

УДК 539.3+519.65

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТИ БЫСТРОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕНИЯХ В БРУСЕ

© 2023 г. А. Д. Чернышов^{a,*}, В. В. Горайнов^{b,**}, М. И. Попов^{a,***}

^a Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, Россия

^b Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия

*e-mail: chernyshovad@mail.ru

**e-mail: gorvit77@mail.ru

***e-mail: mihail_semilov@mail.ru

Поступила в редакцию 27.03.2022 г.

После доработки 24.04.2022 г.

Принята к публикации 25.04.2022 г.

С помощью быстрой тригонометрической интерполяции решена задача о напряжениях в брусе прямоугольного сечения. Проведено сравнение полученного приближенного аналитического решения с точным, в ходе которого исследована относительная погрешность компонент перемещений, компонент тензора напряжений, невязка уравнений равновесия Ламе и невязка граничных условий. Установлено, что при использовании в быстрых разложениях граничной функции второго порядка и небольшом количестве членов в рядах Фурье (от двух до шести) максимальная относительная погрешность δ_{\max} компонент перемещений и компонент тензора напряжений составляет менее одного процента. С увеличением порядка граничной функции и/или количества членов N в рядах Фурье δ_{\max} быстро уменьшается. Увеличение порядка граничной функции является более эффективным способом уменьшения погрешности вычислений δ_{\max} , чем увеличение количества членов в рядах Фурье. При исследовании интенсивности напряжений $\bar{\sigma}$ в брусе с различными габаритными размерами прямоугольного сечения, но одинаковой площадью всех сечений выяснилось, что наименьшее значение $\bar{\sigma}_{\max}$ среди всех сечений наблюдается в брусе с квадратным сечением.

Ключевые слова: перемещения, компоненты тензора напряжений, уравнения Ламе, быстрые разложения, быстрая тригонометрическая интерполяция, высокая точность

DOI: 10.31857/S0572329922100142, EDN: KIQKNY

1. Введение. Среди аналитических методов, применяемых для решения задач теории упругости, можно выделить такие как метод угловых суперпозиций [1, 2], метод расширения границ [3], метод возмущений [4–6], лучевой метод [7–9], разложения в ряды [10–14] и по функциям Фадля–Папковича [15, 16], двухшаговый метод последовательного возмущения параметров [17], метод быстрых разложений [18–20]. Последний, из перечисленных методов, имеет следующие положительные качества, которыми в совокупности не обладает ни один из известных методов:

1. Доказана сходимость и получена оценка погрешности метода [21].

2. Показана быстрая сходимость используемых рядов Фурье, что позволяет ограничиваться в расчетах небольшим количеством членов ряда и, как следствие, проводить расчет на ЭВМ с высокой точностью при большой экономии времени [22].

3. Метод быстрых разложений применим для решения как линейных [18–20], так и нелинейных задач [23–25], а также задач для криволинейных областей [24, 25], с подвижными границами [25] и фазовыми превращениями [25].

Классическую тригонометрическую интерполяцию чаще всего используют для улучшения качества обработки изображений [26] и восстановления периодических дискретных сигналов конечной длительности [27]. Для решения инженерных задач интегро-дифференциального типа применение классической тригонометрической интерполяции на конечном отрезке проблематично из-за невозможности ее дифференцирования в общем случае и большой ошибки между интерполяционными точками. Устранение подобных недостатков можно осуществить при использовании быстрой тригонометрической интерполяции. Быстрая тригонометрическая интерполяция использовалась при исследовании напряжений в клине [20], расчете траектории космических кораблей [23], решении нелинейного уравнения теплопроводности для криволинейной области с условиями Дирихле [24] и решении двухфазной задачи Стефана с внутренним источником [25]. В данной работе будет исследована погрешность быстрой тригонометрической интерполяции в зависимости от порядка граничной функции и количества членов в рядах Фурье на примере решения задачи о напряжениях в бруссе.

2. Постановка задачи. В условиях плоской деформации проекции вектора перемещений материальных точек бруса зависят только от координат x, y :

$$U = U(x, y), \quad V = V(x, y), \quad W = 0 \quad (2.1)$$

Компоненты тензора напряжения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial V}{\partial y}, & \sigma_{yy} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V}{\partial y} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} \\ \sigma_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), & \sigma_{zz} &= \lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right), & \sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Запишем уравнения равновесия Ламе для перемещений с учетом массовых сил $X(x, y), Y(x, y)$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + X(x, y) = 0 \quad (2.3)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + Y(x, y) = 0 \quad (2.4)$$

К уравнениям (2.3), (2.4) необходимо добавить граничные условия. Будем считать, что упругий брус имеет прямоугольное сечение $\Omega = (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$. На сторонах бруса зададим условия Дирихле в общем виде

$$U|_{x=0} = f_1(y), \quad U|_{x=a} = f_3(y), \quad V|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad V|_{x=a} = \varphi_3(y) \quad (2.5)$$

$$U|_{y=0} = f_2(x), \quad U|_{y=b} = f_4(x), \quad V|_{y=0} = \varphi_2(x), \quad V|_{y=b} = \varphi_4(x) \quad (2.6)$$

Функции, входящие в граничные условия (2.5) и (2.6), следует подбирать с учетом условий их согласования

$$\begin{aligned} f_1(0) &= f_2(0), & f_3(0) &= f_2(a), & f_3(b) &= f_4(a), & f_4(0) &= f_1(b) \\ \varphi_1(0) &= \varphi_2(0), & \varphi_3(0) &= \varphi_2(a), & \varphi_3(b) &= \varphi_4(a), & \varphi_4(0) &= \varphi_1(b) \end{aligned} \quad (2.7)$$

выполнение которых позволит найти непрерывное решение задачи (2.3)–(2.6).

В качестве примера функции из (2.5), (2.6) зададим следующим образом

$$\begin{aligned} f_1(y) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad f_3(y) = K \sin 1.2\pi ay, \quad f_4(x) = K \sin 1.2\pi bx \\ \varphi_1(y) = 0, \quad \varphi_2(x) = 0, \quad \varphi_3(x) = -K \sin a \sin y, \quad \varphi_4(x) = -K \sin x \sin b \end{aligned} \quad (2.8)$$

Массовые силы в (2.3), (2.4) запишем выражениями

$$\begin{aligned} X(x, y) &= (1.2\pi y)^2 (\lambda + 2\mu) K \sin 1.2\pi xy + \\ &+ (\lambda + \mu) K \cos x \cos y + (1.2\pi x)^2 \mu K \sin 1.2\pi xy \\ Y(x, y) &= -(\lambda + 2\mu) K \sin x \sin y - \mu K \sin x \sin y + \\ &+ (\lambda + \mu) \left((1.2\pi)^2 xy K \sin 1.2\pi xy - 1.2\pi K \cos 1.2\pi xy \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Зависимости (8) и (9) подобраны так, что задача (3)–(6) имеет точное решение

$$U(x, y) = K \sin 1.2\pi xy, \quad V(x, y) = -K \sin x \sin y \quad (2.10)$$

где K – константа, регулирующая величину перемещений.

