ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 3, с. 177–180

УДК: 531.1, 515.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЧАСТНЫМ ИНТЕГРАЛОМ ГОРЯЧЕВА–ЧАПЛЫГИНА

© 2023 г. М. А. Новиков[a,*]

[a] *Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия*

**e-mail: nma@icc.ru*

Поступила в редакцию 27.05.2022 г.
После доработки 28.07.2022 г.
Принята к публикации 19.08.2022 г.

В предыдущих статьях другими авторами установлены стационарные движения в механической системе в случае существования частного интеграла Горячева–Чаплыгина. Там же изучены некоторые инвариантные множества и их устойчивость, включая одно из стационарных движений. В этой статье окончательно исследована устойчивость оставшегося второго состояния покоя.

Ключевые слова: устойчивость движения, характеристическое уравнение, собственное значение, интеграл уравнений движения, связка из первых интегралов

DOI: 10.31857/S0572329923700022, **EDN:** JMVHAV

1. Введение. Рассматривается механическая нелинейная автономная консервативная система, в которой описывается движение твердого тела вокруг неподвижной точки [1–4]. Движение тела задается дифференциальными уравнениями [4]:

$$\begin{aligned} A\dot{p} &= (B - C)\mathrm{qr} + m(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2), & \dot{\gamma}_1 &= \mathrm{r}\gamma_2 - \mathrm{q}\gamma_3 \\ B\dot{q} &= (C - A)\mathrm{rp} + m(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3), & \dot{\gamma}_2 &= \mathrm{p}\gamma_3 - \mathrm{r}\gamma_1 \\ C\dot{r} &= (A - B)\mathrm{pq} + m(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1), & \dot{\gamma}_3 &= \mathrm{q}\gamma_1 - \mathrm{p}\gamma_2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где A, B, C $(A \neq C)$ – моменты инерции твердого тела относительно главных осей Ox, Oy, Oz; p, q, r – проекции мгновенной угловой скорости на подвижные оси; x_0, y_0, z_0 – координаты центра масс в подвижных осях; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – проекции ортов подвижных осей на неподвижную ось OZ, направленную вертикально вниз (углы Пуассона); $m = Mg$ – приведенная величина; M – масса тела; g – ускорение свободного падения.

В этой задаче существуют три общих интеграла [1–3]:

$V_0 = A\mathrm{p}^2 + B\mathrm{q}^2 + C\mathrm{r}^2 - 2m(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) = c_0 = \mathrm{const}$ (интеграл энергии)

$V_1 = A\mathrm{p}\gamma_1 + B\mathrm{q}\gamma_2 + C\mathrm{r}\gamma_3 = c_1 = \mathrm{const}$ (кинетического момента)

$V_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ (интеграл Пуассона)

В частном случае при $A = B = 4C$, $y_0 = 0 = z_0$, $c_1 = 0$ [3] существует дополнительно первый интеграл Горячева–Чаплыгина, который при обозначении $a = m\,x_0/C$ можно записать

$$V_3 = \mathrm{r}(\mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2) + a\mathrm{p}\gamma_3 = \mathrm{const}$$

Параметр a очевидно допускает значения разных знаков. Соответственно система дифференциальных уравнений движения примет вид:

$$\begin{aligned} &\dot{\mathrm{p}} = \frac{3}{4}\mathrm{qr}, \quad \dot{\gamma}_1 = \mathrm{r}\gamma_2 - \mathrm{q}\gamma_3 \\ &\dot{\mathrm{q}} = \frac{-(3\mathrm{pr} + a\gamma_3)}{4}, \quad \dot{\gamma}_2 = \mathrm{p}\gamma_3 - \mathrm{r}\gamma_1 \\ &\mathrm{r} = a\gamma_2, \quad \dot{\gamma}_3 = \mathrm{q}\gamma_1 - \mathrm{p}\gamma_2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

В статье [5] при изучении инвариантных множеств в системе с частным интегралом Горячева–Чаплыгина, в частности, выявлены стационарные движения:

$$\mathrm{p}_0 = 0; \quad \mathrm{q}_0 = 0; \quad \mathrm{r}_0 = 0; \quad \gamma_{10} = +1; \quad \gamma_{20} = 0; \quad \gamma_{30} = 0 \tag{1.3}$$

$$\mathrm{p}_0 = 0; \quad \mathrm{q}_0 = 0; \quad \mathrm{r}_0 = 0; \quad \gamma_{10} = -1; \quad \gamma_{20} = 0; \quad \gamma_{30} = 0 \tag{1.4}$$

Они могут быть получены как не зависящие от времени, предельные решения для инвариантных множеств. Там же установлена устойчивость положения покоя (1.4). Осталась неисследованной устойчивость другого положения покоя.

