ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 3, с. 163–176

УДК 539.4

СВЯЗАННАЯ ТЕРМОУПРУГОСТЬ ГЕМИТРОПНЫХ СРЕД. ПСЕВДОТЕНЗОРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА

© 2023 г. **Е. В. Мурашкин[a],*, Ю. Н. Радаев[a],****

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: evmurashkin@gmail.com*

***e-mail: radayev@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 15.01.2023 г.
После доработки 22.01.2023 г.
Принята к публикации 23.01.2023 г.

В статье рассматривается проблема вывода определяющих уравнений для микрополярного термоупругого континуума GN-I в специфике стандартного псевдотензорного формализма. Псевдотензорный подход в большинстве случаев оправдан при моделировании гемитропных микрополярных тел, термомеханические свойства которых чувствительны к зеркальным отражениям трехмерного пространства. Приводятся минимально необходимые для понимания сведения из теории псевдотензоров. Привлекаются общие термодинамические подходы, обсуждаются уравнения баланса энтропии и различные формы баланса внутренней и свободной энергии Гельмгольца. Устанавливаются веса основных термомеханических псевдотензоров. В линейном приближении выводятся определяющие уравнения гемитропного микрополярного термоупругого континуума (GN-I) первого типа. В линейном приближении получена связанная система дифференциальных уравнений теплопроводности и динамических уравнений микрополярного термоупругого континуума GN-I.

Ключевые слова: псевдотензор, термодинамический потенциал, связанная термоупругость, теплопроводность, микроповорот, перемещение, микрополярный гемитропный континуум

DOI: 10.31857/S0572329922600876, **EDN:** JMQVBJ

1. Введение. Изучение термомеханических свойств современных конструкционных материалов и метаматериалов [1–6] оказывается возможным в результате синтеза аппарата современной термодинамики [7–9] и микроструктурных представлений [10–12]. Большинство биоматериалов и метаматериалов с точки зрения их термомеханических свойств чувствительны к преобразованиям, изменяющим ориентацию пространства[1], например, зеркальным отражениям и инверсиям пространства[2]. Однако, следует понимать, что определяющие тензоры и определяющие постоянные линейных изотропных микрополярных сред не проявляют чувствительность к указанным преобразованиям. Наиболее простой моделью, с определяющими псевдоскалярами, чувствительными к упомянутым преобразованиям пространства, оказывается гемитропная микрополярная среда, задающаяся девятью определяющими псевдоскалярами.

[1] Мы считаем, что ориентация трехмерного пространства задается с помощью знака фундаментального ориентирующего псевдоскаляра sgn. [13, 14].

[2] Под инверсией трехмерного пространства мы подразумеваем преобразование координатного репера, сопоставляющее координатам их противоположные значения.

Термодинамические процессы, протекающие в термодинамических системах, с точки зрения математической модели определяются эволюцией параметров состояния[3], составляющих термодинамический базис. Термодинамические процессы можно условно разделить на равновесные и неравновесные. Равновесным называется такой термодинамический процесс, при котором все состояния, через которые последовательно эволюционирует система, с достаточной степенью точности являются равновесными состояниями, т.е. когда все термодинамические характеристики чрезвычайно близки к своим средним значениям[4]. К таким процессам можно отнести медленно протекающие процессы, когда время релаксации достаточно мало, по сравнению с характерным временем перехода между двумя соседними равновесными состояниями. В этом случае процессы чаще всего рассматриваются как квазистатические, поскольку для динамических процессов высказанные условия в большинстве случаев нарушаются.

Кроме того, термодинамические процессы, можно разделить на обратимые и необратимые. Обратимым называется такой термодинамический процесс, для любых двух состояний которого фактически реализуются термодинамические процессы как в прямом, так и в обратном направлениях. Поясним сказанное на двух простых примерах. Рассмотрим в качестве примера модель атермической деформации цилиндрического упругопластического образца до и за пределом упругости (см. рис. 1). При значениях силовой нагрузки, ниже предела упругости σ_E, что на рисунке соответствует точкам кривой между состояниями 1 и 2, термодинамический процесс будет обратимым и разгрузка образца вернет процесс к начальному состоянию 1 [17]. При нагружении образца выше предела текучести (состояния 3 и 4) образец начнет проявлять неупругие свойства и процесс разгрузки пойдет по пути 4—5, а не вернется в состояние 1 по траектории 4 – 3 – 2 – 1, что означает необратимость процесса 1—4. В термодинамически необратимых процессах наблюдается неконтролируемое (неуправляемое, самопроизвольное) производство энтропии (uncontrollable entropy production).

Для описания состояния термодинамической системы используются функции, функционально зависящие от базиса термодинамических переменных (параметров состояния: энтропия, деформация, температура), и термодинамические потенциалы состояния (внутренняя энергия, свободная энергия Гельмгольца и другие энергетические формы).

Термодинамический подход к исследованию процессов деформирования микрополярных материалов использовался, например, в работах [10—12] и работах авторов [6, 18, 19], где проводится построение определяющих уравнений для упругих микрополярных материалов в терминах абсолютных тензоров. Однако, построение определяющих уравнений и термодинамических потенциалов для гемитропных микрополярных термоупругих сред на корректной основе требует привлечения аппарата алгебры псевдотензоров (см., например, [14, 20, 21]).

В настоящей работе обсуждаются вопросы вывода определяющих соотношений для микрополярного термоупругого континуума GN-I в терминах псевдотензоров. Приводятся (правда, в минимальной степени) основные понятия алгебры и анализа псевдотензоров [22—28]. Обсуждаются уравнения баланса энтропии и различные формы баланса внутренней и свободной энергии Гельмгольца. Вычисляются веса основных термомеханических величин. В линейном приближении выводятся определяющие уравнения гемитропного микрополярного связанного термоупругого континуума GN-I.

2. Псевдотензоры в трехмерном евклидовом пространстве. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство[5]. Выберем в пространстве криволинейную систему коорди-

[3] В книге Л.И. Седова [15] упомянутые параметры обозначены через μ_i.
[4] Данные представления характерны для курса “Теоретической физики” Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшица [16].
[5] Трехмерность пространства существенна для всех дальнейших рассуждений.

