

УДК 531.36

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЯХ ТЯЖЕЛОЙ БУСИНКИ НА РАВНОМЕРНО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ШЕРОХОВАТОЙ СПИЦЕ

© 2023 г. А. А. Буров^{а,*}, В. И. Никонов^{а,**}

^аФедеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук,
Москва, Россия

*e-mail: jtm@narod.ru

**e-mail: nikon_v@list.ru

Поступила в редакцию 21.04.2022 г.

После доработки 29.06.2022 г.

Принята к публикации 30.06.2022 г.

Рассматривается движение тяжелой бусинки, нанизанной на шероховатую спицу, равномерно вращающуюся вокруг вертикальной оси. В предположении о том, что спица и ось вращения скрещиваются, изучаются существование множеств неизолированных относительных равновесий бусинки и их зависимость от параметров. Задача представляет собой естественное обобщение хорошо известной задачи Зоммерфельда, в рамках которой предполагается, что спица и ось вращения пересекаются.

Ключевые слова: относительные равновесия, сухое трение, равномерно вращающаяся система отсчета, шероховатая спица, тяжелая бусинка

DOI: 10.31857/S0572329922600220, EDN: JNNCBZ

1. Постановка задачи. Пусть шероховатая прямолинейная спица ℓ совершает равномерное вращение с постоянной угловой скоростью $\omega > 0$ вокруг вертикальной оси, отстоящей от спицы на расстоянии a . Предположим, что на спицу нанизана тяжелая бусинка P . Требуется найти положения равновесия бусинки относительно спицы в предположении о том, что коэффициент сухого трения равен $\mu = \operatorname{tg}\alpha$, где $0 \leq \alpha < \pi/2$ – угол трения. Ускорение силы тяжести считается равным g . Предполагается, что спица образует с восходящей вертикалью угол $0 \leq \theta \leq \pi/2$, см. рис. 1.

2. Общие условия существования относительных равновесий. В равномерно вращающейся вместе со спицей системе отсчета бусинка будет находиться в равновесии под действием (рис. 1) силы тяжести mg , центробежной силы $F_c = mg_c$, а также реакции связи, состоящей из нормальной компоненты \mathbf{N} (не изображена на рисунке) и силы трения $\mathbf{T} = T\mathbf{e}$, где \mathbf{e} – единичный вектор, направленный вверх вдоль спицы. Пусть масса бусинки принята за единицу. Тогда, если $\mathbf{f} = \mathbf{g}_c + \mathbf{g}$, то условие равновесия запишется в виде

$$\mathbf{f} + \mathbf{N} + \mathbf{T} = 0 \quad (2.1)$$

Согласно закону Кулона–Амонтона величины нормальной реакции и силы трения стеснены неравенством

$$|\mathbf{T}| \leq \mu|\mathbf{N}| \Leftrightarrow |\mathbf{T}| - \mu|\mathbf{N}| \leq 0$$

Домножая левую и правую части последнего неравенства на неотрицательную¹ величину $|\mathbf{T}| + \mu|\mathbf{N}|$, получим

¹ Положительную в интересующем нас случае.

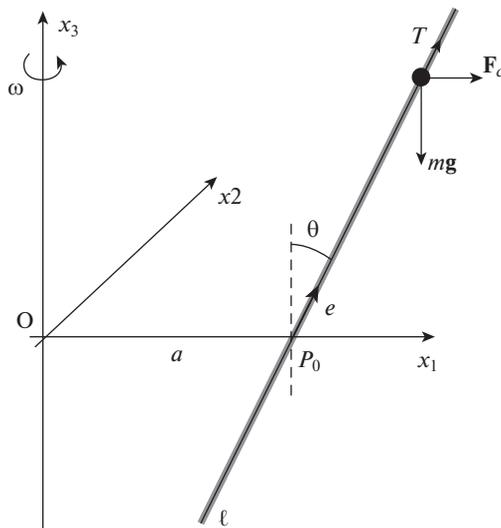


Рис. 1. Механическая система: вращающаяся шероховатая спица ℓ с нанизанной на ней бусинкой.

