p_e$  – избыточные давления. При определении нагрузки  $q$  исходим из предположения, что  $\rho_i, \rho_e$  и  $p_i, p_e$  остаются постоянными при изменении формы поперечного сечения. Предполагается идеальность и несжимаемость жидкостей. Давления внутри и вне трубопровода  $p_i, p_e$  изменяются независимо друг от друга. Интенсивность их возрастания от нуля будем считать такой, чтобы инерционные силы в системе были малы.



**Рис. 1.** (а) Кольцо шириной  $b$ , образованное двумя поперечными сечениями углеродной нанотрубки. Площадь, приходящаяся на один атом  $C$ , показана пунктирными линиями (равносторонний треугольник). (б) Поперечное сечение УНТ хиральности зигзаг  $(K, 0)$  на плоскости  $(x, y)$ . Показан случай  $K = 15$ , при этом поперечное сечение характеризуется  $N = 2K = 30$  атомами углерода. (с) Первая гармоника изгибных колебаний УНТ, соответствующая номеру  $n = 2$  в выражении (3.1). Показано на примере УНТ  $(27, 0)$ , для которой  $N = 54$  и радиус  $R = 9.47 \text{ \AA}$ .



**Рис. 2.** Элемент  $dx$  срединной поверхности изогнутой оболочки.

При  $p_i = 0, p_e = 0$  поперечное сечение конструкции имеет малое отклонение от круговой формы в виде (рис. 1, с)

$$w_0 = W_{0n} \cos n\theta, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

где  $W_{0n}$  – амплитуда малого начального отклонения; радиальные перемещения считаем положительными, если они происходят в направлении к центру поперечного сечения конструкции. При этом остаточные напряжения в нем отсутствуют, например, в результате отжига [1].

Уравнение радиальной статики тонкого кольца относительно функции прогиба в предположении о нулевой деформации срединной поверхности имеет вид [21]

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{TR^2}{D} \left( \frac{\partial^4 (w_0 + w)}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial \theta^2} \right) = \frac{R^4}{D} \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} \quad (2.2)$$

где  $q$  – давление, приведенное к срединной поверхности,  $T$  – кольцевое растягивающее усилие при  $p_i > p_e$ , которое находится по формуле

$$T = p_i \int_0^{\pi/2} \left( R - \frac{h}{2} \right) \cos \theta d\theta - p_e \int_0^{\pi/2} \left( R + \frac{h}{2} \right) \cos \theta d\theta = (p_i - p_e) R - (p_i + p_e) \frac{h}{2} \quad (2.3)$$

Линейное уравнение (2.2) получено преобразованием дифференциальных уравнений равновесия элемента кольца в проекциях на касательную и нормаль с учетом изменения кривизны линии поперечного сечения [21].

Распределенная сила  $q$  определяется по формуле [13, 14]

$$q = p_e - p_i + \frac{(p_i + p_e)h}{2R} \quad (2.4)$$

Уравнение статики элемента конструкции (2.2) с учетом (2.3), (2.4) для  $p_i, p_e, R$  не зависящих от  $\theta$ , записывается

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \left[ (p_i - p_e)R - (p_i + p_e) \frac{h}{2} \right] \frac{R^2}{D} \left( \frac{\partial^4 (w_0 + w)}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (2.5)$$

**3. Изгиб оболочки.** Примем частное решение уравнения (2.5) в виде

$$w = W_n \cos n\theta, \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.1)$$

где  $W_n$  – амплитуда малого отклонения. Подставляя (2.1), (3.1) в уравнение (2.5), получаем отношение амплитуды текущего прогиба к амплитуде начального прогиба

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{3(\alpha_1 - \alpha)}{n^2 - 1 - 3(\alpha_1 - \alpha)}, \quad \alpha = \frac{(p_i - p_e)R^3}{3D}, \quad \alpha_1 = \frac{(p_i + p_e)R^2 h}{2 \cdot 3D} \quad (3.2)$$

Здесь параметр  $\alpha$  учитывает перепад давления  $p_i - p_e$ , а параметр  $\alpha_1$  учитывает действие среднего давления  $(p_i + p_e)/2$ . Из (3.2) видно, что прогиб тем больше, чем меньше величина давления внутри оболочки  $p_i$  и больше давление вне оболочки  $p_e$ . При  $\alpha_1 - \alpha = (n^2 - 1)/3$  прогиб в рассматриваемом линейном приближении растет неограниченно. Причем это выражение представляет собой критическую комбинацию внешних воздействий  $p_i, p_e$ , для системы с заданными параметрами материалов и размерами  $E, h, R$ . С возрастанием внешних воздействий рост прогиба (3.2) происходит наиболее быстро при  $n = 2$ . Указанная критическая комбинация внешних воздействий по (3.2) является минимальной при  $n = 2$ . Таким образом, получено условие устойчивости кругового поперечного сечения трубопровода, цилиндрической оболочки, УНТ с учетом действия среднего давления.