Точное решение (2.10) позволит провести исследование погрешности решения краевой задачи (2.3)–(2.6) путем сравнения с приближенным аналитическим решением, полученным методом быстрых разложений. При сравнении будут вычислены: относительная погрешность компонент перемещений (2.1), компонент тензора напряжений (2.2), невязка уравнений равновесия Ламе (2.3), (2.4) и невязка граничных условий (2.5), (2.6).

3. Метод и построение решения. Для решения используем приближенный метод быстрых разложений [21], в соответствии с которым представим $U = U(x, y)$ и $V = V(x, y)$ в виде суммы граничных функции $M_{2p}^U(x, y)$, $M_{2p}^V(x, y)$ и ряда Фурье по синусам

$$\begin{aligned} U = M_{2p}^U(x, y) + \sum_{m=1}^{N_1} u_m(x) \sin m\pi \frac{y}{b}, \quad V = M_{2p}^V(x, y) + \sum_{m=1}^{N_1} v_m(x) \sin m\pi \frac{y}{b} \\ x \in [0; a], \quad y \in [0; b] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь N_1 – число учитываемых членов в рядах Фурье. Граничные функции $M_{2p}^U(x, y)$ и $M_{2p}^V(x, y)$ порядка $2p$ определяются равенствами

$$M_{2p}^U(x, y) = \sum_{i=1}^{2p+2} A_i(x) P_i(y), \quad M_{2p}^V(x, y) = \sum_{i=1}^{2p+2} B_i(x) P_i(y) \quad (3.2)$$

где $A_i(x)$ и $B_i(x)$, $i = 1 - 2p + 2$ – коэффициенты граничных функций, $P_i(y)$, $i = 1 - 2p + 2$ – быстрые полиномы [21].

Для исследования влияния порядка граничной функции на точность решения краевой задачи (2.3)–(2.6) в быстрых разложениях (3.1) будем использовать граничные функции второго, четвертого и шестого порядков, которые получаются из (3.2) при $p = 1$, $p = 2$ и $p = 3$ соответственно, т.е.

$$\begin{aligned} M_2^U(x, y) &= \sum_{i=1}^4 A_i(x) P_i(y), \quad M_2^V(x, y) = \sum_{i=1}^4 B_i(x) P_i(y) \\ M_4^U(x, y) &= M_2^U(x, y) + \sum_{i=5}^6 A_i(x) P_i(y), \quad M_4^V(x, y) = M_2^V(x, y) + \sum_{i=5}^6 B_i(x) P_i(y) \\ M_6^U(x, y) &= M_4^U(x, y) + \sum_{i=7}^8 A_i(x) P_i(y), \quad M_6^V(x, y) = M_4^V(x, y) + \sum_{i=7}^8 B_i(x) P_i(y) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Быстрые полиномы $P_i(y)$ и коэффициенты $A_i(x)$, $B_i(x)$ определяются равенствами

$$\begin{aligned}
P_1(y) &= \left(1 - \frac{y}{b}\right), & P_2(y) &= \frac{y}{b}, & P_3(y) &= \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6b} - \frac{by}{3}\right), & P_4(x) &= \left(\frac{y^3}{6b} - \frac{by}{6}\right) \\
P_5(y) &= \left(\frac{y^4}{24} - \frac{y^5}{120b} - \frac{by^3}{18} + \frac{b^3y}{45}\right), & P_6(y) &= \left(\frac{y^5}{120b} - \frac{by^3}{36} + \frac{7b^3y}{360}\right) \\
P_7(y) &= \left(\frac{y^6}{720} - \frac{y^7}{5040b} - \frac{by^5}{360} + \frac{b^3y^3}{270} - \frac{2b^5y}{945}\right) \\
P_8(y) &= \left(\frac{y^7}{5040b} - \frac{by^5}{720} + \frac{7b^3y^3}{2160} - \frac{31b^5y}{15120}\right) \\
A_1(x) &= U|_{y=0}, & A_2(x) &= U|_{y=a}, & A_3(x) &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_{y=0}, & A_4(x) &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Big|_{y=a} \\
A_5(x) &= \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} \Big|_{y=0}, & A_6(x) &= \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} \Big|_{y=a}, & A_7(x) &= \frac{\partial^6 U}{\partial y^6} \Big|_{y=0}, & A_8(x) &= \frac{\partial^6 U}{\partial y^6} \Big|_{y=a} \\
B_1(x) &= V|_{y=0}, & B_2(x) &= V|_{y=a}, & B_3(x) &= \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|_{y=0}, & B_4(x) &= \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|_{y=a} \\
B_5(x) &= \frac{\partial^4 V}{\partial y^4} \Big|_{y=0}, & B_6(x) &= \frac{\partial^4 V}{\partial y^4} \Big|_{y=a}, & B_7(x) &= \frac{\partial^6 V}{\partial y^6} \Big|_{y=0}, & B_8(x) &= \frac{\partial^6 V}{\partial y^6} \Big|_{y=a}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Для возможности выполнения выражений (3.4) необходимо потребовать, чтобы $U = U(x, y)$ и $V = V(x, y)$ удовлетворяли условию гладкости $(U, V) \in C^{(6)}(\Omega)$.

Неизвестными в (3.1) являются функции, зависящие только от одной переменной x

$$A_i(x) - A_{2p+2}(x), \quad B_1(x) - B_{2p+2}(x), \quad p = 1 \dots 3, \quad u_m(x), \quad v_m(x), \quad m = 1 \dots N_1 \tag{3.5}$$

Функции из (3.5) представим быстрыми разложениями по переменной x . Причем в повторных разложениях будут использованы граничные функции тех же порядков, что и в быстрых разложениях (3.1) по переменной y :

$$\begin{aligned}
A_i(x) &= M_{2p}^{A(i)}(x) + \sum_{n=1}^{N_2} a_{n+2p+2}^{(i)} \sin n\pi \frac{x}{a}, & B_i(x) &= M_{2p}^{B(i)}(x) + \sum_{n=1}^{N_2} b_{n+2p+2}^{(i)} \sin n\pi \frac{x}{a} \\
u_m(x) &= M_{2p}^{u(m)}(x) + \sum_{n=1}^{N_2} u_{n+2p+2}^{(m)} \sin n\pi \frac{x}{a}, & v_m(x) &= M_{2p}^{v(m)}(x) + \sum_{n=1}^{N_2} v_{n+2p+2}^{(m)} \sin n\pi \frac{x}{a} \\
i &= 1 \dots 2p + 2, & p &= 1 \dots 3, & m &= 1 \dots N_1
\end{aligned} \tag{3.6}$$