$$|\mathbf{T}|^2 - \mu^2 |\mathbf{N}|^2 \leq 0 \Leftrightarrow (\mathbf{T}, \mathbf{T}) - \mu^2 (\mathbf{N}, \mathbf{N}) \leq 0$$

Здесь и далее (\cdot, \cdot) – скалярное произведение. Принимая во внимание ортогональность векторов \mathbf{T} и \mathbf{N} , последнее из неравенств запишем в виде

$$(\mathbf{T} + \mathbf{N}, \mathbf{T} + \mathbf{N}) - (1 + \mu^2)(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \leq 0 \quad (2.2)$$

Из уравнения (2.1) находим

$$\mathbf{T} + \mathbf{N} = -\mathbf{f}$$

и неравенство (2.2) может быть записано как

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}) - (1 + \mu^2)(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \leq 0 \quad (2.3)$$

Далее, путем скалярного умножения левой и правой частей уравнения (2.1) на \mathbf{e} и дальнейших преобразований, находим величину T :

$$(\mathbf{e}, \mathbf{f}) + (\mathbf{e}, \mathbf{T}) = (\mathbf{e}, \mathbf{f}) + T = 0 \Rightarrow T = -(\mathbf{e}, \mathbf{f})$$

Так как

$$\mathbf{N} = -\mathbf{T} - \mathbf{f} = (\mathbf{e}, \mathbf{f})\mathbf{e} - \mathbf{f}$$

то

$$(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = (\mathbf{f}, \mathbf{f}) - (\mathbf{f}, \mathbf{e})^2$$

и неравенство (2.3) приобретает вид

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f}) - (1 + \mu^2)((\mathbf{f}, \mathbf{f}) - (\mathbf{f}, \mathbf{e})^2) \leq 0 \Leftrightarrow (1 + \mu^2)(\mathbf{f}, \mathbf{e})^2 - \mu^2 (\mathbf{f}, \mathbf{f}) \leq 0 \quad (2.4)$$

Это неравенство составляет основной предмет дальнейших исследований.

3. Зависимость относительных равновесий от параметров. Пусть OP_0 – общий перпендикуляр к оси вращения и спице, причем точка O принадлежит оси вращения, а точка P_0 – спице. Введем вращающуюся вместе со спицей систему отсчета $Ox_1x_2x_3$, ось

Ox_3 которой направлена вдоль оси вращения, ось Ox_1 – вдоль общего перпендикуляра, а ось Ox_2 дополняет их до правой тройки. При этом $\overline{OP}_0 = (a, 0, 0)^T$, $\mathbf{e} = (0, \sin\theta, \cos\theta)^T$, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)^T$. Вводя параметр $p \in \mathbf{R}$, отвечающий за удаление бусинки P от точки P_0 на прямой, зададим ее положение вектором

$$\overline{OP} = (x_1, x_2, x_3)^T = \overline{OP}_0 + p\mathbf{e} = (a, p \sin \theta, p \cos \theta)^T$$

Тогда $\mathbf{g}_c = \omega^2(a, p \sin \theta, 0)^T$, $\mathbf{f} = (\omega^2 a, \omega^2 p \sin \theta, -g)^T$,

$$(\mathbf{f}, \mathbf{e}) = \omega^2 p \sin^2 \theta - g \cos \theta, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{f}) = \omega^4(a^2 + p^2 \sin^2 \theta) + g^2$$

и неравенство (2.4) сводится к неравенству

$$(1 + \mu^2)(\omega^2 p \sin^2 \theta - g \cos \theta)^2 - \mu^2(\omega^4(a^2 + p^2 \sin^2 \theta) + g^2) \leq 0$$