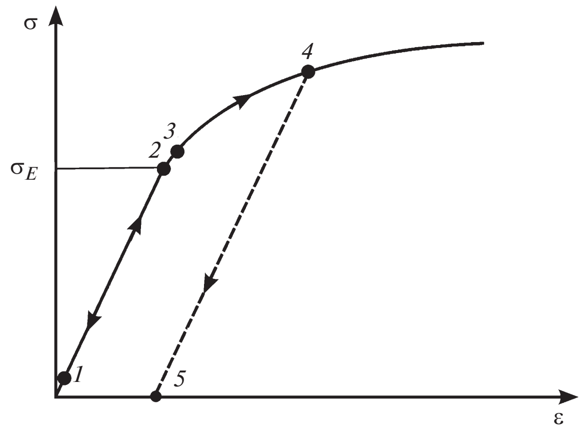

Рис. 1. Одноосное растяжение образца за предел текучести.

нат x^k $(k = 1,2,3)$. Метрика пространства задается квадратом линейного элемента длины согласно

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \tag{2.1}$$

где g_{ij} – компоненты метрического тензора. Компоненты фундаментального тензора g^{ij} связаны с метрическим тензором соотношением

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k \tag{2.2}$$

И метрический, и фундаментальный тензоры являются абсолютными (истинными) тензорами. То же самое относится к символу Кронекера δ^i_k.

Введем в рассмотрение локальные базисные триэдры, связанные с выбранной координатной системой в трехмерном пространстве: $\underset{\mathfrak{a}}{\imath}$ $(\mathfrak{a} = 1,2,3)$ – локальный ковариантный базис; $\overset{\mathfrak{b}}{\imath}$ $(\mathfrak{b} = 1,2,3)$ – локальный контравариантный (взаимный) базис.

Базисные векторы и взаимные базисные векторы удовлетворяют следующему соотношению:

$$\underset{\mathfrak{a}}{\imath}\cdot\overset{\mathfrak{b}}{\imath} = \overset{\mathfrak{b}}{\underset{\mathfrak{a}}{\delta}} \quad (\mathfrak{a} = 1,2,3; \mathfrak{b} = 1,2,3)$$

Метаиндексы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ (в отличие от тензорных индексов) записываются шрифтом “fraktur”.

С ориентацией локальных базисов связан фундаментальный объект псевдотензорной алгебры и многомерной геометрии – символы перестановок [23–25], которые не являются абсолютными тензорами и определяются согласно соотношениям:

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{для троек } (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \\ -1, & \text{для троек } (3,2,1), (1,3,2), (2,1,3) \\ -0, & \text{во всех остальных случаях} \end{cases} \tag{2.3}$$

Заметим, что ϵ-символы нарушают основные привила тензорного формализма, что видно уже по (2.3). Символы перестановок ϵ_{ijk} и ϵ^{ijk} являются относительными ковариантными тензорами (псевдотензорами) веса –1 (w.g.t. = –1) и одновременно – относительными контравариантными тензорами веса +1 (w.g.t. = +1), поэтому было бы корректно использовать для них следующие обозначения:

$$\overset{[-1]}{\epsilon}_{ijk}, \quad \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{ijk}$$

Далее сверху корневого символа относительного тензора в квадратных скобках будем отмечать его вес. Нулевой вес, присущий абсолютным тензорам, не отражается нами в обозначениях.

Введем в рассмотрение ориентирующий трехмерное пространство псевдоскаляр (относительный скаляр веса +1 (w.g.t. = +1)), представляющий собой смешанное произведение базисных векторов:

$$e = \overset{[+1]}{e} = (\underset{1}{\imath} \times \underset{2}{\imath}) \cdot \underset{3}{\imath} \tag{2.4}$$

и относительный скаляр отрицательного веса –1 (w.g.t. = –1):

$$\frac{1}{e} = \overset{[-1]}{e}{}^{-1} = (\overset{1}{\imath} \times \overset{2}{\imath}) \cdot \overset{3}{\imath} \tag{2.5}$$

Обратим внимание, что псевдоскаляр (2.4) с точностью до знака совпадает с объемом параллелепипеда, построенного на базисных векторах $\underset{\mathfrak{a}}{\imath}$. Нетрудно показать, что в евклидовом пространстве справедливо равенство

$$e^2 = g > \overset{[2]}{0} \tag{2.6}$$

где g – детерминант метрического тензора. Условие $g = 1$ ($|e| = 1$) является фундаментальным для развития общей теории относительности [29] и, например, математической теории пластичности [30]. Важно отметить, что в этом случае абсолютные тензоры совпадают с псевдотензорами с точностью до знака, учитывая уравнение (2.8) получим

$$T^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} = (\mathrm{sgn}e)^{-\mathrm{g}}\overset{[\mathrm{g}]}{T}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} \tag{2.7}$$

Откуда следует, что псевдотензоры меняют свой знак на противоположный при изменении ориентации координатного репера если их вес нечетный. Подчеркнем, что $e > 0$ для правоориентированной координатной системы, $e < 0$ для левоориентированной координатной системы.

Псевдотензор $\underset{(n)}{\overset{[\mathrm{g}]}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r}$ веса g ранга $n = s + r$ с помощью степеней фундаментального ориентирующего псевдоскаляра можно преобразовать к абсолютному тензору того же ранга согласно

$$\underset{(n)}{T}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} = e^{-\mathrm{g}}\underset{(n)}{\overset{[\mathrm{g}]}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} \tag{2.8}$$

В дальнейшем изложении у фундаментальных символов, таких как e и g, указание на их вес будем опускать.