Такие же стационарные движения получены и в статье [6]. В последней статье устойчивость не просто определить по бифуркационному комплексу, особенно на границе областей устойчивости, если учесть, что это свойство зависит от знака x_0. Поэтому проведем исследование устойчивости оставшегося стационарного движения традиционным способом.

2. Исследование устойчивости. Распространенным наиболее известным в настоящее время способом исследования устойчивости по Ляпунову стационарных движений является второй метод Ляпунова [7]. В автономных системах для проверки необходимых условий устойчивости вначале следует установить корни характеристического уравнения возмущенного движения. Для положения покоя (1.3) введем отклонения: $x_1 = \mathrm{p}$; $x_2 = \mathrm{q}$; $x_3 = \mathrm{r}$; $x_4 = \gamma_1 + 1$; $x_5 = \gamma_2$; $x_6 = \gamma_3$. Соответствующие уравнения возмущенного движения получаются следующими:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = \frac{3}{4}x_2x_3, \quad x_4 = x_3x_5 - x_2x_6 \\ &\dot{x}_2 = \frac{-(3x_1x_3 + ax_6)}{4}, \quad \dot{x}_5 = x_1x_6 - x_3x_4 - x_3 \\ &\dot{x}_3 = ax_5, \quad \dot{x}_6 = x_2x_4 - x_1x_5 + x_2 \end{aligned}$$

Матрица линейной правой части последней системы имеет вид

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-a}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение матрицы D_1 получается таким:

$$f_1(\lambda) = \det(D_1 - \lambda E) = \lambda^2(\lambda^2 + a)\left(\lambda^2 + \frac{a}{4}\right) = 0$$

Очевидно, при $a < 0$, когда $x_0 < 0$, последнее уравнение допускает отличные от нуля вещественные корни. Тогда для $x_0 < 0$ по теореме Ляпунова о неустойчивости [7] состояние покоя (1.3) неустойчиво по Ляпунову.

При исследовании достаточных условий устойчивости знакоопределенные функции Ляпунова будем строить способом Четаева [8] – связкой из интегралов возмущенного движения, которые в этом случае принимают вид

$$V_{01} = 4(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 - 2ax_4 = \text{const}$$

$$V_{11} = 4(x_1x_4 + x_2x_5) + x_3x_6 + 4x_1 = 0$$

$$V_{21} = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + 2x_4 = 0$$

$$V_{31} = x_3(x_1^2 + x_2^2) + ax_1x_6 = \text{const}$$

Связка из первых интегралов здесь запишется:

$$K_1(x,\alpha) = V_{01} - \alpha_1 V_{11} - \alpha_2 V_{21} - \alpha_3 V_{31}$$

Вещественные множители Лагранжа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ подбираются с целью обращения в нуль всех линейных слагаемых по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_6$ связки, которые здесь получаются как:

$$-2ax_4 - 4\alpha_1x_1 - 2\alpha_2x_4 = 0.$$

Такое условие выполняется при: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = -a$; α_3 – произвольном.

Более упрощенный анализ, очевидно, происходит при $\alpha_3 = 0$. Тогда связка интегралов при подстановке числовых значений $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_0$ будет следующей:

$$K_1(x,\alpha_0) = 4(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 + a(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) \tag{2.1}$$

Формально при $a > 0$ полученная квадратичная форма положительно определена. Следовательно, при $x_0 > 0$ положение покоя (1.3) устойчиво по Ляпунову [7].