**4. Анализ результатов и примеры.** При  $\alpha = 0, \alpha_1 = 1$  происходит потеря устойчивости круговой формы поперечного сечения конструкции в виде эллипса ( $n = 2$ ), причем, критическое давление потери устойчивости равно

$$p_{ecr} = p_{icr} = \frac{3D}{R^2 h} = \frac{Eh^2}{4R^2(1 - \nu^2)}$$

откуда следует, что оболочка может потерять устойчивость даже при нулевом перепаде давления вследствие действия среднего давления. Например, при  $E = 2 \times 10^5$  МПа,  $\nu = 0.3, R = 0.1$  м,  $h = 0.002$  м и при нулевом перепаде давления критическое давление потери устойчивости  $p_{ecr}$  равно 21.9 МПа.

Для одностенной УНТ с хиральностью кресло (10, 10), радиусом  $R = 0.678$  м [22] для модуля упругости  $E = 0.972 \cdot 10^6$  МПа, коэффициента Пуассона  $\nu = 0.278$  [18] и толщине  $h$ , принятой равной 0.052 м, при нулевом перепаде давления критическое давление потери устойчивости  $p_{ecr}$  равно 1.55 ГПа [22], что соответствует давлению перехода круговой формы поперечного сечения к эллиптической или потере устойчивости кругового поперечного сечения одностенной УНТ.

При  $n = 2$  из условия устойчивости кругового поперечного сечения трубопровода, цилиндрической оболочки, УНТ с учетом действия среднего давления следует выражение для критического внешнего давления  $p_{ecr}$

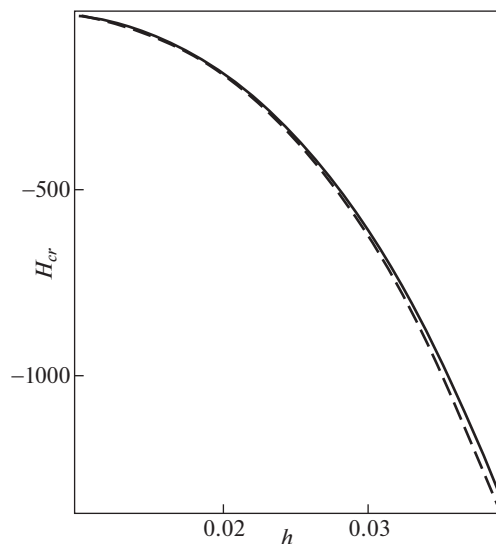


Рис. 3. Зависимости критической глубины погружения  $H_{cr}$  (м) от толщины трубопровода  $h$  (м).

$$p_{ecr} = p_i \frac{2R - h}{2R + h} + \frac{6D}{R^2 (2R + h)}$$

Если оболочка или трубопровод находятся в море, то критическая глубина погружения  $H_{cr}$  определяется

$$H_{cr} = -\frac{p_{ecr}}{\rho g}$$

где  $\rho$ ,  $g$  — плотность воды и ускорение свободного падения.

Конструкция трубопроводов, состоящих из слоистых (концентрических) труб, обеспечивает хорошие балластные, теплоизоляционные и антикоррозионные свойства [23–25], частично защищает от механических повреждений, пластических деформаций, трещинообразования.

На рис. 3 приводятся зависимости критической глубины погружения  $H_{cr}$  (м) от суммарной толщины стенки  $h$  (м) трубопровода, состоящего из слоистых (концентрических) труб, обеспечивающих хорошие балластные, теплоизоляционные и антикоррозионные свойства [23–25] для внутреннего давления  $p_i = 0.1$  МПа, приведенного модуля упругости слоистого трубопровода  $E = 1.5 \times 10^5$  МПа, коэффициента Пуассона  $\nu = 0.3$ , радиуса  $R = 0.57$  м, плотности воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, ускорения свободного падения  $g = 9.8$  м/с без учета и с учетом действия среднего давления (штриховая, сплошная линии соответственно). Видно, что учет среднего давления приводит к уменьшению критической глубины погружения.