приводимому к виду

$$\begin{aligned} & \omega^4 \sin^2 \theta (\cos^2 \alpha - \cos^2 \theta) p^2 - 2\omega^2 g \cos \theta \sin^2 \theta p + \\ & + g^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \theta) - a^2 \omega^4 \sin^2 \alpha \leq 0 \end{aligned}$$

Введение безразмерной координаты p' : $p = ap'$ и дальнейшее отбрасывание штриха позволяют представить это неравенство в виде

$$Ap^2 + Bp + C \leq 0$$

$$A = \omega^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \alpha - \cos^2 \theta), \quad B = -2\omega g \cos \theta \sin^2 \theta \quad (3.1)$$

$$C = \cos^2 \theta - (1 + \omega^2) \sin^2 \alpha, \quad \omega = \frac{a\omega^2}{g} \geq 0$$

Решения неравенства (3.1) относительно p определяют на спице ℓ области, заполненные относительными равновесиями (ОЗОР). Зависимость этих областей от безразмерного параметра ω и от углов α и θ составляет предмет дальнейших исследований.

а) Если $A = 0$ при $\omega = 0$, т.е. спица не вращается или пересекается с осью вращения, то неравенство (3.1) записывается как

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \alpha \leq 0 \quad (3.2)$$

Неравенство выполнено при $\pi/2 - \theta \leq \alpha$ и не выполнено в противном случае. Это классический результат, иллюстрирующий смысл угла трения α [1] (см. также [2]).

б) Если $A = 0$ при $\theta = 0$, т.е. спица вертикальна, то неравенство (3.1) приводится к виду

$$\cos^2 \alpha - \omega^2 \sin^2 \alpha \leq 0 \quad (3.3)$$

которое выполнено при $0 \leq \operatorname{tg} \alpha \leq \omega^{-1}$.

в) Если $A = 0$ при $\cos^2 \alpha - \cos^2 \theta = 0$, то неравенство (3.1) приводится к виду

$$-2\omega g \cos \theta \sin^2 \theta p + \cos^2 \theta - (1 + \omega^2) \sin^2 \theta \leq 0 \quad (3.4)$$

Тогда, так как $0 \leq \alpha < \pi/2$, то и $0 \leq \theta < \pi/2$, и $\cos \theta \neq 0$. Случай $\theta = 0$ разобран выше, поэтому решение неравенства (3.4) имеет вид

$$p \geq p_*, \quad p_* = \frac{s^2 - \sin^2 \theta}{2\alpha s^2 \sin^2 \theta \cos \theta}, \quad s = \frac{1}{\sqrt{2 + \alpha^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Граничная точка P_* , определяемая значением $p = p_*$,

- совпадает с точкой P_0 при $\sin \theta = s$,
- располагается выше точки P_0 при $\sin \theta \in (0; s)$,
- располагается ниже точки P_0 при $\sin \theta \in (s, 1]$.

г) Если $A < 0$, т.е. $\cos^2 \alpha - \cos^2 \theta < 0$, то в левой части неравенства (3.1) стоит квадратный трехчлен относительно p , дискриминант которого имеет вид

$$D = \cos^2 \alpha + \alpha^2 (\cos^2 \alpha - \cos^2 \theta)$$

Неравенство (3.1) при этом приводится к виду

$$(p - p_-)(p - p_+) \geq 0, \quad p_{\pm} = \frac{\sin \theta \cos \theta \pm \sin \alpha \sqrt{D}}{\alpha \sin \theta (\cos^2 \alpha - \cos^2 \theta)}$$

Величины p_{\pm} вещественны если

$$D \geq 0 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha < \cos^2 \theta \leq \cos^2 \alpha \left(\frac{1}{\alpha^2} + 1 \right) = K$$

Если $K \geq 1$, то угол $\theta < \alpha$, если $K < 1$, то используя обозначение $\beta = \arccos K$, имеем

$$\cos^2 \alpha < \cos^2 \theta \leq \cos^2 \beta \Leftrightarrow \beta \leq \theta < \alpha$$

В этом случае относительные равновесия занимают область, отвечающую значениям параметра

$$p: -\infty < p \leq p_- \cup p_+ \leq p < +\infty$$

т.е. располагаются вне интервала $(p_-; p_+)$.