Ковариантная производная псевдотензорного поля $\underset{(n)}{\overset{[\mathrm{g}]}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r}$ была введена О. Вебленом [26, 27] и вычисляется согласно [14, 24]:

$$
\begin{gathered}
\nabla_p \overset{[\mathrm{g}]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} = \partial_p \overset{[\mathrm{g}]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} + \Gamma^{h_1}_{qp} \overset{[\mathrm{g}]}{\underset{(n)}{T}}{}^{qh_2\ldots h_s\cdot\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} + \cdots + \Gamma^{h_s}_{qp} \overset{[\mathrm{g}]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots q\cdot\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} - \\
- \Gamma^{q}_{k_1p} \overset{[\mathrm{g}]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\cdot\ldots\cdot qk_2\ldots k_r} - \cdots - \Gamma^{q}_{k_rp} \overset{[\mathrm{g}]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots q} - \mathrm{g} \overset{[\mathrm{g}]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} \Gamma^{q}_{qp}
\end{gathered}
\tag{2.9}
$$

В частности, для псевдоскаляра ковариантная производная, независимо от веса g, примет вид

$$
\nabla_p \overset{[\mathrm{g}]}{T} = \partial_p \overset{[\mathrm{g}]}{T} - \mathrm{g} \overset{[\mathrm{g}]}{T} \Gamma^{s}_{sp}
\tag{2.10}
$$

где

$$
\Gamma^{s}_{sp} = \frac{\partial_p e}{e}
$$

Учитывая свойства символов Кристоффеля Γ^{s}_{sp} и соотношение (2.6), получим выражение для ковариантной производной (2.10)

$$
\nabla_p \overset{[\mathrm{g}]}{T} = \partial_p \overset{[\mathrm{g}]}{T} - e^{-1} \mathrm{g} \overset{[\mathrm{g}]}{T} \partial_p e
\tag{2.11}
$$

Однако, существуют альтернативные подходы реализации ковариантного дифференцирования псевдотензора. Определим ковариантную производную псевдотензора произвольного ранга и целого веса g с помощью соотношения:

$$
\nabla_p \overset{[\mathrm{g}]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} = e^{\mathrm{g}} \nabla_p (e^{-\mathrm{g}} \overset{[\mathrm{g}]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r})
\tag{2.12}
$$

Кроме того, реализовать ковариантное дифференцирование псевдотензора с целым положительным весом ($\mathrm{g} > 0$) можно с помощью символов перестановок согласно правилу[6]

$$
\begin{gathered}
\nabla_p \overset{[\mathrm{g}]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} = (N!)^{-\mathrm{g}} \underbrace{\overset{[+1]}{\epsilon}{}^{k_{r+1}\ldots k_{r+N}} \cdots \overset{[+1]}{\epsilon}{}^{k_{r+(\mathrm{g}-1)N+1}\ldots k_{r+N\mathrm{g}}}}_{\mathrm{g}} \times \\
\times \nabla_p (\overset{[\mathrm{g}]}{\underset{(n)}{T}}{}^{h_1h_2\ldots h_s\cdot\cdot\ldots\cdot}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1k_2\ldots k_r} \underbrace{\overset{[-1]}{\epsilon}{}_{k_{r+1}\ldots k_{r+N}} \cdots \overset{[-1]}{\epsilon}{}_{k_{r+(\mathrm{g}-1)N+1}\ldots k_{r+N\mathrm{g}}}}_{\mathrm{g}})
\end{gathered}
\tag{2.13}
$$

Все три вида реализации ковариантной производной (2.9), (2.12) и (2.13) являются эквивалентными, что было продемонстрировано в работе [31].

3. Термодинамические потенциалы состояния для гемитропных микрополярных термоупругих сред GN-I. Введем в рассмотрение внутреннюю энергию u в расчете на единицу массы. Понятие внутренней энергии, как физической величины, характеризующей элементарную термодинамическую систему, подробно обсуждается в классической монографии [16, С. 25–28]. Стандартное статистическое определение внутренней энергии элементарной термодинамической системы можно найти там же [16, с. 103–105]. В статистической физике во внутреннюю энергию системы включают энергию разных видов движения и взаимодействия входящих в систему частей: энергию поступательного, вращательного и колебательного движений атомов и молекул, энергию внутри- и межмолекулярного взаимодействия, энергию электронных оболочек атомов и др. В этом случае внутренняя энергия трактуется как физическая величина.

Помимо трактовки u как физической величины, связанной с элементарной термодинамической системой, в механике континуума ее приходится рассматривать как непрерывное физическое поле (physical field), поскольку континуум является объедине-

---

[6] Антологичное правило справедливо, если целый вес отрицателен, т.е. $\mathrm{g} < 0$.

нием элементарных термодинамических систем. В механике континуума значение u как физической величины не представляет интереса ни в теоретическом, ни в прикладном плане. Подлинный интерес представляет трактовка внутренней энергии как термодинамического потенциала состояния, т.е. как однозначной, непрерывной и ограниченной снизу функции базиса термодинамических переменных (параметров состояния). Чертой сверху будем в дальнейшем обозначать потенциалы состояния. Например $\overline{u}$ означает, что внутренняя энергия u рассматривается как термодинамический потенциал состояния, зависящий от некоторого конечного набора базисных термодинамических переменных (параметров состояния). В термомеханике микрополярных континуумов имеем:

- s — энтропия в расчете на единицу массы (абсолютный скаляр);
- $\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - \epsilon_{ijk} \overset{[+1]}{\phi}{}^k$ — асимметричный тензор деформации;
- $\overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot j} = \nabla_i \overset{[+1]}{\phi}{}^j$ — псевдотензор деформации изгиба—кручения.

Поворот ϕ^j может трактоваться двояко: либо как ковариантный псевдовектор отрицательного веса $\overset{[-1]}{\phi}{}_j$, либо как контравариантный псевдовектор положительного веса $\overset{[+1]}{\phi}{}^j$. В настоящей работе в качестве псевдовектора поворота мы будем использовать контравариантный псевдовектор положительного веса $\overset{[+1]}{\phi}{}^j$. Перечисленные выше переменные мы считаем образующими термодинамический базис в случае микрополярного термоупругого континуума GN-I.

Все сказанное выше можно выразить следующим уравнением:

$$u = \overline{u}(s, \epsilon_{ij}, \overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot j}) \tag{3.1}$$

Фундаментальным утверждением (3.1) постулируется равенство физического значения внутренней энергии u (абсолютного скаляра, не зависящего от зеркальных отражений и инверсий трехмерного пространства) и значения функциональной зависимости $\overline{u}$.

Сопряженной к энтропии величиной в термодинамике выступает термодинамическая температура (абсолютная температура). Термодинамическая температура может вводиться статистически, как модуль канонического распределения Гиббса [16, с. 104—105]. В термомеханике континуума абсолютная температура θ (абсолютный скаляр) определяется как функция параметров термодинамического состояния и вычисляется как частная производная потенциальной функции (3.1) по энтропии s, т.е.

$$\theta = \frac{\partial \overline{u}(s, \epsilon_{ij}, \overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot j})}{\partial s} \tag{3.2}$$

Формула (3.2) наглядно демонстрирует отличие u от $\overline{u}$. В работах некоторых авторов [8, 7] приоритет отдается обратной к температуре величине $\frac{1}{\theta}$ — холодности (coldness).

