

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ПОЛУПЛОСКОСТИ И ПОЛОСЫ

© 2023 г. С. А. Калоеров^{а,*}, Е. С. Глушанков^{а,**}, А. Б. Мироненко^{а,***}

^а *Донецкий национальный университет, Донецк, Россия*

**e-mail: kaloerov@mail.ru*

***e-mail: evgenij.glushankov@gmail.com*

****e-mail: a.mironenko@donnu.ru*

Поступила в редакцию 16.06.2022 г.

После доработки 21.08.2022 г.

Принята к публикации 22.08.2022 г.

Приведено общее решение задач теории упругости для анизотропных полуплоскости и полосы с произвольными отверстиями и трещинами, использующее комплексные потенциалы плоской задачи теории упругости анизотропного тела, конформные отображения, представления голоморфных функций рядами Лорана и удовлетворение граничным условиям обобщенным методом наименьших квадратов. Задачи сведены к переопределенным системам линейных алгебраических уравнений, решаемых методом сингулярных разложений. Описаны результаты численных исследований для полосы с круговым отверстием при ее растяжении или действии равномерного давления по отрезку прямолинейной границы, а также для растяжения полосы с круговым отверстием и трещиной в перемычке, в том числе выходящей на границу полосы или на контур отверстия. Изотропные полуплоскость и полоса с отверстиями и трещинами рассматриваются как частные случаи общей задачи. Изучено влияние на значения и распределение напряжений геометрических характеристик отверстий и трещин, физико-механических свойств материала полосы.

Ключевые слова: полуплоскость, полоса, отверстия и трещины, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов

DOI: 10.31857/S0572329922600438, EDN: JLIYSC

Введение. Многие элементы конструкций современной науки и техники изготавливаются из анизотропных материалов. Под действием различных внешних сил в таких элементах могут возникать высокие концентрации напряжений, что нужно учитывать при проектировании конструкций. В связи с этим и до сих пор продолжается начатый еще в первой половине XX века процесс изучения различных свойств анизотропных материалов и их применений, о чем свидетельствует и многочисленные публикации в последние годы, в том числе в виде монографий [1–4].

Наибольшее распространение в качестве элементов конструкций получили анизотропные пластинки с отверстиями и трещинами. При исследовании напряженно-деформированного состояния анизотропных пластин наиболее надежные результаты дает использование комплексных потенциалов Лехницкого С.Г., широко используемых как для односвязных [5], так и для многосвязных областей [6]. Однако, если отверстия располагаются вблизи бесконечного прямолинейного контура, то при удовлетворении граничным условиям на нем обычными методами возникают определенные трудности. В работах [7, 8] при решении задачи для полуплоскости с отверстиями к

граничным условиям на прямолинейной границе были применены методы вычисления интегралов типа Коши, что обеспечило точное удовлетворение этим условиям. Но граничные условия на контурах отверстий были удовлетворены методом рядов, что не обеспечивало высокой точности удовлетворения этим условиям: хотя была установлена квазирегулярность получаемых бесконечных систем линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов рядов, обеспечивающая единственность и сходимости решения, для достаточно близких расстояний между контурами не удавалось достичь высокой точности удовлетворения граничным условиям на контурах отверстий. Позже в наших работах для более точного удовлетворения граничным условиям на контурах отверстий был введен дискретный метод наименьших квадратов, но он оказался громоздким при численных реализациях. Как показывают результаты наших исследований, при решении различных задач для многосвязных сред, наиболее точное удовлетворение граничным условиям на контурах отверстий обеспечивает использование обобщенного метода наименьших квадратов (ОМНК) [9, 10], который, к тому же, прост для численной реализации.

В данной статье с использованием ОМНК дано общее решение задач для полуплоскости и полосы с произвольными отверстиями и трещинами при действии различных внешних сил. Для полосы с круговым отверстием, с круговым отверстием и трещиной описаны результаты численных исследований с установлением влияния геометрических характеристик отверстия и трещины, а также упругих свойств материала полосы на значения напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений (КИН).