В (3.6) обозначено через N_2 – число учитываемых членов в рядах Фурье. Граничные функции $M_{2p}^{A(i)}(x)$, $M_{2p}^{B(i)}(x)$, $M_{2p}^{u(m)}(x)$, $M_{2p}^{v(m)}(x)$ определяем равенствами

$$\begin{aligned}
M_{2p}^{A(i)}(x) &= \sum_{k=1}^{2p+2} a_k^{(i)} P_k(x), & M_{2p}^{B(i)}(x) &= \sum_{k=1}^{2p+2} b_k^{(i)} P_k(x) \\
M_{2p}^{u(m)}(x) &= \sum_{k=1}^{2p+2} u_k^{(m)} P_k(x), & M_{2p}^{v(m)}(x) &= \sum_{k=1}^{2p+2} v_k^{(m)} P_k(x)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где $a_k^{(i)}$, $b_k^{(i)}$, $u_k^{(m)}$ и $v_k^{(m)}$, $i = 1 \dots 2p + 2$, $p = 1 \dots 3$, $m = 1 \dots N_1$ – коэффициенты граничных функций вторичных разложений; $P_k(x)$, $k = 1 - 2p + 2$ – быстрые полиномы [21].

При $p = 3$ выражения для коэффициентов граничных функций $a_k^{(i)}$, $b_k^{(i)}$, $u_k^{(m)}$, $v_k^{(m)}$ и быстрых полиномов $P_k(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 P_1(x) &= \left(1 - \frac{x}{a}\right), \quad P_2(x) = \frac{x}{a}, \quad P_3(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right), \quad P_4(x) = \left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) \\
 P_5(x) &= \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120a} - \frac{ax^3}{18} + \frac{a^3x}{45}\right), \quad P_6(x) = \left(\frac{x^5}{120a} - \frac{ax^3}{36} + \frac{7a^3x}{360}\right) \\
 P_7(x) &= \left(\frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040a} - \frac{ax^5}{360} + \frac{a^3x^3}{270} - \frac{2a^5x}{945}\right) \\
 P_8(x) &= \left(\frac{x^7}{5040a} - \frac{ax^5}{720} + \frac{7a^3x^3}{2160} - \frac{31a^5x}{15120}\right)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 a_1^{(i)} &= A_i|_{x=0}, \quad a_2^{(i)} = A_i|_{x=a}, \quad a_3^{(i)} = A_i''|_{x=0}, \quad a_4^{(i)} = A_i''|_{x=a}, \quad a_5^{(i)} = A_i^{(4)}|_{x=0} \\
 a_6^{(i)} &= A_i^{(4)}|_{x=a}, \quad a_7^{(i)} = A_i^{(6)}|_{x=0}, \quad a_8^{(i)} = A_i^{(6)}|_{x=a}, \quad i = 1..8
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
 b_1^{(i)} &= B_i|_{x=0}, \quad b_2^{(i)} = B_i|_{x=a}, \quad b_3^{(i)} = B_i''|_{x=0}, \quad b_4^{(i)} = B_i''|_{x=a}, \quad b_5^{(i)} = B_i^{(4)}|_{x=0} \\
 b_6^{(i)} &= B_i^{(4)}|_{x=a}, \quad b_7^{(i)} = B_i^{(6)}|_{x=0}, \quad b_8^{(i)} = B_i^{(6)}|_{x=a}, \quad i = 1..8
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 u_1^{(m)} &= u_m|_{x=0}, \quad u_2^{(m)} = u_m|_{x=a}, \quad u_3^{(m)} = u_m''|_{x=0}, \quad u_4^{(m)} = u_m''|_{x=a}, \quad u_5^{(m)} = u_m^{(4)}|_{x=0} \\
 u_6^{(m)} &= u_m^{(4)}|_{x=a}, \quad u_7^{(m)} = u_m^{(6)}|_{x=0}, \quad u_8^{(m)} = u_m^{(6)}|_{x=a}, \quad m = 1..N_1
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
 v_1^{(m)} &= v_m|_{x=0}, \quad v_2^{(m)} = v_m|_{x=a}, \quad v_3^{(m)} = v_m''|_{x=0}, \quad v_4^{(m)} = v_m''|_{x=a}, \quad v_5^{(m)} = v_m^{(4)}|_{x=0} \\
 v_6^{(m)} &= v_m^{(4)}|_{x=a}, \quad v_7^{(m)} = v_m^{(6)}|_{x=0}, \quad v_8^{(m)} = v_m^{(6)}|_{x=a}, \quad m = 1..N_1
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Если $p = 2$, то для описания граничных функций (3.7) из (3.8) следует взять первые шесть полиномов, а в (3.9)–(3.12) учесть первые шесть коэффициентов. При $p = 1$ граничные функции (3.7) будут содержать первые четыре полинома из (3.8) и первые четыре коэффициента из (3.9)–(3.12).

Таким образом, краевая задача (2.3)–(2.6) сведена к определению $2(2p + 2 + N_1)(2p + 2 + N_2)$ неизвестных коэффициентов

$$\begin{aligned}
 a_k^{(i)}, b_k^{(i)}, u_k^{(m)}, v_k^{(m)}, \quad i = 1..2p + 2, \quad k = 1..2p + 2, \quad p = 1..3, \quad m = 1..N_1 \\
 a_{n+2p+2}^{(i)}, b_{n+2p+2}^{(i)}, u_{n+2p+2}^{(m)}, v_{n+2p+2}^{(m)}, \quad n = 1..N_2
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Значения восьми коэффициентов

$$a_1^{(1)}, b_1^{(1)}, a_2^{(1)}, b_2^{(1)}, a_1^{(2)}, b_1^{(2)}, a_2^{(2)}, b_2^{(2)} \tag{3.14}$$

входящих в (3.13), находятся при помощи значений компонент перемещений $U = U(x, y)$ и $V = V(x, y)$ в угловых точках прямоугольной области (см. формулы (3.4), (3.9), (3.10)). С учетом условия согласований (2.7), коэффициенты (3.14) определяются равенствами

$$a_1^{(1)} = b_1^{(1)} = a_2^{(1)} = b_2^{(1)} = a_1^{(2)} = b_1^{(2)} = 0, \quad a_2^{(2)} = K \sin 1.2\pi ab, \quad b_2^{(2)} = -K \sin a \sin b$$

Для нахождения остальных $2(2p + 2 + N_1)(2p + 2 + N_2) - 8$ коэффициентов из (3.13) используем быструю тригонометрическую интерполяцию, апробированную в работах [20, 22–25]. Для этого подставим $U = U(x, y)$ и $V = V(x, y)$ из (3.1) в дифферен-

циальные уравнения (2.3), (2.4) и граничные условия (2.5), (2.6). Полученные таким образом выражения в статье не приводим из-за их громоздкости.