Уравнение баланса внутренней энергии для линейных микрополярных теорий, как хорошо известно, имеет следующий вид

$$\rho \partial_{.} u = t^{ij} \partial_{.} \epsilon_{ij} + \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} \partial_{.} \overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot k} + \rho q - \nabla_i h^i \tag{3.3}$$

Здесь $\partial_.$ – производная по времени при фиксированных координатах x^k, t^{ik} – тензор силовых напряжений, ρ – массовая плотность (абсолютный скаляр), $\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ – псевдотензор моментных напряжений, q – лучистое тепло (абсолютный скаляр), h^i – абсолютный вектор потока тепла. В приближении малых деформаций мы считаем $\dot{a} = \partial_. a$.

В конвенциональном виде уравнение баланса энтропии примем

$$\rho\dot{s} = -\nabla_j J^j + \rho\sigma + \rho\xi \tag{3.4}$$

где J^j – абсолютный вектор потока энтропии, ξ – неконтролируемое производство энтропии[7] (в единицу времени в расчете на единицу массы), σ – контролируемое производство энтропии (в единицу времени в расчете на единицу массы). Отметим, что ξ и σ являются абсолютными скалярами.

В термомеханике широко используется еще один термодинамический потенциал – свободная энергия Гельмгольца. Минуя статистический смысл свободной энергии, приписывая ей отрицательный знак, введем с помощью преобразования Лежандра внутренней энергии

$$-\overline{\psi}(\theta, \epsilon_{ij}, \overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot j}_{i\cdot}) = \theta s - \overline{u}(s, \epsilon_{ij}, \overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot j}_{i\cdot}), \quad \theta = \frac{\partial\overline{u}}{\partial s} \tag{3.5}$$

Преобразование Лежандра и его основные свойства подробно обсуждаются в монографии [30, с. 155–157].

На основания инволютивности преобразования Лежандра, получим

$$\overline{u}(s, \epsilon_{ij}, \overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot j}_{i\cdot}) = \theta s - (-\overline{\psi}(\theta, \epsilon_{ij}, \overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot j}_{i\cdot})), \quad s = -\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\theta} \tag{3.6}$$

откуда следует

$$s = \overline{s}(\theta, \epsilon_{ij}, \overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot j}_{i\cdot}), \quad \overline{s} = -\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\theta} \tag{3.7}$$

4. Определяющие уравнения гемитропного микрополярного термоупругого континуума GN-I. Уравнение баланса свободной энергии можно получить подстановкой соотношений (3.4) и (3.5) в уравнение (3.3). В результате несложных преобразований получим

$$-\rho(\partial_.\psi + s\partial_.\theta) + t^{ij}\partial_.\epsilon_{ij} + \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}\partial_.\overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot k}_{i\cdot} - J^j\nabla_j\theta + \nabla_j(\theta J^j - h^j) + \rho(q - \sigma\theta) = \rho\xi\theta \tag{4.1}$$

В предположении

$$\theta J^j = h^j, \quad \sigma\theta = q \tag{4.2}$$

уравнение (4.1) преобразуется к одной из приведенных форм

$$-\rho(\partial_.\psi + s\partial_.\theta) + t^{ij}\partial_.\epsilon_{ij} + \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}\partial_.\overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot k}_{i\cdot} - \theta^{-1}h^j\nabla_j\theta = \rho\xi\theta \tag{4.3}$$

Для необратимых термодинамических процессов справедливо следующее фундаментальное неравенство:

$$C\partial_.\theta + A^{ij}\partial_.\epsilon_{ij} + \overset{[-1]}{B}{}^{i\cdot}_{\cdot k}\partial_.\overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot k}_{i\cdot} + \theta^{-1}h^j\nabla_j\theta = -\rho\xi\theta \le 0 \tag{4.4}$$

где

[7] Например за счет лучистого тепла (radiant heat).

$$C = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\theta} + \rho\overline{s}$$

$$A^{ij} = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\epsilon_{ij}} - t^{ij} \tag{4.5}$$

$$\overset{[-1]}{B}{}^{i\cdot}_{\cdot k} = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot k}_{i\cdot}} - \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$$

Откуда следуют определяющие соотношения

$$\overline{s} = -\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\theta}$$

$$t^{ij} = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\epsilon_{ij}}$$

$$\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} = \rho\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot k}_{i\cdot}} \tag{4.6}$$

$$J^j = \overline{J}^j(\nabla_k \ln\theta)$$

Для неконтролируемого производства энтропии справедливо уравнение

$$\rho\xi = -\theta^{-2}h^j\nabla_j\theta = -\theta^{-1}J^j\nabla_j\theta = -\overline{J}^j(\nabla_k\ln\theta)\nabla_j\ln\theta, \quad \inf\theta > 0 \tag{4.7}$$

На основании уравнения баланса энтропии (3.4) при учете (4.6) получаем нелинейное уравнение теплопроводности

$$\rho\frac{\partial\overline{s}}{\partial\epsilon_{ij}}\partial_{.}\epsilon_{ij} + \rho\frac{\partial\overline{s}}{\partial\overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot k}_{i\cdot}}\partial_{.}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot k}_{i\cdot} + \rho\frac{\partial\overline{s}}{\partial\theta}\partial_{.}\theta = -\theta^{-1}\nabla_j h^j + \theta^{-1}\rho q \tag{4.8}$$

Линеаризованную по базисным термодинамическим переменным, свободную энергию для микрополярного термоупругого континуума GN-I можно принять в форме

$$2\rho\overline{\psi} = \underset{1}{H}{}^{islm}\epsilon_{is}\epsilon_{lm} + \underset{2}{\overset{[-2]}{H}}{}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot s}_{i\cdot}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot m}_{l\cdot} + \underset{3}{\overset{[-1]}{H}}{}^{isl\cdot}_{\cdots m}\epsilon_{is}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot m}_{l\cdot} + \underset{1}{G}{}^{is}\epsilon_{is}\theta + \underset{2}{\overset{[-1]}{G}}{}^{i\cdot}_{\cdot s}\overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot s}_{i\cdot}\theta + F\theta^2 \tag{4.9}$$