При $D < 0$ вещественных корней нет, а с учетом $A < 0$, неравенство (3.1) выполнено при любых значениях p , т.е. ОЗОР – все точки спицы.

д) При выполнении условия $A > 0$, т.е. $\cos^2 \alpha - \cos^2 \theta > 0$, неравенство (3.1) имеет вид

$$(p - p_-)(p - p_+) \leq 0$$

Относительные равновесия занимают область, отвечающую значениям параметра

$$p: p_- \leq p \leq p_+$$

Поскольку $\cos^2 \alpha - \cos^2 \theta > 0$, то $D \geq 0$ и величины p_{\pm} вещественны.

4. Графическое представление зависимости относительных равновесий от параметров.

Для иллюстрации различных случаев расположения ОЗОР на плоскости (θ, α) изобразим три кривые. Кривая Γ_1 : $D = 0$ отделяющую область, в которой изучаемый квадратный трехчлен имеет два вещественных корня, от области, в которой вещественных корней нет. Γ_2 : $C = 0$, разделяет области, где эти корни одного или разных знаков и, наконец, Γ_3 : $A = 0$, разделяет области, где ветви изображающей трехчлен параболы направлены вниз или вверх. Кривые Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 разбивают квадрат $S = \{0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \alpha \leq \pi/2\}$ на пять областей $I-V$. При этом

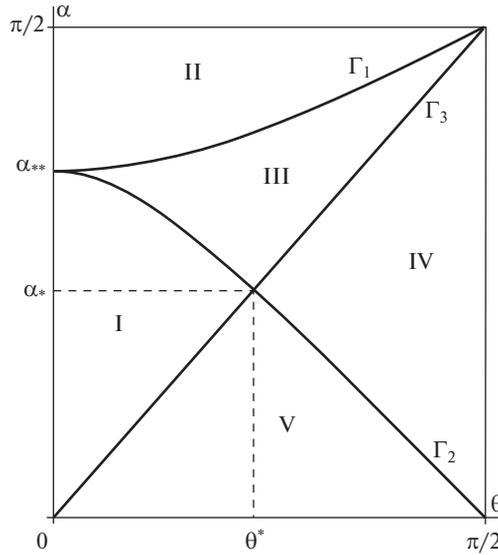


Рис. 2. Области I–V. на плоскости (θ, α) , отвечающие различным расположениям ОЗОР, при $\varepsilon = 1/2$.

$$\alpha_* = \Theta_* = \arccos \sqrt{\frac{1 + \varepsilon^2}{2 + \varepsilon^2}}, \quad \alpha_{**} = \arctan \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\alpha_*|_{\varepsilon=0} = \pi/4, \quad \alpha_*|_{\varepsilon \rightarrow +\infty} = 0$$

Для $\varepsilon = 1/2$ эти области изображены на рис. 2.

При неограниченном увеличении параметра ε , области I, III и V (см. рис. 2) уменьшаются, исчезая в пределе. При этом кривая Γ_2 сливается с граничным отрезком $\alpha = 0$, а кривая Γ_1 приближается к диагонали $\alpha = \theta$. В предельном случае, оставшиеся области II и IV разбивают квадрат S на равные треугольники с общим основанием на диагонали квадрата S , соответствующей кривой Γ_3 .

При неограниченном уменьшении параметра ε до нуля область II уменьшается и сливается с граничным отрезком $\alpha = \pi/2$. При этом кривая Γ_2 приближается к диагонали $\alpha = \pi/2 - \theta$. В пределе, при $\varepsilon = 0$, т.е. в случае а), области I, III, IV и V разбивают квадрат S на равные треугольники с общей вершиной и основаниями, противоположными этой вершине, на сторонах квадрата S . При этих условиях неравенство (3.2) выполнено в точках диагонали $\alpha = \pi/2 - \theta$.