Из граничных условий (2.5), (2.6) линейные алгебраические уравнения получим следующим образом. Промежуток $[0, b]$ равномерно разобьем точками $y = y_s = sb/(N_1 + 2p + 1)$, $s = 0, 1, \dots, N_1 + 2p + 1$ на $N_1 + 2p + 1$ отрезков и запишем уравнения, полученные из граничных условий (2.5) при подстановке $U = U(x, y)$ и $V = V(x, y)$ из (3.1), в каждой внутренней расчетной точке $y = y_s$, $s = 1, \dots, N_1 + 2p$. Будем иметь $4(N_1 + 2p)$ линейных алгебраических уравнений. Аналогично, промежуток $[0, a]$ равномерно разобьем точками $x = x_s = sa/(N_2 + 2p + 1)$, $s = 0, 1, \dots, N_2 + 2p + 1$ на $N_2 + 2p + 1$ отрезков и запишем уравнения, полученные из граничных условий (2.6) при подстановке $U = U(x, y)$ и $V = V(x, y)$ из (3.1), в каждой внутренней расчетной точке $x = x_s$, $s = 1, \dots, N_2 + 2p$. Тем самым, будем иметь еще $4(N_2 + 2p)$ линейных алгебраических уравнений.

Из дифференциальных уравнений (2.3), (2.4) линейные алгебраические уравнения запишем следующим образом. На область прямоугольника $x \in [0; a]$, $y \in [0; b]$ равномерно нанесем сетку в $N_2 + 2p + 2$ точках $x = x_s = sa/(N_2 + 2p + 1)$, $s = 0, 1, \dots, N_2 + 2p + 1$ и в $N_1 + 2p + 2$ точках $y = y_s = sb/(N_1 + 2p + 1)$, $s = 0, 1, \dots, N_1 + 2p + 1$. Для составления системы линейных алгебраических уравнений используются только внутренние точки, образующие сетку из $(N_1 + 2p)(N_2 + 2p)$ внутренних точек (x_s, y_s) . Затем, уравнения (2.3), (2.4) при подстановке в них $U = U(x, y)$ и $V = V(x, y)$ из (3.1) запишем в каждой расчетной точке (x_s, y_s) . В итоге, получаем $2(N_1 + 2p)(N_2 + 2p)$ линейных алгебраических уравнений. В результате приходим к замкнутой системе $2(N_1 + 2p)(N_2 + 2p) + 4(N_1 + 2p) + 4(N_2 + 2p)$ линейных алгебраических уравнений относительно оставшихся $(2(2p + 2 + N_1)(2p + 2 + N_2) - 8)$ неизвестных из (3.13). Данная система уравнений решена в среде Maple. После чего, найденные неизвестные (3.13) подставлены в быстрые разложения (3.1). Тем самым, построено приближенное аналитическое решение краевой задачи (2.3)–(2.6).

4. Полученные результаты и их анализ. В вычислительных экспериментах будем использовать граничные функции (3.3) второго, четвертого и шестого порядков. Количество членов в рядах Фурье первого (3.1) и второго (3.6) быстрых разложений примем одинаковыми, т.е. $N_1 = N_2 = N$, и выполним расчеты при $N = 2 \dots 6$. В качестве материала бруса выберем тяжелый бетон В30 с характеристиками [28] $E = 32.5 \times 10^9$ Па, $\nu = 0.2$. Тогда коэффициенты Ламе будут равны $\lambda = 9.03 \times 10^9$ Па, $\mu = 1.35 \times 10^{10}$ Па. Величину параметра K и размеры сечения примем равными $K = 10^{-6}$, $a = 1$ м, $b = 1$ м.

Приближенное аналитическое решение (3.1) сравнивается с точным (2.10). Относительная погрешность перемещений (2.1), тензора напряжений (2.2), невязка уравнений равновесия Ламе (2.3), (2.4) и граничных условий (2.5), (2.6) вычислялась по формуле

$$\delta = |\Delta|/f_{\max} \cdot 100\%$$

где Δ – абсолютная погрешность, f_{\max} – максимальное значение исследуемого объекта.

Покажем на рис. 1–4 относительную погрешность расчетов, выполненных при использовании граничной функции четвертого порядка M_4 ($p = 2$) для $N = 4$. Из рисунков видно, что максимальная относительная погрешность δ_{\max} у компонент тензора напряжений σ_{xx} , σ_{zz} , σ_{xy} и невязки дифференциального уравнения (2.3) достигается в точке (1; 1), а у компонент перемещений U и V , компоненты тензора напряжений σ_{yy} и невязки дифференциального уравнения (2.4) – в ее окрестности. Поэтому в табл. 1–3 приведены значения δ_{\max} всех исследуемых объектов в этих точках для гра-

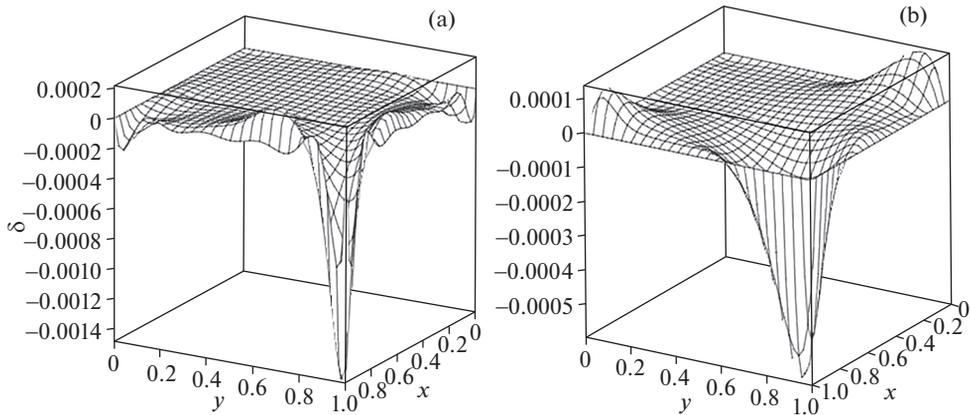


Рис. 1. Относительная погрешность δ компонент перемещений: (a) U , (b) V .

ничных функций второго M_2 ($p = 1$), четвертого M_4 ($p = 2$) и шестого M_6 ($p = 3$) порядков при $N = 2 \dots 6$.