1. Постановка и метод решения задачи для полуплоскости. Рассмотрим сначала анизотропную пластинку в виде нижней полуплоскости с произвольными отверстиями и трещинами, находящуюся под действием различных внешних сил. При решении задачи теории упругости криволинейные контуры отверстий можно аппроксимировать дугами эллипсов и берегами прямолинейных разрезов, которые также рассматриваются как эллипсы, одна из полуосей которых равна нулю. В связи с этим рассмотрим нижнюю полуплоскость, занимающую многосвязную область S (рис. 1), ограниченную прямолинейной границей L^+ и контурами произвольно расположенных относительно друг друга и границы полуплоскости эллиптических отверстий L_l ($l = 1, \overline{\mathcal{L}}$) с полуосями a_l , b_l . Отнесем полуплоскость к прямоугольной системе координат Oxy с началом в произвольной точке полуплоскости на расстоянии h^+ от прямолинейной границы и направлением оси Ox вдоль направления прямолинейной границы полуплоскости. Кроме того, выберем локальные системы координат $O_lx_ly_l$ с началами в центрах эллипсов L_l и направлениями осей O_lx_l вдоль полуосей a_l . Тогда параметрические уравнения эллипсов L_l в локальных системах имеют вид

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta \quad (1.1)$$

а в основной системе координат будут такими:

$$x = x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l \quad (1.2)$$

При этом θ – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π ; x_{0l} , y_{0l} – координаты начала локальной системы координат $O_lx_ly_l$ в основной системе координат Oxy ; φ_l – угол между направлениями осей Ox и O_lx_l , отсчитываемый от Ox против часовой стрелки.

Пусть на конечном отрезке $[\alpha^+, \beta^+]$ прямолинейной границы L^+ действуют непрерывные распределенные внешние усилия, остальная ее часть свободна от усилий; контуры отверстий L_l загружены распределенными усилиями или жестко подкреплены. На бесконечности полуплоскость не загружена или находится под действием рас-

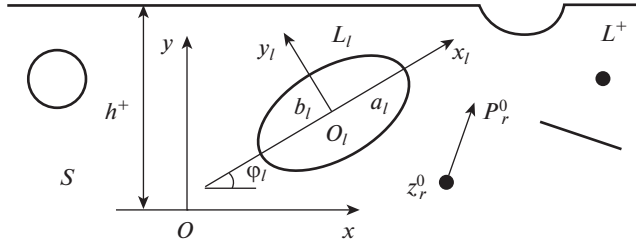


Рис. 1. Схема задачи для многосвязной полуплоскости.

тягивающих усилий интенсивности p , и, следовательно, в силу незагруженности прямолинейной границы, на бесконечности $\sigma_x^\infty = p$, а остальные напряжения и угол поворота равны нулю ($\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = \omega_3^\infty = 0$). Кроме того, во внутренних точках полуплоскости $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ ($r = \overline{1, R}$) действуют сосредоточенные силы $P_r^0(X_r^0, Y_r^0)$.

Если исследования напряженно-деформированного состояния анизотропной пластинки проводить с использованием комплексных потенциалов теории упругости анизотропного тела [5], то они сводятся к нахождению из соответствующим граничных условий функций $\Phi_k(z_k)$ ($k = 1, 2$) обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y \quad (1.3)$$

где μ_k — корни характеристического уравнения 4-го порядка

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (1.4)$$

a_{ij} — коэффициенты деформации материала пластинки. При этом комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в многосвязных областях S_k , ограниченных контурами L_{kl} ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), соответствующими контурам L_l области S при аффинных преобразованиях (1.3), и в общем случае бесконечной многосвязной пластинки имеют вид [11]

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k z_k + N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \Phi_{kl}(z_k) \quad (1.5)$$

в котором

$$N_k(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} A_{kl} \ln(z_k - z_{kl}) + \sum_{r=1}^R A_{kr}^0 \ln(z_k - z_{kr}^0)$$

$\Gamma_k, A_{kl}, A_{kr}^0$ — постоянные, определяемые из решения следующих систем линейных алгебраических уравнений:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) \Gamma_k = \left(0, 0, \sigma_x^\infty, \frac{a_{16}}{2a_{22}} \sigma_x^\infty \right) \quad (1.6)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kl} = \left(\frac{Y_l}{2\pi}, -\frac{X_l}{2\pi}, -\frac{a_{12} Y_l}{a_{11} 2\pi} - \frac{a_{16} X_l}{a_{11} 2\pi}, \frac{a_{26} Y_l}{a_{22} 2\pi} + \frac{a_{12} X_l}{a_{22} 2\pi} \right) \quad (1.7)$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \left(1, \mu_k, \mu_k^2, \frac{1}{\mu_k} \right) i A_{kr}^0 = \left(\frac{Y_r^0}{2\pi}, -\frac{X_r^0}{2\pi}, -\frac{a_{12} Y_r^0}{a_{11} 2\pi} - \frac{a_{16} X_r^0}{a_{11} 2\pi}, \frac{a_{26} Y_r^0}{a_{22} 2\pi} + \frac{a_{12} X_r^0}{a_{22} 2\pi} \right) \quad (1.8)$$

X_l, Y_l – компоненты главного вектора приложенных по контуру отверстия L_l внешних усилий; $z_{kl} = x_{0l} + \mu_k y_{0l}$ и $z_{kr}^0 = x_r^0 + \mu_k y_r^0$ – точки в областях S_k , соответствующие при аффинных преобразованиях (1.3) точкам $z_{0l}(x_{0l}, y_{0l})$ и $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$; $\Phi_{kl}(z_k)$ – функции, голоморфные вне контуров L_{kl} . Для построения последних функций используем методы конформных отображений.