Здесь $\underset{1}{H}{}^{islm}$, $\underset{2}{\overset{[-2]}{H}}{}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}$, $\underset{3}{\overset{[-1]}{H}}{}^{isl\cdot}_{\cdots m}$, $\underset{1}{G}{}^{is}$, $\underset{2}{\overset{[-1]}{G}}{}^{i\cdot}_{\cdot s}$, F — определяющие тензоры и псевдотензоры микрополярного термоупругого континуума GN-I, $\theta \to \theta - \theta_0$ — малый температурный инкремент (считается малой первого порядка), θ_0 — референциальная температура. Веса определяющих псевдотензоров сведены в таблицу 1. Отметим, что $\underset{3}{\overset{[-1]}{H}}{}^{isl\cdot}_{\cdots m}$ и $\underset{2}{\overset{[-1]}{G}}{}^{i\cdot}_{\cdot s}$ являются определяющими псевдотензорами, чувствительными к преобразованиям зеркального отражения трехмерного пространства.

Для определяющих псевдотензоров $\underset{1}{H}{}^{islm}$, $\underset{2}{\overset{[-2]}{H}}{}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}$ справедливы условия симметрии

$$\underset{1}{H}{}^{islm} = \underset{1}{H}{}^{lmis}, \quad \underset{2}{\overset{[-2]}{H}}{}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m} = \underset{2}{\overset{[-2]}{H}}{}^{l\cdot i\cdot}_{\cdot m\cdot s}$$

Воспользовавшись определяющими соотношениями (4.6), в итоге получим

$$
\begin{aligned}
t^{is} &= \underset{1}{H}{}^{islm}\,\epsilon_{lm} + \frac{1}{2}\overset{[-1]}{\underset{3}{H}}{}^{isl\cdot}_{\cdots m}\,\overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot m}_{l\cdot} + \frac{1}{2}\underset{1}{G}{}^{is}\,\theta \\
\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot s} &= \overset{[-2]}{\underset{2}{H}}{}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}\,\overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot m}_{l\cdot} + \frac{1}{2}\overset{[-1]}{\underset{3}{H}}{}^{lmi\cdot}_{\cdots s}\,\epsilon_{lm} + \frac{1}{2}\overset{[-1]}{\underset{2}{G}}{}^{i\cdot}_{\cdot s}\theta \\
2\rho\overline{s} &= -\underset{1}{G}{}^{is}\,\epsilon_{is} - \overset{[-1]}{\underset{2}{G}}{}^{i\cdot}_{\cdot s}\,\overset{[+1]}{\kappa}{}^{\cdot s}_{i\cdot} - 2F\theta \\
h^{i} &= -\underset{3}{G}{}^{is}\,\nabla_{s}\theta
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

5. Линейный гемитропный микрополярный термоупругий континуум. Полученная энергетическая форма (4.9) используется, как правило, при построении моделей гемитропных микрополярных упругих континуумов. Определяющие тензоры и псевдотензоры для линейного гемитропного микрополярного упругого континуума нечувствительны к поворотам координатного репера, поэтому для них будут справедливы следующие координатные представления[8]

$$
\underset{1}{H}{}^{islm} = \underset{1}{a}\,g^{is}g^{lm} + \underset{1}{b}\,g^{il}g^{sm} + \underset{1}{c}\,g^{im}g^{sl}
$$

$$
\begin{aligned}
\overset{[-2]}{\underset{2}{H}}{}^{islm} &= \overset{[-2]}{\underset{2}{a}}\,g^{is}g^{lm} + \overset{[-2]}{\underset{2}{b}}\,g^{il}g^{sm} + \overset{[-2]}{\underset{2}{c}}\,g^{im}g^{sl} \\
\overset{[-1]}{\underset{3}{H}}{}^{islm} &= \overset{[-1]}{\underset{3}{a}}\,g^{is}g^{lm} + \overset{[-1]}{\underset{3}{b}}\,g^{il}g^{sm} + \overset{[-1]}{\underset{3}{c}}\,g^{im}g^{sl}
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

$$
\underset{1}{G}{}^{is} = g^{is}\underset{1}{d}, \qquad \overset{[-1]}{\underset{2}{G}}{}^{is} = g^{is}\overset{[-1]}{\underset{2}{d}}, \qquad \underset{3}{G}{}^{is} = g^{is}\underset{3}{d}
$$

Здесь $\overset{[\mathrm{g}]}{\underset{\mathfrak{a}}{a}}, \overset{[\mathrm{g}]}{\underset{\mathfrak{a}}{b}}, \overset{[\mathrm{g}]}{\underset{\mathfrak{a}}{c}}, \overset{[\mathrm{g}]}{\underset{\mathfrak{a}}{d}}$ ($\mathfrak{a} = 1,2,3$; $\mathrm{g} = 0,-1,-2$) – двенадцать определяющих псевдоскаляры гемитропного микрополярного термоупругого тела GN-I. Метаиндекс $\mathfrak{a}$ – нумерует определяющие псевдоскаляры. С точки зрения тензорной алгебры $\overset{[\mathrm{g}]}{\underset{\mathfrak{a}}{a}}, \overset{[\mathrm{g}]}{\underset{\mathfrak{a}}{b}}, \overset{[\mathrm{g}]}{\underset{\mathfrak{a}}{c}}, \overset{[\mathrm{g}]}{\underset{\mathfrak{a}}{d}}$, как минимум, являются полуизотропными инвариантами.