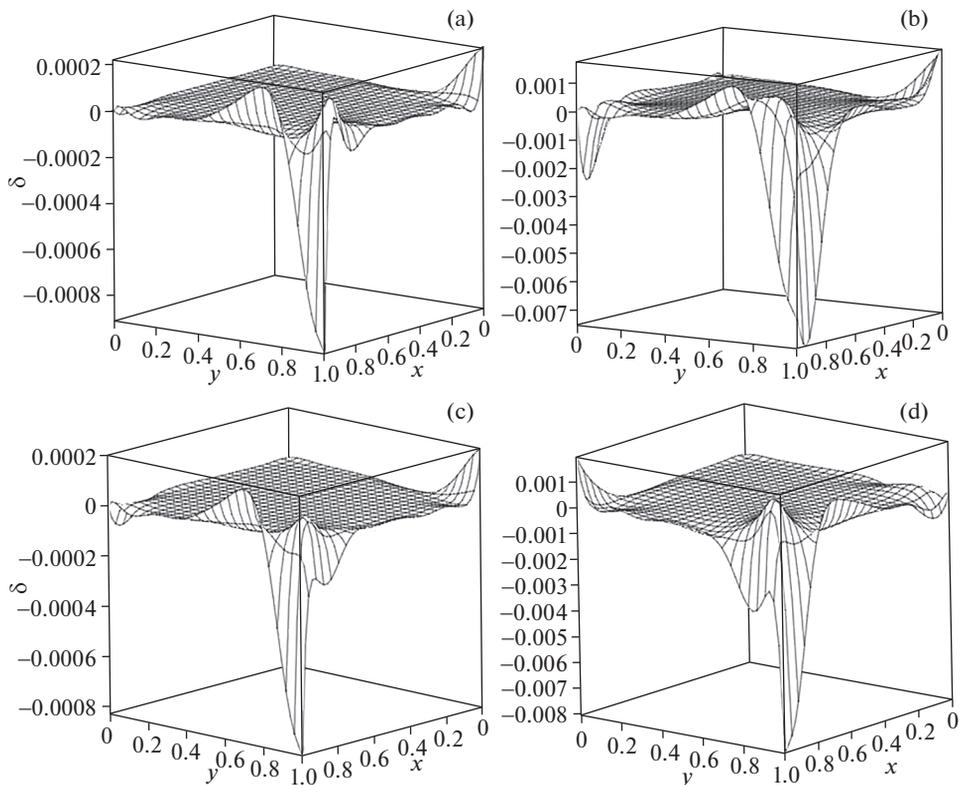


Рис. 2. Относительная погрешность δ компонент тензора напряжений: (a) σ_{xx} , (b) σ_{yy} , (c) σ_{zz} , (d) σ_{xy} .

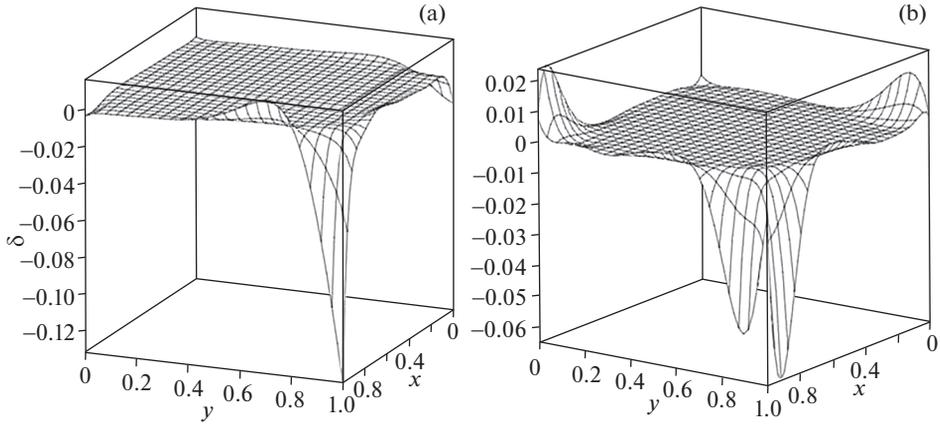


Рис. 3. Невязка δ уравнений равновесия Ламе: (а) (3), (б) (4).

Из табл. 1–3 можно увидеть, что точнее всего определяются компоненты перемещений U и V (искомая функция). По сравнению с компонентами перемещений точность нахождения компонент тензора напряжений σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} (первые производные искомой функции) падает на порядок, а точность вычисления невязки уравнений равновесия Ламе (2.3), (2.4) (вторые производные искомой функции) падает на два порядка. Подобная тенденция наблюдается при выборе любого порядка граничной функции и для любого N , а также согласуется с многочисленными вычислительными экспериментами авторов, например [15].

Табл. 1 показывает, что даже при использовании граничной функции второго порядка M_2 и небольшом количестве членов в рядах Фурье $N = 3$ достигается точность вычислений компонент перемещений и компонент тензора напряжений ($\delta_{\max} < 1\%$) выше, чем точность входных данных из справочников. С увеличением порядка граничной функции и/или количества членов в рядах Фурье (см. табл. 2 и 3) эта точность быстро возрастает. Так, если в быстрых разложениях (3.1) и (3.6) использовать граничную функцию второго порядка M_2 , то увеличение N количества членов в рядах Фурье на четыре (с двух до шести) ведет к увеличению точности вычислений компонент перемещений, компонент тензора напряжений и невязки дифференциальных уравнений (2.3), (2.4) примерно на один порядок (см. табл. 1). Такое же увеличение точности вычислений можно достичь, используя граничную функцию четвертого порядка M_4 (см. табл. 2) и увеличивая N в рядах Фурье на три (с двух до пяти). Если же применить граничную функцию шестого порядка M_6 (см. табл. 3), то повышение точности вычислений на порядок можно достичь увеличением N в рядах Фурье на два (с двух до четырех).

Из табл. 1–3 видно, что граничные условия $U|_{x=0}$, $U|_{y=0}$, $V|_{x=0}$, $V|_{y=0}$ выполняются точно при выборе любого порядка граничной функции и при любом количестве учитываемых членов в рядах Фурье. Точность выполнения граничных условий $U|_{x=a}$, $U|_{y=b}$, $V|_{x=a}$, $V|_{y=b}$, а также дифференциальных уравнений (2.3), (2.4), и точность вычисления компонент перемещений и компонент тензора напряжений зависят от выбора порядка граничной функции и количества членов в рядах Фурье. Если увеличить порядок граничной функции (со второго до четвертого или с четвертого до шестого), а N во всех расчетах взять одинаковым, то относительная погрешность δ_{\max} у компо-

Таблица 1. Относительная погрешность δ_{\max} , % при использовании M_2

Исследуемый объект		N				
		2	3	4	5	6
Компоненты перемещений	U	0.32	0.13	7.28×10^{-2}	4.21×10^{-2}	2.70×10^{-2}
	V	0.12	5.80×10^{-2}	3.00×10^{-2}	1.67×10^{-2}	9.80×10^{-3}
Компоненты тензора напряжений	σ_{xx}	1.59	0.73	0.41	0.25	0.17
	σ_{yy}	1.16	0.53	0.30	0.18	0.12
	σ_{zz}	1.42	0.65	0.36	0.22	0.15
	σ_{xy}	1.46	0.67	0.37	0.23	0.15
Невязка ДУ	(3)	11.12	6.36	4.25	3.08	2.35
	(4)	12.66	4.87	2.19	1.15	0.86
Невязка ГУ	$U _{x=a}, U _{y=b}$	0.27	0.11	4.70×10^{-2}	2.52×10^{-2}	1.47×10^{-2}
	$V _{x=a}, V _{y=b}$	1.11×10^{-3}	4.51×10^{-4}	2.18×10^{-4}	1.18×10^{-4}	7.10×10^{-5}
	$U _{x=0}, U _{y=0}$	0	0	0	0	0
	$V _{x=0}, V _{y=0}$	0	0	0	0	0

нент перемещений и компонент тензора напряжений уменьшится на два порядка. Также на два порядка уменьшится невязка граничных условий $U|_{x=a}, U|_{y=b}$. Для граничных условий $V|_{x=a}, V|_{y=b}$ невязка уменьшается на три порядка.