На рис. 4 приводятся зависимости критической глубины погружения  $H_{cr}$  (м) от суммарной толщины стенки  $h$  (м) трубопровода, состоящего из слоистых (концентрических) труб, для коэффициента Пуассона  $\nu = 0.3$ , плотности воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, ускорения свободного падения  $g = 9.8$  м/с и разных значений приведенного модуля упругости слоистого трубопровода  $E = 2.0, 1.5, 1.0 \times 10^5$  МПа (сплошная, штриховая, пунктирная линии соответственно): (а) радиус  $R$  равен 0.7 м, внутреннее давление  $p_i =$

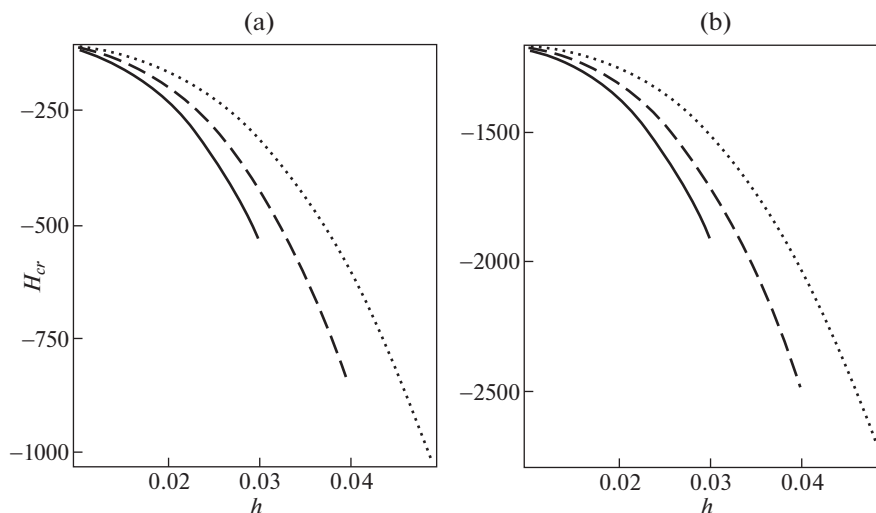


Рис. 4. Зависимости критической глубины погружения  $H_{cr}$  (м) от толщины трубопровода  $h$  (м).

= 1 МПа; (b) радиус  $R$  равен 0.57 м, внутреннее давление  $p_i = 11.5$  МПа. Предполагается, что плавучесть трубопровода отрицательная. Видно, что с увеличением толщины стенки трубопровода и уменьшением его радиуса критическая глубина погружения увеличивается.

**5. Заключение.** Оболочка может потерять устойчивость даже при нулевом перепаде давления вследствие действия среднего давления.

Получено условие устойчивости кругового поперечного сечения трубопровода, цилиндрической оболочки, УНТ с учетом действия среднего давления.

Эти результаты могут быть использованы при моделировании деформирования оболочек, контактирующих с жидкостью и газом, в том числе микро- и наноразмеров. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00578.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильгамов М.А. Взаимодействие неустойчивостей Эйлера, Гельмгольца, Рейля // ЖТФ. 2018. Т. 63. № 2. С. 163–167.  
<https://doi.org/10.21883/JTF.2018.02.45401.2144>
2. Дяченко И.А., Миронов А.А. Аналитические и численные исследования свободных колебаний цилиндрических оболочек с акустической средой // Проблемы прочности и пластичности. 2021. Т. 83. № 1. С. 35–48.  
<https://doi.org/10.32326/1814-9146-2021-83-1-35-48>
3. Leizerovich G.S., Taranukha N.A. Nonobvious features of dynamics of circular cylindrical shells // Mech. Solids. 2008. V. 43. № 2. P. 246–253.  
<https://doi.org/10.3103/S0025654408020106>
4. Rawat A., Matsagar V., Nagpal A. Finite element analysis of thin circular cylindrical shells // Proc. Indian Nat. Sci. Acad. 2016. V. 82. № 2. P. 349–355.  
<https://doi.org/10.16943/ptinsa/2016/48426>
5. Farshidianfar A., Oliazadeh P. Free vibration analysis of circular cylindrical shells: comparison of different shell theories // Int. J. Mech. Appl. 2012. V. 2. № 5. P. 74–80.  
<https://doi.org/10.5923/j.mechanics.20120205.04>
6. Bleich H.H., Baron M.L. Free and Forced vibration of an infinitely long cylindrical shell in an infinite acoustic medium // J. Appl. Mech. Trans. ASME. 1954. V. 21. № 2. P. 167–177.