Учитывая параметрические уравнения (1.1) эллипсов L_l и известные равенства $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right)$, $\sin\theta = -\frac{i}{2}\left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right)$, $\sigma = e^{i\theta}$, на основе формул (1.2) и (1.3) получим связи между граничными значениями σ и $t_k = x + \mu_k y$. Заменяя эти граничные значения на их значения ζ_{kl} и z_k в областях, найдем конформные отображения внешностей единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллиптических контуров L_{kl} в виде

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right) \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l} \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2} \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}} \end{aligned}$$

Тогда функции $\Phi_{kl}(z_k)$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), голоморфные вне контуров L_{kl} , включая бесконечно удаленную точку, после конформных отображений (1.9) будут голоморфными вне единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ и их можно разложить в ряды Лорана вида $\Phi_{kl}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n} c$ неизвестными коэффициентами a_{kln} . Окончательно для комплексных потенциалов (1.5) получаем выражения

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + N_k(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \Phi_{kln}(z_k) \quad (1.10)$$

где $\Phi_{kln}(z_k) = 1/\zeta_{kl}^n$. Входящие в (1.10) неизвестные постоянные a_{kln} определяются из граничных условий на контурах отверстий. Для многосвязных областей этим условиям удобнее удовлетворять в дифференциальной форме, получаемой из известных [5лех] их дифференцированием по дуге контура L_l и имеющей вид

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 g_{iki} \delta_{ks} \Phi'_k(t_k) = f'_{i1}(t) \quad (i = \overline{1, 2}) \quad (1.11)$$

в котором $\delta_{ks} = dz_k/ds$;

$$g_{1kl} = 1, \quad g_{2kl} = -\mu_k, \quad f'_{11}(t) = \mp Y_n, \quad f'_{21}(t) = \mp X_n \quad (1.12)$$

в случае задания на контуре компонент внешних усилий X_n, Y_n ,

$$g_{1kl} = p_k, \quad g_{2kl} = q_k, \quad f'_{11}(t) = du^*/ds, \quad f'_{21}(t) = dv^*/ds$$

если на контуре заданы перемещения u^*, v^* ;

$$p_k = a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k, \quad q_k = a_{12}\mu_k + \frac{a_{22}}{\mu_k} - a_{26}$$

Верхние знаки в равенствах (1.12) соответствуют положительному обходу области, нижние – отрицательному обходу.

Если контуры отверстий полностью лежат внутри полуплоскости, то при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе лучше всего использовать методы вычисления интегралов типа Коши. Тогда на основе (1.10) для производных комплексных потенциалов, точно удовлетворяющих граничным условиям на прямолинейной границе, получаются выражения [8, 10, 12]

$$\begin{aligned} \Phi'_k(z_k) = & \Gamma_k + N'_k(z_k) + F_k^{r+}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Phi'_{kln}(z_k) a_{kln} - \right. \\ & \left. - \bar{r}_{1k} \Phi_{kln}^+(z_k) \bar{a}_{kln} - \bar{r}_{2,k+1} \Phi_{k+1ln}^+(z_k) \bar{a}_{k+1ln} \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

в которых

$$F_k^{r+}(z_k) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{f_k^{r+}(t) dt}{t - z_k} - \bar{r}_{1k} N_k^{r+}(z_k) - \bar{r}_{2,k+1} N_{k+1}^{r+}(z_k) \quad (1.14)$$

$$f_k^{r+}(t) = \begin{cases} -\frac{X_n^+ + \mu_{k+1} Y_n^+}{\mu_k - \mu_{k+1}} & \text{на отрезке } [\alpha^+, \beta^+] \\ 0 & \text{вне отрезка } [\alpha^+, \beta^+] \end{cases} \quad (1.15)$$