Анализируя поведение максимальной невязки дифференциальных уравнений (2.3), (2.4) можно сделать следующий вывод: увеличение порядка граничной функции второго до четвертого ведет к уменьшению невязки на один порядок, а при увеличе-

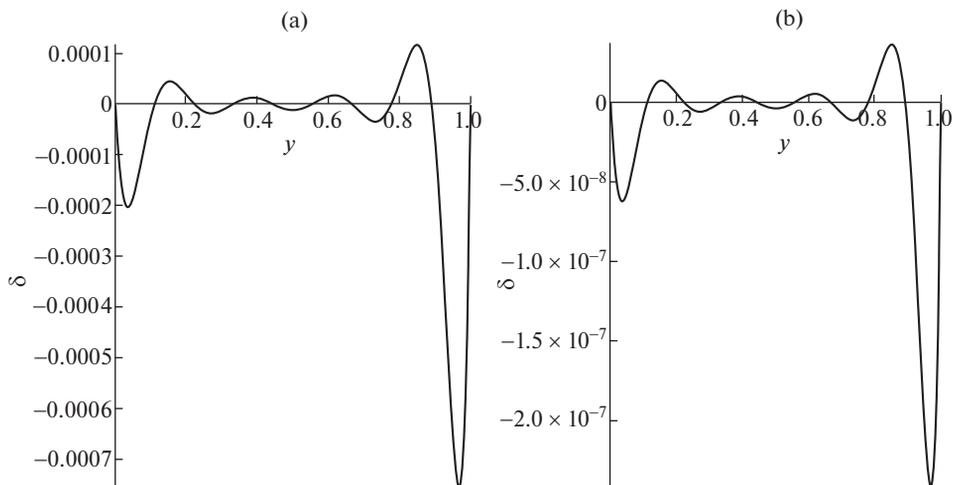
**Рис. 4.** Невязка граничных условий: (a) $U|_{x=a}, U|_{y=b}$, (b) $V|_{x=a}, V|_{y=b}$.

Таблица 2. Относительная погрешность δ_{\max} , % при использовании M_4

Исследуемый объект		N				
		2	3	4	5	6
Компоненты перемещений	U	1.50×10^{-2}	3.50×10^{-3}	1.49×10^{-3}	7.25×10^{-4}	3.80×10^{-4}
	V	4.80×10^{-3}	1.52×10^{-3}	5.90×10^{-4}	2.70×10^{-4}	1.35×10^{-4}
Компоненты тензора напряжений	σ_{xx}	6.15×10^{-2}	2.10×10^{-2}	9.10×10^{-3}	4.79×10^{-3}	2.82×10^{-3}
	σ_{yy}	5.32×10^{-2}	1.81×10^{-2}	7.50×10^{-3}	3.61×10^{-3}	2.06×10^{-3}
	σ_{zz}	5.46×10^{-2}	1.87×10^{-2}	8.10×10^{-3}	4.31×10^{-3}	2.59×10^{-3}
	σ_{xy}	5.61×10^{-2}	1.92×10^{-2}	8.29×10^{-3}	4.33×10^{-3}	2.60×10^{-3}
Невязка ДУ	(3)	0.64	0.26	0.13	7.53×10^{-2}	4.67×10^{-2}
	(4)	0.38	0.13	6.52×10^{-2}	3.51×10^{-2}	2.10×10^{-2}
Невязка ГУ	$U _{x=a}, U _{y=b}$	6.81×10^{-3}	2.00×10^{-3}	7.50×10^{-4}	3.32×10^{-4}	1.65×10^{-4}
	$V _{x=a}, V _{y=b}$	1.92×10^{-6}	6.10×10^{-7}	2.40×10^{-7}	1.10×10^{-7}	5.50×10^{-8}
	$U _{x=0}, U _{y=0},$	0	0	0	0	0
	$V _{x=0}, V _{y=0}$	0	0	0	0	0

нии порядка граничной функции с четвертого до шестого на возрастание точности еще влияет число N . Так, при $N = 2$ уменьшение невязки будет составлять один порядок, при $N = 6$ уже два порядка.

Таблица 3. Относительная погрешность δ_{\max} , % при использовании M_6

Исследуемый объект		N				
		2	3	4	5	6
Компоненты перемещений	U	2.22×10^{-4}	6.00×10^{-5}	2.09×10^{-5}	8.52×10^{-6}	3.90×10^{-6}
	V	1.05×10^{-4}	2.59×10^{-5}	8.45×10^{-6}	3.27×10^{-6}	1.37×10^{-6}
Компоненты тензора напряжений	σ_{xx}	1.44×10^{-3}	4.14×10^{-4}	1.60×10^{-4}	7.50×10^{-5}	3.77×10^{-5}
	σ_{yy}	1.55×10^{-3}	4.18×10^{-4}	1.42×10^{-4}	5.65×10^{-5}	2.78×10^{-5}
	σ_{zz}	1.28×10^{-3}	3.67×10^{-4}	1.46×10^{-4}	6.70×10^{-5}	3.50×10^{-5}
	σ_{xy}	1.31×10^{-3}	3.37×10^{-4}	1.45×10^{-4}	6.68×10^{-5}	3.50×10^{-5}
Невязка ДУ	(3)	2.00×10^{-2}	6.34×10^{-3}	2.57×10^{-3}	1.21×10^{-3}	6.32×10^{-4}
	(4)	1.29×10^{-2}	3.82×10^{-3}	1.50×10^{-3}	6.49×10^{-4}	3.37×10^{-4}
Невязка ГУ	$U _{x=a}, U _{y=b}$	1.14×10^{-4}	2.58×10^{-5}	8.80×10^{-6}	3.40×10^{-6}	1.44×10^{-6}
	$V _{x=a}, V _{y=b}$	2.24×10^{-9}	5.59×10^{-10}	1.95×10^{-10}	7.60×10^{-11}	3.35×10^{-11}
	$U _{x=0}, U _{y=0},$	0	0	0	0	0
	$V _{x=0}, V _{y=0}$	0	0	0	0	0