Подставив координатные представления (5.1) в определяющие соотношения (4.10), получим

$$
\begin{aligned}
t^{is} = {} & (\underset{1}{a}\,g^{is}g^{lm} + \underset{1}{b}\,g^{il}g^{sm} + \underset{1}{c}\,g^{im}g^{sl})\epsilon_{lm} + \\
& + \frac{1}{2}(\overset{[-1]}{\underset{3}{a}}\,g^{is}g^{lm} + \overset{[-1]}{\underset{3}{b}}\,g^{il}g^{sm} + \overset{[-1]}{\underset{3}{c}}\,g^{im}g^{sl})\,\overset{[+1]}{\kappa}{}_{lm} + \frac{1}{2}\underset{1}{d}\,\theta g^{is}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overset{[-1]}{\mu}{}^{is} = {} & (\overset{[-2]}{\underset{2}{a}}\,g^{is}g^{lm} + \overset{[-2]}{\underset{2}{b}}\,g^{il}g^{sm} + \overset{[-2]}{\underset{2}{c}}\,g^{im}g^{sl})\,\overset{[+1]}{\kappa}{}_{lm} + \\
& + \frac{1}{2}(\overset{[-1]}{\underset{3}{a}}\,g^{is}g^{lm} + \overset{[-1]}{\underset{3}{b}}\,g^{il}g^{sm} + \overset{[-1]}{\underset{3}{c}}\,g^{im}g^{sl})\epsilon_{lm} + \frac{1}{2}\overset{[-1]}{\underset{2}{d}}\,\theta g^{is}
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

[8] Подразумевается использование произвольной координатной криволинейной сетки. Алгоритм представления тензоров с постоянными коэффициентами подробно описан в монографиях (см. [22, с. 167], [32, с. 70], [33, с. 445]) и работах [34, 35].

$$2\rho\bar{s} = -g^{is}\underset{1}{d}\epsilon_{is} - g^{is}\overset{[-1]}{\underset{2}{d}}\overset{[+1]}{\kappa}_{is} - 2F\theta$$
$$h_i = -\underset{3}{d}\nabla_i\theta.$$

Вместо определяющих псевдоскаляров $\overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{a}}$, $\overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{b}}$, $\overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{c}}$, $\overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{d}}$ можно перейти к конвенциональным определяющим псевдоскалярам, таким как: G – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; $\overset{[-1]}{L}$ – характерная микродлина; $\overset{[-2]}{\mathfrak{c}}_1$, $\overset{[+2]}{\mathfrak{c}}_2$, $\mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{c}_4$, $\mathfrak{c}_5$, $\mathfrak{c}_6$ – не имеющие физической размерности псевдоскаляры; $\underset{*}{\alpha}$ – коэффициент линейного теплового расширения; $\overset{[+1]}{\underset{*}{\beta}}$ – коэффициент теплового изгиба–кручения; λ – коэффициент теплопроводности; c – теплоемкость на единицу массы при $\epsilon_{is} = 0$ (см. [36, 37]). В этом случае характерная микродлина L будет псевдоскаляром отрицательного веса –1.

Сравнивая (5.2) с аналогичными формулами в [37, формулы (2.12)]:

$$\begin{gathered}
\underset{1}{A} = G\nu(1-2\nu)^{-1}, \quad \overset{[-2]}{\underset{2}{A}} = G\overset{[-1]}{L}\,\overset{[-1]}{L}c_3, \quad \underset{3}{A} = G \\
\overset{[-2]}{\underset{4}{A}} = G\overset{[-1]}{L}\,\overset{[-1]}{L}, \quad \overset{[-2]}{\underset{5}{A}} = 2G\overset{[-2]}{c}_1, \quad \underset{6}{A} = 2G\overset{[-1]}{L}\,\overset{[-1]}{L}\,\overset{[+2]}{c}_2 \\
\overset{[-1]}{\underset{7}{A}} = G\overset{[-1]}{L}c_4, \quad \overset{[-1]}{\underset{8}{A}} = G\overset{[-1]}{L}c_5, \quad \overset{[-1]}{\underset{9}{A}} = G\overset{[-1]}{L}c_6
\end{gathered} \tag{5.3}$$

для безразмерных определяющих псевдоскаляров удобно ввести новые обозначения

$$\begin{gathered}
\overset{[-2]}{c}_1 = \overset{[-2]}{\mathfrak{c}}_1, \quad \overset{[+2]}{c}_2 = \overset{[+2]}{\mathfrak{c}}_2, \quad c_3 = \mathfrak{c}_3 \\
c_4 = 2\mathfrak{c}_6, \quad c_5 = 2\mathfrak{c}_4, \quad c_6 = -4\mathfrak{c}_5
\end{gathered} \tag{5.4}$$

Подставляя (5.4) в (5.3), получим

$$\begin{gathered}
\underset{1}{A} = G\nu(1-2\nu)^{-1}, \quad \overset{[-2]}{\underset{2}{A}} = G\overset{[-1]}{L}\,\overset{[-1]}{L}\mathfrak{c}_3, \quad \underset{3}{A} = G \\
\overset{[-2]}{\underset{4}{A}} = G\overset{[-1]}{L}\,\overset{[-1]}{L}, \quad \overset{[-2]}{\underset{5}{A}} = 2G\overset{[-2]}{\mathfrak{c}}_1, \quad \underset{6}{A} = G\overset{[-1]}{L}\,\overset{[-1]}{L}\,\overset{[+2]}{\mathfrak{c}}_2 \\
\overset{[-1]}{\underset{7}{A}} = 2G\overset{[-1]}{L}\mathfrak{c}_6, \quad \overset{[-1]}{\underset{8}{A}} = 2G\overset{[-1]}{L}\mathfrak{c}_4, \quad \overset{[-1]}{\underset{9}{A}} = -4G\overset{[-1]}{L}\mathfrak{c}_5
\end{gathered} \tag{5.5}$$

откуда, учитывая определяющие уравнения (5.2), можно установить

$$\begin{gathered}
\underset{1}{a} = 2\underset{1}{A}, \quad \underset{1}{b} + \underset{1}{c} = 2\underset{3}{A}, \quad \underset{1}{b} - \underset{1}{c} = e^2\overset{[-2]}{\underset{5}{A}} \\
\overset{[-2]}{\underset{2}{a}} = 2\overset{[-2]}{\underset{2}{A}}, \quad \overset{[-2]}{\underset{2}{b}} + \overset{[-2]}{\underset{2}{c}} = 2\overset{[-2]}{\underset{4}{A}}, \quad \overset{[-2]}{\underset{2}{b}} - \overset{[-2]}{\underset{2}{c}} = e^{-2}\underset{6}{A} \\
\overset{[-1]}{\underset{3}{a}} = 2\overset{[-1]}{\underset{7}{A}}, \quad \overset{[-1]}{\underset{3}{b}} + \overset{[-1]}{\underset{3}{c}} = 2\overset{[-1]}{\underset{8}{A}}, \quad \overset{[-1]}{\underset{3}{b}} - \overset{[-1]}{\underset{3}{c}} = -\overset{[-1]}{\underset{9}{A}}
\end{gathered} \tag{5.6}$$