В случае б) неравенство (3.3) выполнено в точках отрезка $\theta = 0, \alpha \in [0, \alpha_{**}]$.

В случае в) неравенство (3.4) выполнено в точках кривой Γ_3 .

Случаю г) отвечают области I–III.

На рис. 3 серым закрашены области, где существуют ОЗОР. Области построены для случае $\varepsilon = 0.5$, на рисунках схематично изображена спица ℓ , что позволяет проиллюстрировать области ОЗОР. Пунктирной линией отмечены точки границы при $p_-(\varepsilon) = 0$, штриховой линией отмечены точки границы при $p_+(\varepsilon) = 0$. Точки $(\varepsilon_i, p_i), i = I, II, III$ отвечают случаям, когда $p_-(\varepsilon) = p_+(\varepsilon)$. Для области I ОЗОР представляется в виде объединения двух лучей, направленных вверх и вниз по спице, при этом начало верх-

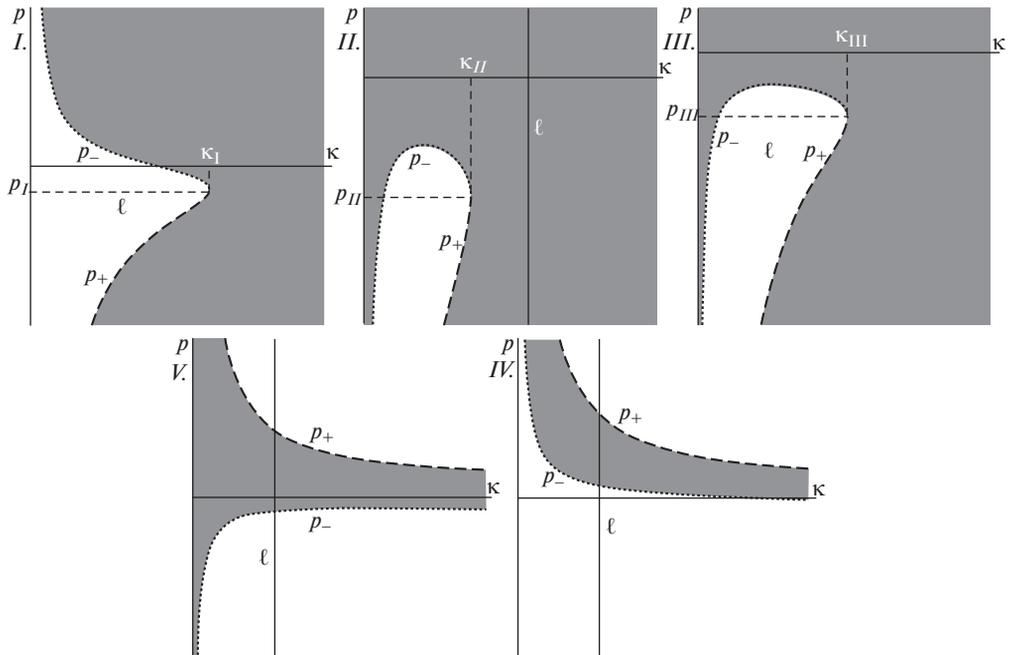


Рис. 3. Серым закрашена область, где существуют ОЗОР. ℓ – спица. Параметры (θ, α) приняты следующими: *I.*: $(\pi/8, \pi/4)$, *II.*: $(\pi/8, 4\pi/10)$, *III.*: $(\pi/4, \pi/3)$, *IV.*: $(3\pi/8, \pi/4)$, *V.*: $(\pi/4, \pi/8)$. Точки срашивания корней на рисунках *I.* – *III.* $\alpha_{I.} = 1.189207115$, $p_{I.} = -2.197368226$; $\alpha_{II.} = 0.3549196403$, $p_{II.} = -3.433844707$; $\alpha_{III.} = 1$, $p_{III.} = -2.828427124$.