Таблица 4. Количество линейных алгебраических уравнений

Граничная функция	N				
	2	3	4	5	6
$M_2 (p = 1)$	64	90	120	154	192
$M_4 (p = 2)$	120	154	192	234	280
$M_6 (p = 3)$	192	234	280	330	384

Таблица 5. Время расчета

Граничная функция	N				
	2	3	4	5	6
$M_2 (p = 1)$	6.98 с	10.42 с	14.42 с	19.37 с	25.40 с
$M_4 (p = 2)$	12.20 с	16.85 с	24.28 с	37.75 с	49.73 с
$M_6 (p = 3)$	23.68 с	34.07 с	47.65 с	67.57 с	96.62 с

С помощью табл. 4 и 5 можно ответить на вопрос, что более эффективно для уменьшения погрешности вычислений — увеличение порядка граничной функции или увеличение количества членов в ряде Фурье. В табл. 4 представлено количество линейных алгебраических уравнений в системах, которые необходимо решить для расчета данных, указанных в табл. 1–3. В табл. 5 записано время расчета программы в секундах на персональном компьютере с процессором Intel Core i3-4160 и ОЗУ 8 ГБ. Из табл. 4 видно, что одинаковая трудоемкость вычислений получается при выборе следующих комбинаций параметров p и N :

- 1) $p = 1$ и $N = 4$ или $p = 2$ и $N = 2$ —120 линейных алгебраических уравнений;
- 2) $p = 1$ и $N = 5$ или $p = 2$ и $N = 3$ —154 линейных алгебраических уравнения;
- 3) $p = 1$ и $N = 6$ или $p = 2$ и $N = 4$ или $p = 3$ и $N = 2$ —192 линейных алгебраических уравнения;
- 4) $p = 2$ и $N = 5$ или $p = 3$ и $N = 3$ —234 линейных алгебраических уравнения;
- 5) $p = 2$ и $N = 6$ или $p = 3$ и $N = 4$ —280 линейных алгебраических уравнений.

Учитывая данные табл. 1–3 можно сделать вывод, что в каждом из пяти указанных вариантов комбинаций параметров p и N точность расчетов выше (значение δ_{\max} в среднем падает на порядок) в случаях, соответствующих более высокому значению параметра p , т.е. более высокому порядку граничной функции. Принимая во внимание данные табл. 5, отметим, что повышение порядка граничной функции приводит и к сокращению времени расчета. Для пяти комбинаций параметров p и N , соответствующих одинаковой трудоемкости расчетов, уменьшение времени расчета при большем значении параметра p составляет от 2.5% (третья комбинация) до 15% (первая комбинация).

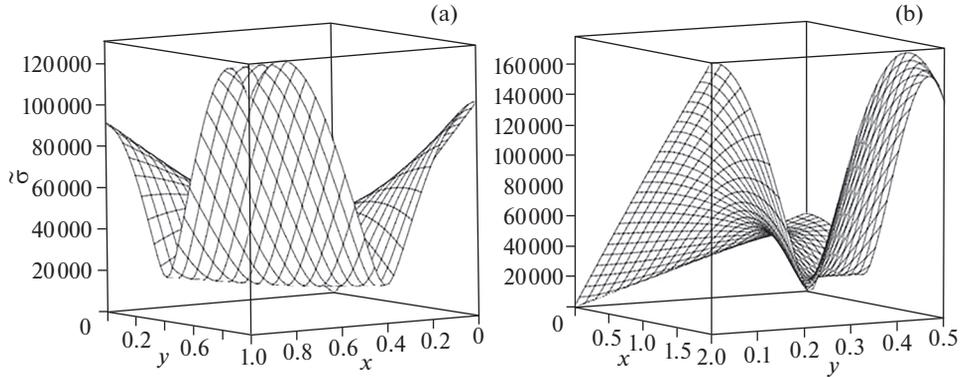
При изучении свойств поля напряжений в бруске наибольший интерес представляет исследование влияния геометрических размеров его сечения на величину интенсивности напряжений $\tilde{\sigma}$ [29]

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\sigma_{xy})^2)/2}$$

и расположение точки с наибольшим ее значением $\tilde{\sigma}$.

Таблица 6. Значения $\bar{\sigma}_{\max}$ и ее координаты

Размеры сечения	$a = b = 1$	$a = 2, b = 1/2$	$a = 3, b = 1/3$	$a = 4, b = 1/4$	$a = 5, b = 1/5$
Значение $\bar{\sigma}_{\max}$	1.31×10^5 Па	1.79×10^5 Па	2.65×10^5 Па	3.54×10^5 Па	4.43×10^5 Па
Координаты точки	(0.86; 1)	(2; 0)	(3; 0)	(4; 0)	(5; 0)

Рис. 5. Интенсивность напряжений $\bar{\sigma}$: (a) $a = b = 1$, (b) $a = 2, b = 1/2$.

Размеры сечения в расчетах подобраны таким образом, чтобы площадь сечения бруса оставалась постоянной. Вычислительные эксперименты показали, что качественный вид профилей интенсивности напряжений $\bar{\sigma}$ квадратного и прямоугольного сечений бруса будут различны. Виды подобных профилей для случаев $a = b = 1$ и $a = 2, b = 1/2$ изображены на рис. 5, из которого видно, что точка с максимальной интенсивностью напряжений $\bar{\sigma}_{\max}$ для квадратного сечения расположена на стороне $y = 1$, а для прямоугольного — находится в угловой точке (2; 0). Значения $\bar{\sigma}_{\max}$ для различных значений a и b , и координаты точки, в которой достигается $\bar{\sigma}_{\max}$ записаны в табл. 6. Анализируя данные этой таблицы, можно сделать вывод, что для прямоугольного сечения наибольшая интенсивность напряжений $\bar{\sigma}_{\max}$ всегда расположена в крайней точке длинной жестко заземленной стороны при $x = a$. Также из табл. 6 видно, что напряжения в брус тем выше, чем больше превосходство длины одной стороны над длиной другой стороны прямоугольного сечения. Наименьшая интенсивность напряжений среди всех сечений наблюдается в брус с квадратным сечением.

5. Заключение. В статье показана эффективность быстрой тригонометрической интерполяции при решении задач теории упругости на примере задачи о напряжениях в брус прямоугольного сечения. При использовании в быстрых разложениях граничной функции второго порядка и небольшом количестве членов в рядах Фурье (от двух до шести) максимальная относительная погрешность δ_{\max} компонент перемещений и компонент тензора напряжений составляет менее 1%, что является приемлемой погрешностью для большинства технических расчетов. С увеличением порядка граничной функции и/или количества членов N в рядах Фурье погрешность δ_{\max} быстро уменьшается. Увеличение порядка граничной функции является более эффективным способом уменьшения погрешности δ_{\max} по сравнению с увеличением количества членов в рядах Фурье.