Вообще говоря, из существования равенств $V_{11} = 0$, $V_{21} = 0$ можно заключить о зависимости между переменными. Две связанные переменные в этом случае следует исключить из общего числа переменных $x_1, x_2, \ldots, x_6$. Конечно, исключение не всякой переменной может привести к ожидаемому результату. Из равенства $V_{21} = 0$ выразим $x_4 = -1 + \sqrt{1-k}$, где $k = x_5^2 + x_6^2$, считая x_5, x_6 значительно малыми. Последнее выражение для анализа следует представить в аналитическом виде. С этой целью разложим его в сходящийся при $k < 1$ знакопостоянный ряд

$$x_4 = -\frac{1}{2}k - \frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{16}k^3 - \frac{5}{128}k^4 - \cdots \tag{2.2}$$

Здесь для бесконечно малых x_5, x_6 разложение (2.2) возможно в силу $x_5^2 + x_6^2 < 1$. Далее из равенства $V_{11} = 0$ составим выражение $x_1 = \dfrac{-(4x_2x_5 + x_3x_6)}{4(1 + x_4)}$. При значениях $k < 1$ и достаточно малых по абсолютной величине $x_4 < 0$ последнее можно представить сходящимся знакочередующимся рядом

$$x_1 = \frac{-(4x_2x_5 + x_3x_6)}{4}(1 - x_4 + x_4^2 - \cdots + (-1)^n x_4^n + \cdots) \tag{2.3}$$

Подстановка составленных x_1, x_4 в выражение V_{01} получает аналитическую функцию от четырех переменных, в которой форма наименьшего порядка $4x_2^2 + x_3^2 + a(x_5^2 + x_6^2)$ получается положительно определенной при $a > 0$ по переменным x_2, x_3, x_5, x_6. Тогда положение покоя (1.3) устойчиво по упомянутым переменным x_2, x_3, x_5, x_6 [9]. Ввиду ограниченности, что в частности выполняется при: $-k < -1 + \sqrt{1-k}$, для достаточно малых x_5, x_6, из (2.2) следует устойчивость и по x_4 [10]. При достаточно малых x_4 вследствие сходящегося ряда (2.3) так же [9] имеется устойчивость состояния покоя и по переменной x_1. Следовательно, формальной знакоопределенности связки интегралов $K_1(x, \alpha_0)$ при связанных равенствами $V_{11} = 0$, $V_{21} = 0$ переменных вполне достаточно для устойчивости соответствующего стационарного движения (1.3).

Устойчивость положения покоя (1.4) можно проводить аналогично, но она уже исследована в [5] при $x_0 < 0$ (здесь $a = -\omega^2 < 0$).

Полученные результаты можно составить в единой форме. Легко видеть, что положения покоя устойчивы при $x_0\gamma_1 > 0$, и неустойчивы при $x_0\gamma_1 < 0$.

Следует отметить, что при установлении достаточных условий устойчивости обеих положений покоя знакоопределенные функции Ляпунова были составлены только с участием интегралов энергии и Пуассона возмущенного движения.

Заключение. В статье окончательно для $x_0 > 0$ завершено исследование устойчивости стационарных движений в системе с частным интегралом Горячева–Чаплыгина. Вторым методом Ляпунова установлены достаточные условия устойчивости найденных положений покоя. Они соответствуют известной теореме Лагранжа [1] об устойчивости при минимуме потенциальной энергии.

Для случая частного интеграла Горячева–Чаплыгина устойчивость стационарных движений устанавливается квадратичными слагаемыми отклонений от состояния покоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. М.: ГИФМЛ, 1960. 487 с.
2. *Парс Л.А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
3. *Уиттекер Э.* Аналитическая динамика. Ижевск: Издательский дом “Удмурдский университет”, 1998. 584 с.
4. *Голубев В.В.* Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 287 с.
5. *Карапетян А.В.* Инвариантные множества в задаче Горячева–Чаплыгина: существование, устойчивость и ветвление // Прикл. мат. мех. 2006. Т. 70. Вып. 2. С. 221–224.
6. *Болсинов А.В., Борисов А.В., Мамаев И.С.* Топология и устойчивость интегрируемых систем // Успехи мат. наук. 2010. Т. 65. Вып. 2 (392). С. 71–132.
7. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // *Ляпунов А.М.* Собрание сочинений. Т. 2. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–263.
8. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
9. *Румянцев В.В.* Сравнение трех методов построения функций Ляпунова // Прикл. мат. мех. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 916–921.
10. *Озиранер А.С., Румянцев В.В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных // Прикл. мат. мех. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 364–383.