X_n^+, Y_n^+ – проекции на оси основной системы координат действующих на отрезке $[\alpha^+, \beta^+]$ прямолинейной границы L^+ внешних усилий;

$$\begin{aligned} N'_k(z_k) &= \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \frac{A_{kl}}{z_k - z_{kl}} + \sum_{r=1}^R \frac{A_{kr}^0}{z_k - z_{kr}^0} \\ N_{k+j}^{r+}(z_k) &= \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \frac{\overline{A_{k+jl}}}{z_k + (\mu_{k+j} - \mu_k) h^+ - z_{kl}} + \sum_{r=1}^R \frac{\overline{A_{k+jr}^0}}{z_k + (\mu_{k+j} - \mu_k) h^+ - z_{kr}^0} \quad (j = 0, 1) \\ \bar{r}_{1k} &= \frac{\bar{\mu}_k - \mu_{k+1}}{\mu_k - \mu_{k+1}}, \quad \bar{r}_{2,k+1} = \frac{\bar{\mu}_{k+1} - \mu_{k+1}}{\mu_k - \mu_{k+1}} \end{aligned} \quad (1.16)$$

k – индекс, принимающий значения 1, 2, причем значение индекса $k + 1$ при $k = 2$ формально полагается равным 1;

$$\begin{aligned} \Phi'_{kln}(z_k) &= -\frac{n}{R_{kl} \zeta_{kl}^{n-1} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})} \\ \Phi_{k+jln}^{r+}(z_k) &= -\frac{n}{R_{kl} (\zeta_{k+jl}^+)^{n-1} ((\zeta_{k+jl}^+)^2 - \bar{m}_{kl})} \quad (j = 0, 1) \end{aligned}$$

ζ_{k+jl}^+ – переменные, определяемые из построенных по аналогии с (1.9) конформных отображений внешностей единичных окружностей $|\zeta_{k+jl}^+| \geq 1$ на внешности вообразаемых контуров L_{k+jl}^+ верхней полуплоскости по формулам

$$z_k = -(\bar{\mu}_{k+j} - \zeta_{kl}) h^+ + \bar{z}_{k+jl} + \bar{R}_{k+jl} \left(\zeta_{k+jl}^+ + \frac{\bar{m}_{k+jl}}{\zeta_{k+jl}^+} \right) \quad (j = 0, 1) \quad (1.17)$$

a_{kln} — неизвестные коэффициенты разложений функций в ряды Лорана, которые будем определять из граничных условий (1.11) на контурах отверстий ОМНК [9, 10]. Заметим, что соотношения (1.17) получаются на основе конформных отображений (1.9). Для их нахождения нужно соотношения (1.9) рассматривать на границе полуплоскости, взять от них сопряжения и выразить контурные значения переменных их значениями в областях, в частности, t_k и t_{k+1} переменной z_k [10].

Но методы вычисления интегралов типа Коши применимы, а следовательно, и получение вида функций (1.13) возможно, если контуры отверстий не имеют общих точек с прямолинейной границей.

Рассмотрим теперь случай, когда контуры отверстий могут пересекать прямолинейную границу. В этом случае некоторые из входящих в выражения (1.13) функций в точках прямолинейной границы будут иметь особенность, и вычислять соответствующие интегралы типа Коши не удастся. В этих случаях ОМНК можно использовать и при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе. Но в таком, общем случае коэффициенты рядов (1.13) в функциях, голоморфных вне воображаемых отверстий верхних полуплоскостей не равны \bar{a}_{kln} , а их нужно определять из граничных условий. Обозначив их через \bar{b}_{kln} , функции (1.13) запишем в виде

$$\begin{aligned} \Phi'_k(z_k) = & \Gamma_k + N'_k(z_k) + F_k^{*+}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Phi'_{kln}(z_k) a_{kln} - \right. \\ & \left. - \bar{r}_{1k} \Phi_{kln}^+(z_k) \bar{b}_{kln} - \bar{r}_{2,k+1} \Phi_{k+1ln}^+(z_k) \bar{b}_{k+1ln} \right] \end{aligned} \quad (1.18)$$