При исследовании интенсивности напряжений σ в брус с различными габаритными размерами прямоугольного сечения, но одинаковой площадью всех сечений выяснилось, что наименьшее значение σ_{\max} среди всех сечений наблюдается в брус с квадратным сечением. В этом случае точка с σ_{\max} расположена на стороне $y = b$ не далеко от угловой точки $(a; b)$. Для прямоугольного сечения точка с максимальной интенсивностью напряжений σ_{\max} будет расположена на длинной стороне в точке $(a; 0)$. При этом, чем больше превосходство длины одной стороны прямоугольного сечения над длиной его другой стороны, тем выше σ_{\max} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савичев И.С., Чернышов А.Д. Применение метода угловых суперпозиций для решения контактной задачи о сжатии упругого цилиндра // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 3. С. 151–162.
2. Чернышов А.Д. Метод угловых суперпозиций для краевых задач. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. 350 с.
3. Чернышов А.Д. Решение задачи о кручении упругого стержня – угольного сечения методом расширения границ // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 6 (298). С. 193–200.
4. Гоцев Д.В., Ковалев А.В., Спорыхин А.Н. Локальная неустойчивость пластин с запрессованными кольцевыми включениями при упругопластическом поведении материалов // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 3 (247). С. 146–151.
5. Минаева Н.В. О применении метода возмущений в механике деформируемых тел // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 1. С. 37–39.
6. Шашкин А.И., Минаева Н.В., Гриценко А.В. Квазистатическое деформирование упругого стержня при продольном изгибе // Изв. высш. уч. зав. Машиностр. 2008. № 12. С. 21–25.
7. Вerveйко Н.Д., Егоров М.В. Математическое моделирование динамического деформирования упруговязкопластических оболочек конечной длины лучевым методом // Вестн. Самарск. гос. тех. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. № 2. С. 325–343. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1610>
8. Севастьянов Г.М., Штука В.И., Буренин А.А. Лучевой метод в приближенном решении задачи об ударном нагружении несжимаемого цилиндрического слоя // Вестн. Чувашск. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер.: Мех. пред. сост. 2015. № 4 (26). С. 50–62.
9. Буренин А.А., Рагозина В.Е. К построению приближенных решений краевых задач ударного деформирования // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 2. С. 106–113.
10. Вестяк А.В., Земсков А.В. Модель нестационарных упруго-диффузионных колебаний шарнирно опертой балки Тимошенко // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 5. С. 107–119. <https://doi.org/10.31857/S0572329920030174>
11. Гандилян Д.В., Устинов К.Б. Влияние поверхностных эффектов в задачах теории упругости для областей, ограниченных неконцентрическими окружностями // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 5. С. 95–106. <https://doi.org/10.31857/S0572329920050062>
12. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Пространственное нестационарное движение упругой сферической оболочки // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 2. С. 118–128.
13. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Мурашкин Е.В. Об остаточных напряжениях в окрестности цилиндрического дефекта сплошности вязкоупругопластического материала // ПМТФ. 2006. Т. 47. № 2 (276). С. 110–119.
14. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of elasticity. 3rd ed. McGraw-Hill Inc., 1970. 567 p. = Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
15. Меньшова И.В. Разложения по функциям Фадля–Папковича. Основные формулы // Вестн. Чувашск. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер.: Мех. пред. сост. 2012. № 4 (14). С. 133–139.
16. Себряков Г.Г., Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т.Д. Разложения Лагранжа по функциям Фадля–Папковича в краевой задаче теории упругости для полуполосы // Доклады академии наук. 2015. Т. 460. № 5. С. 540. <https://doi.org/10.7868/S0869565215050126>

17. *Петров В.В.* Двухшаговый метод последовательного возмущения параметров и его применение к решению нелинейных задач механики твердого деформируемого тела // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред. Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 2001. С. 6–12.
18. *Горяйнов В.В., Попов М.И., Чернышов А.Д.* Решение задачи о напряжениях в остром клиновидном режущем инструменте методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 5. С. 113–130.
<https://doi.org/10.1134/S0572329919050088>
19. *Чернышов А.Д., Горяйнов В.В., Кузнецов С.Ф., Никифорова О.Ю.* Применение быстрых разложений для построения точных решений задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки // Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. мех. 2021. № 70. С. 127–142.
<https://doi.org/10.17223/19988621/70/11>
20. *Chernyshov A.D., Goryainov V.V., Danshin A.A.* Analysis of the stress field in a wedge using the fast expansions with pointwise determined coefficients // IOP Conf. Ser.: J. Phys: Conf. Ser. 2018. V. 973. P. 012002.
<https://doi.org/10.1088/174265>.
21. *Чернышов А.Д.* Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений // Ж. выч. мат. физ. Т. 54. № 1. 2014. С. 13–24.
<https://doi.org/10.7868/S0044466914010062>
22. *Чернышов А.Д., Горяйнов В.В., Лешонков О.В., Соболева Е.А., Никифорова О.Ю.* Сравнение скорости сходимости быстрых разложений с разложениями в классический ряд Фурье // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Сист. анализ инф. технол. 2019. № 1. С. 27–34.
<https://doi.org/10.17308/sait.2019.1/1273>
23. *Чернышов А.Д., Горяйнов В.В., Чернышов О.А.* Применение метода быстрых разложений для расчета траекторий космических кораблей // Изв. вузов. Авиаци. техн. 2015. № 2. С. 41–47.
24. *Чернышов А.Д.* Решение нелинейного уравнения теплопроводности для криволинейной области с условиями Дирихле методом быстрых разложений // Инж.-физ. ж. 2018. Т. 91. № 2. С. 456–468.
25. *Чернышов А.Д.* Решение двухфазной задачи Стефана с внутренним источником и задач теплопроводности методом быстрых разложений // Инж.-физ. ж. 2021. Т. 94. № 1. С. 101–120.
26. *Briand T.* Trigonometric polynomial interpolation of images // Image Processing on Line. 2019. V. 9. P. 291–316.
<https://doi.org/10.5201/ipol.2019.273>
27. *Поршнев С.В., Кусайкин Д.В.* Восстановление периодических дискретных сигналов конечной длительности с помощью тригонометрической интерполяции // Изв. высш. учебн. завед. Приборостр. 2017. Т. 60. № 6. С. 504–512.
<https://doi.org/10.17586/0021-3454-2017-60-6-504-512>
28. URL: <https://docs.cntd.ru/document/554403082?marker=A840NF> (дата обращения: 18.03.2022).
29. *Писаренко Г.С., Можаровский Н.С.* Уравнения и краевые задачи пластичности и ползучести. Киев: Наук. думка, 1981. 496 с.