Подставляя (5.5) в (5.6) и выражая $\overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{a}}$, $\overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{b}}$, $\overset{[g]}{\underset{\mathfrak{a}}{c}}$, в итоге получим

$$\underset{1}{a} = 2G\nu(1-2\nu)^{-1}, \quad \underset{1}{b} = G(1+e^2\overset{[-2]}{\mathfrak{c}}_1), \quad \underset{1}{c} = G(1-e^2\overset{[-2]}{\mathfrak{c}}_1)$$

Таблица 1. Веса определяющих тензоров и псевдотензоров связанной термоупругой гемитропной среды

Терминологическое обозначение	Символьное обозначение	Вес	Преобразование к абсолютному тензору
определяющий тензор i (first constitutive tensor)	$\underset{1}{H}{}^{islm}$	0	
определяющий псевдотензор ii (second constitutive pseudotensor)	$\underset{2}{H}{}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}$	–2	$\underset{2}{H}{}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m} = e^2 \overset{[-2]}{\underset{2}{H}}{}^{i\cdot l\cdot}_{\cdot s\cdot m}$
определяющий псевдотензор iii (third constitutive pseudotensor)	$\underset{3}{H}{}^{isl\cdot}_{\cdots m}$	–1	$\underset{3}{H}{}^{isl\cdot}_{\cdots m} = e \overset{[-1]}{\underset{3}{H}}{}^{isl\cdot}_{\cdots m}$
определяющий тензор iv (firth constitutive tensor)	$\underset{1}{G}{}^{is}$	0	
определяющий псевдотензор v (fifth constitutive pseudotensor)	$\underset{2}{G}{}^{i\cdot}_{\cdot s}$	–1	$\underset{2}{G}{}^{i\cdot}_{\cdot s} = e \overset{[-1]}{\underset{2}{G}}{}^{i\cdot}_{\cdot s}$
определяющий скаляр vi (sixth constitutive scalar)			

$$
\begin{aligned}
&\overset{[-2]}{\underset{2}{a}} = 2G \overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\mathfrak{c}_3, \quad \overset{[-2]}{\underset{2}{b}} = G \overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}(1 + e^{-2}\overset{[+2]}{\mathfrak{c}}{}_2)\\
&\overset{[-2]}{\underset{2}{c}} = G \overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}(1 - e^{-2}\overset{[+2]}{\mathfrak{c}}{}_2), \quad \overset{[-1]}{\underset{3}{a}} = 4G \overset{[-1]}{L}\mathfrak{c}_6\\
&\overset{[-1]}{\underset{3}{b}} = 2G \overset{[-1]}{L}(\mathfrak{c}_4 - \mathfrak{c}_5), \quad \overset{[-1]}{\underset{3}{c}} = 2G \overset{[-1]}{L}(\mathfrak{c}_4 + \mathfrak{c}_5)
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

$$
\underset{1}{d} = -4G\frac{1+\nu}{1-2\nu}\underset{*}{\alpha}, \quad \overset{[-1]}{\underset{2}{d}} = -4G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\overset{[+1]}{\underset{*}{\beta}}, \quad \underset{3}{d} = k, \quad F = -\frac{\rho c}{\theta_0}
$$

Принимая обозначения для определяющих постоянных

$$
c_4' = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c_5' = \frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c_6' = -c_6 \tag{5.8}
$$

или, с учетом (5.4)

$$
c_4' = 2\mathfrak{c}_6 + \mathfrak{c}_4 - \mathfrak{c}_5, \quad c_5' = \mathfrak{c}_4 + \mathfrak{c}_5, \quad c_6' = 4\mathfrak{c}_5 \tag{5.9}
$$

уравнение теплопроводности и динамические уравнения можно представить в окончательной форме

$$
\begin{aligned}
G[(1 + e^2\overset{[-2]}{\mathfrak{c}}{}_1)\nabla^s\nabla_s u^i + (1 - e^2\overset{[-2]}{\mathfrak{c}}{}_1 + 2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + 2\overset{[-2]}{\mathfrak{c}}{}_1\epsilon^{ikl}\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}_l +\\
+ \overset{[-1]}{L} c_4'\nabla^i\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^k + \overset{[-1]}{L} c_5'\nabla^k\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^i] - 2G\underset{*}{\alpha}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla_i\theta = -\rho(f^i - \partial_{\cdot\cdot}u^i)
\end{aligned}
$$

$$G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} \left[\left(1 + \frac{1}{e^2} \overset{[+2]}{\mathfrak{c}}_2 \right) \nabla^s \nabla_s \overset{[+1]}{\phi}_i + \left(1 - \frac{1}{e^2} \overset{[+2]}{\mathfrak{c}}_2 + 2\mathfrak{c}_3 \right) \nabla_i \nabla_k \overset{[+1]}{\phi}{}^k + \right.$$
$$\left. + \overset{[-1]}{L}{}^{-1} c_4' \nabla_i \nabla^k u_k + \overset{[-1]}{L}{}^{-1} c_5' \nabla^k \nabla_k u_i + \overset{[-1]}{L}{}^{-1} c_6' \epsilon_{isl} \nabla^s \overset{[+1]}{\phi}{}^l \right] -$$
$$- 2eG \overset{[-2]}{\mathfrak{c}}_1 (2 \overset{[+1]}{\phi}_i - e^2 \epsilon_{ikl} g^{ks} \nabla_s u^l) - 2G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} \underset{*}{\overset{[+1]}{\beta}} \nabla_i \theta = -\rho(\overset{[-1]}{l}_i - \overset{[-2]}{\mathfrak{J}} \partial_{\cdot\cdot} \overset{[+1]}{\phi}_i)$$

$$\nabla_s \nabla^s \theta - \frac{c\rho}{\lambda} \partial_{\cdot} \theta - 2G \underset{*}{\alpha} \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{\theta_0}{\lambda} \nabla_s \partial_{\cdot} u^s - 2G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} \underset{*}{\overset{[+1]}{\beta}} \frac{\theta_0}{\lambda} \nabla_s \partial_{\cdot} \overset{[+1]}{\phi}{}^s + \frac{\rho q}{\lambda} = 0$$

где f_i — вектор массовых сил, $\mathfrak{J}$ — момент микроинерции, l_i — вектор массовых моментов.