него луча лежит выше точки P_0 , начало нижнего луча лежит ниже точки P_0 . Для области *II.* вся спица заполнена ОЗОР. Для области *III.* ОЗОР опять представляется в виде объединения двух лучей, направленных вверх и вниз по спице, но при этом начала обоих лучей лежат ниже точки P_0 , т.е. сама точка P_0 принадлежит ОЗОР.

Случаю д) отвечают области *IV.* и *V.*, см. рис. 3. Для области *IV.* ОЗОР представляется в виде отрезка, концы которого лежат по разные стороны от точки P_0 , и точка P_0 принадлежит ОЗОР. Для области *V.*, ОЗОР также является отрезком, но целиком лежащим выше точки P_0 .

5. Выводы. Рассмотренная в учебнике А. Зоммерфельда ([1], стр. 73) задача о тяжелой бусинке на вращающейся спице представляет собой замечательный пример системы, в которой при прохождении параметра, например, коэффициента трения, через определенное значение, множество неизолированных относительных равновесий, заполняющее целую прямую, исчезает². Как показало настоящее исследование, выполненное в продолжение ряда исследований по существованию, устойчивости и бифуркациям равновесий в системах с трением (см., например, [4–13]), в рамках несложного обобщения задачи А. Зоммерфельда обнаруживается достаточно богатая (с точки зрения динамических эффектов) картина бифуркаций относительных равновесий.

² Уточнение результата А. Зоммерфельда дано в монографии [2]. В отсутствие силы тяжести явное решение найдено П. Пенлевэ [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sommerfeld A.* Vorlesungen über Theoretische Physik, Band 1: Mechanik. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft. 1943.
2. *Розенблат Г.М.* Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела. М.: URSS. 2011. 208 с.
3. *Painlevé P.* Leçons sur le frottement. Paris: Hermann. 1895. 111 p.
4. *Leine R.I., van Campen D.H.* Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // *Europ. J. Mechanics – A/Solids*. 2006. V. 25. P. 595–616.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.04.004>
5. *Leine R.I.* Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2006. V. 223. № 1. P. 121–137.
<https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.08.021>
6. *Иванов А.П.* Об устойчивости равновесия в системах с трением // *Прикладная математика и механика*. 2007. Т. 71. № 3. С. 427–438.
7. *Иванов А.П.* Бифуркации в системах с трением: основные модели и методы // *Нелинейная динамика*. 2009. Т. 5. № 4. С. 479–498.
8. *Burov A.A.* On bifurcations of relative equilibria of a heavy bead sliding with dry friction on a rotating circle // *Acta Mechanica*. 2010. V. 212. № 3–4. P. 349–354.
<https://doi.org/10.1007/s00707-009-0265-1>
9. *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. Ижевск: РХД. 2011. 302 с.
10. *Иванов А.П.* О равновесии систем с сухим трением // *Прикладная математика и механика*. 2015. Т. 79. № 3. С. 317–333.
11. *Шалимова Е.С.* О движении тяжелой точки по сфере, вращающейся вокруг не проходящей через ее центр вертикальной оси, при наличии сухого трения // *Нелинейная динамика*. 2016. Т. 12. № 3. С. 369–383.
<https://doi.org/10.20537/nd1603006>
12. *Буров А.А., Косенко И.И., Шалимова Е.С.* Об относительных равновесиях массивной точки на равномерно вращающемся астероиде // *Доклады Академии наук*. 2017. Т. 475. № 3. С. 269–272.
<https://doi.org/10.7868/S0869565217210071>
13. *Буров А.А., Никонов В.И., Шалимова Е.С.* Движение массивной точки по поверхности однородного шара со сферической полостью // *Прикладная математика и механика*. 2021. Т. 85. № 4. С. 528–543.
<https://doi.org/10.31857/S0032823521040032>