7. O'Connell A.D., Hofheinz M., Ansmann Mю et al. Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator // Nature. 2010. V. 464. P. 697–703.  
<https://doi.org/10.1038/nature08967>
8. Burg T.P., Godin M., Knudsen S.M. et al. Weighing of biomolecules, single cells and single nanoparticles in fluid // Nature. 2007. V. 446. P. 1066–1069.  
<https://doi.org/10.1038/nature05741>
9. Husale S., Persson H.H.J., Sahin O. DNA nanomechanics allows direct digital detection of complementary DNA and microRNA targets // Nature. 2009. V. 462. P. 1075–1078.  
<https://doi.org/10.1038/nature08626>
10. Sirenko Y.M., Stroschio M.A., Kim K.W. Elastic vibrations of microtubules in a fluid // Phys. Rev. V. 53. № 1. 1996. P. 1003–1010.
11. Аннин Б.Д., Алехин В.В., Бабичев А.В., Коробейников С.Н. Применение метода молекулярной механики к задачам устойчивости и собственных колебаний однослойных углеродных нанотрубок // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 5. С. 65–83.
12. Chen Y., Alba M., Tieu T., Tong Z., Minhas R.S., Rudd D., Voelcker N.H., Cifuentes-Rius A., and El-nathan R. Engineering Micro-Nanomaterials for Biomedical Translation // Adv. NanoBiomed Res. 2021. № 1. P. 2100002.  
<https://doi.org/10.1002/anbr.202100002>
13. Ильгамов М.А. Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки // ДАН. 2017. Т. 476. № 4. С. 402–405.
14. Ильгамов М.А. Влияние поверхностных эффектов на изгиб и колебания нанопленок // ФТТ. 2019. Т. 61. № 10. С. 1825–1830.  
<https://doi.org/10.21883/ФТТ.2019.10.48255.381>
15. Игатов М.А., Khakimov A.G. Influence of pressure on the frequency spectrum of micro and nanoresonators on hinged supports // J. Appl. Comput. Mech. 2021. V. 7. № 2. P. 977–983.  
<https://doi.org/10.22055/JACM.2021.36470.2848>
16. Дмитриев С.В., Сунагатова И.Р., Ильгамов М.А., Павлов И.С. Собственные частоты радиальных колебаний углеродных нанотрубок // ЖТФ. 2021. Т. 91. Вып. 11. С. 1732–1737.  
<https://doi.org/10.21883/JTF.2021.11.51536.127-21>
17. Dmitriev S.V., Semenov A.S., Savin A. ., Iगतov M.A., Bachurin D.V. Rotobreather in a carbon nanotube bundle // Journal of Micromechanics and Molecular Physics 2021, 2050010.  
<https://doi.org/10.1142/S2424913020500101>
18. Елецкий А.В. Механические свойства углеродных нанотрубок и материалов на их основе // Усп. физ.наук. 2007. Т. 177. № 3. С. 233–274.
19. Harik V.M. Ranges of applicability for the continuum beam model in the mechanics of carbon nanotubes and nanorods // Solid State Commun. 2001. V. 120. P. 331–335.  
[https://doi.org/10.1016/S0038-1098\(01\)00383-0](https://doi.org/10.1016/S0038-1098(01)00383-0)
20. Qian D., Wagner G.J., Lin W.K., Ju M.F., Ruoff R.S. Mechanics of carbon nanotubes // Appl. Mech. Rev. 2002. V. 55. № 6. P. 495–532.  
<https://doi.org/10.1115/1.1490129>
21. Timoshenko S.P., Young D.H., Weaver W. Vibration Problems in Engineering. New York: John Wiley & Sons, 1974.
22. Wu J., Zang J., Larade B., Guo H., Gong X.G., Liu F. Computational design of carbon nanotube electromechanical pressure sensors // Phys. Rev. B. 2004. V. 69. P. 153406.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.69.153406>
23. Bi K., Hao H. Using pipe-in-pipe systems for subsea pipeline vibration control // Eng. Struct. 2016. V. 109. P. 75–84.  
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.11.018>
24. Davaripour F., Quinton B.W.T., Pike K. Effect of damage progression on the plastic capacity of a subsea pipeline // Ocean Eng. 2021. V. 234.  
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.109118>
25. Cheng A., Chen N.-Z. Corrosion fatigue crack growth modelling for subsea pipeline steels // Ocean Eng. 2017. V. 142. P. 10–19.  
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2017.06.057>