Заключение. В настоящей статье рассмотрен сравнительно новый подход к математическому моделированию связанной термоупругой гемитропной среды.

1. Предложены новые подходы к построению энергетических форм и уравнений механики микрополярной термоупругости.

2. Получены уравнение теплопроводности и динамические уравнения гемитропного микрополярного термоупругого GN-I континуума в пседотензорной формулировке.

3. Использовались общие термодинамические принципы неравновесной термодинамики.

4. Анизотропные определяющие псевдотензоры в представлении квадратичной энергетической формы включают: 3 псевдотензора четвертого ранга, 3 псевдотензора второго ранга и один абсолютный скаляр.

5. Анизотропная энергетическая форма редуцировалась к гемитропной с помощью специальных координатных представлений для определяющих псевдотензоров.

6. Рассмотрены различные варианты определяющих скаляров и псевдоскаляров, в том числе, конвенционально используемые материальные псевдоскаляры: модуль сдвига, коэффициент Пуассона, характерная микродлина (являющаяся псевдоскаляром отрицательного веса, чувствительным к отражениям трехмерного пространства), коэффициент линейного теплового расширения; коэффициент теплового искажения, коэффициент теплопроводности, теплоемкость на единицу массы и псевдоскаляры, не имеющие физической размерности.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00262).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Turpin J.P., Bossard J.A., Morgan K.L. et al.* Reconfigurable and tunable metamaterials: a review of the theory and applications // Int. J. Antennas Propag. 2014. V. 2014. P. 429837.
https://doi.org/10.1155/2014/429837
2. *Giorgio I., Hild F., Gerami E. et al.* Experimental verification of 2D cosserat chirality with stretch-micro-rotation coupling in orthotropic metamaterials with granular motif // Mech. Res. Commun. 2022. P. 104020.
https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2022.104020
3. *Reasa D.R., Lakes R.S.* Nonclassical Chiral Elasticity of the Gyroid Lattice // Phys. Rev. Lett. 2020. V. 125. P. 205502.
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.205502
4. *Askari M., Hutchins D.A., Thomas P.J. et al.* Additive manufacturing of metamaterials: A review // Addit. Manuf. 2020. V. 36. P. 101562.
https://doi.org/10.1016/j.addma.2020.101562
5. *Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* Metamaterial models of continuum multiphysics // Труды международной школы-конференции молодых ученых “Механика 2016”. Цахкад-

зор, Армения, 03–07 октября 2016. Ереван: Национальный университет архитектуры и строительства Армении, 2016. С. 160–163.

6. *Ковалев В.А., Мурашкин Е.В.* О принципе термомеханической ортогональности в проблемах моделирования сложных сред и метаматериалов // Вестн. Чувашского гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер.: Мех. пред. сост. 2019. № 1(49). Р. 20–31. https://doi.org/10.26293/chgpu.2019.39.1.003
7. *Müller I., Ruggeri T.* Rational extended thermodynamics. Berlin: Springer Science & Business Media, 2013. 411 p.
8. *Truesdell C.* Rational thermodynamics: a course of lectures on selected topics. New York: McGraw-Hill, 1969. 208+ix p.
9. *Truesdell C., Toupin R.* The classical field theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. by *S. Flügge*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1960. P. 226–858. https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2
10. *Besdo D.* Ein beitrag zur nichtlinearen theorie des Cosserat-kontinuums // Acta Mech. 1974. V. 20. № 1. P. 105–131. https://doi.org/10.1007/BF01374965
11. *Nowacki W.* Theory of micropolar elasticity. Springer, 1972. 286 p. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2720-9
12. *Nowacki W.* Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
13. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 668 с.
14. *Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В.* Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 4. С. 399–412. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412
15. *Седов Л.И.* Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 592 с.
16. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. Часть 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.
17. *Радаев Ю.Н.* Задачи и теоремы по курсу “Математическая теория пластичности”. Самара: Самарский гос. ун-т, 1996. 80 с.
18. *Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.
19. *Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.* Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты. М.: Физматлит, 2009. 156 с.
20. *Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On a micropolar theory of growing solids // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 3. С. 424–444. https://doi.org/10.14498/vsgtu1792
21. *Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On the Neuber theory of micropolar elasticity. A pseudotensor formulation // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 4. С. 752–761. https://doi.org/10.14498/vsgtu1799
22. *Гуревич Г.Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с.
23. *Schouten J.A.* Tensor Analysis for Physicist. Oxford: Clarendon Press, 1965. 434 p.
24. *Sokolnikoff I.* Tensor Analysis: Theoryand Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York: John Wiley & Sons Inc., 1964. 361 p.
25. *Synge J.L., Schild A.* Tensor Calculus. Toronto: Toronto University Press, 1949. 334 p.
26. *Veblen O., Thomas T.Y.* Extensions of relative tensors // Trans. Am. Math. Society. 1924. V. 26. P. 373–377.
27. *Veblen O.* Invariants of Quadratic Differential Forms. Cambridge: The University Press, 1933. 102 p.
28. *Мак-Коннел А.Дж.* Введение в тензорный анализ: С приложениями к геометрии, механике и физике. М.: Физматгиз, 1963. 411 с.
29. *Копф А.* Основы теории относительности Эйнштейна. М.: ГТТИ, 1933. 175 с.
30. *Радаев Ю.Н.* Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Самар. гос. ун-т, 2006. 340 р.
31. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // Вестн. Чувашского гос. пед. ун-та

им. И.Я. Яковлева. Сер.: Мех. пред. сост. 2022. № 1(51). P. 17–26.
https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002

32. *Jeffreys H.* Cartesian Tensors. Cambridge: Cambridge University Press, 1931. 101 p.
33. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 р.
34. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // Вестн. Чувашского гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер.: Мех. пред. сост. 2022. № 2(52). P. 106–115.
https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002
35. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // Вестн. Чувашского гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер.: Мех. пред. сост. 2022. № 2(52). P. 118–127.
https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002
36. *Радаев Ю.Н.* Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2018. V. 22. № 3. P. 504–517.
https://doi.org/10.14498/vsgtu1635
37. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Об определяющих псевдоскалярах гемитропных микрополярных сред в инверсных координатных системах // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 3. С. 457–474.
https://doi.org/10.14498/vsgtu1870