Теперь для нахождения неизвестных коэффициентов a_{kln} , \bar{b}_{kln} рядов Лорана ОМНК удовлетворим граничным условиям на всех контурах, включая и прямолинейную границу. Для этого на L_p ($p = \overline{1, \mathcal{L}}$) и на L^+ используем ОМНК [9, 10, 12–14]. Выберем на каждом из контуров L_p области S систему точек $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ ($p = \overline{1, \mathcal{L} + 1}$, $m = \overline{1, M_p}$) (при этом под $L_{\mathcal{L}+1}$ понимается контур L^+), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (1.18). Тогда для определения неизвестных постоянных a_{kln} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} [\Phi'_{kln}(t_{kpm}) a_{kln} - \bar{r}_{1k} \Phi_{kln}^+(t_{kpm}) \bar{b}_{kln} - \bar{r}_{2,k+1} \Phi_{k+1ln}^+(t_{kpm}) \bar{b}_{k+1ln}] = \\ = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \delta_{k,s} [\Gamma_k + N'_k(t_{kpm}) + F_k^{*+}(t_{kpm})] \quad (i = 1, 2; p = \overline{1, \mathcal{L} + 1}; m = \overline{1, M_p}) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Систему (1.19) будем решать с использованием сингулярных разложений [15, 16]. После нахождения псевдорешения системы (1.19) постоянные a_{kln} и \bar{b}_{kln} , а следовательно, и комплексные потенциалы (1.18), будут известными и по ним можно найти в любой точке полуплоскости основные напряжения [5, 17]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k) \quad (1.20)$$

а по ним также нормальные и касательные напряжения σ_n , σ_s , τ_{ns} на произвольных площадках с нормалью n и касательной s . При этом, если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез (трещину или жесткое линейное включение), то в его концах производные комплексных потенциалов (1.18) и напряжения будут иметь син-

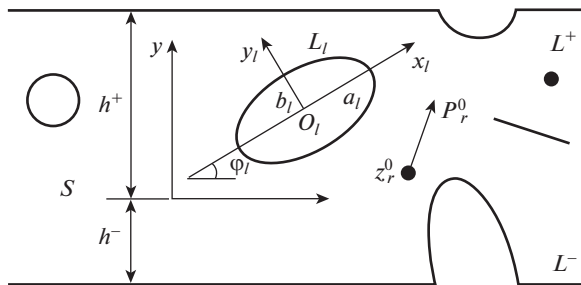


Рис. 2. Схема задачи для многосвязной полосы.

гулярность, и можно определить для этих концов коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), используя известные формулы [10]

$$\begin{aligned}
 k_1^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 [\mu_k^2 \sin^2 \varphi_l + \cos^2 \varphi_l + 2\mu_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l] M_{kl} \\
 k_2^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 [(1 - \mu_k^2) \cos \varphi_l \sin \varphi_l - \mu_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l)] M_{kl} \\
 M_{kl} &= -\frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln}
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Здесь верхний знак соответствует правому концу разреза в локальной системе координат $O_l x_l y_l$, нижний – к его левому концу.

2. Решение задачи для многосвязной полосы. Рассмотрим теперь анизотропную пластинку в виде полосы, занимающую многосвязную область S (рис. 2), ограниченную прямолинейными границами L^+ , L^- и контурами произвольно расположенных относительно друг друга и прямолинейных границ эллиптических отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) с полуосями a_l , b_l . Отнесем полосу к прямоугольной системе координат Oxy с началом в произвольной точке полосы на расстояниях h^+ , h^- от прямолинейных границ L^+ , L^- и направлением оси Ox вдоль направления прямолинейных границ. Как и выше, выберем локальные системы координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов L_l и направлениями осей $O_l x_l$ вдоль полуосей эллипсов a_l . Как и в предыдущем случае, внешние силы действуют на бесконечности, на контурах отверстий, во внутренних точках, а также на конечных отрезках $[\alpha^+, \beta^+]$, $[\alpha^-, \beta^-]$ соответствующих прямолинейных границ L^+ , L^- .

Поступая таким же образом, как это было сделано при решении задачи для многосвязной полуплоскости, в случае полосы с эллиптическими отверстиями для комплексных потенциалов получаем выражения

$$\begin{aligned}
 \Phi'_k(z_k) &= \Gamma_k + N'_k(z_k) + F_k^{r+}(z_k) + F_k^{r-}(z_k) + \\
 &+ \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi'_{kln}(z_k) a_{kln} - \bar{r}_{1k} \varphi'_{kln}(z_k) \bar{b}_{kln} - \bar{r}_{2,k+1} \varphi'_{k+1ln}(z_k) \bar{b}_{k+1ln} - \right. \\
 &\quad \left. - \bar{r}_{1k} \varphi'_{kln}(z_k) \bar{c}_{kln} - \bar{r}_{2,k+1} \varphi'_{k+1ln}(z_k) \bar{c}_{k+1ln} \right]
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где Γ_k , $N_k^+(z_k)$, $F_k^+(z_k)$ – постоянные и функции, определенные на основе формул (1.6), (1.14), (1.16);

$$F_k^-(z_k) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^+} \frac{f_k^-(t) dt}{t - z_k} - \bar{r}_{1k} N_k^-(z_k) - \bar{r}_{2k+1} N_{k+1}^-(z_k)$$

$$N_{k+j}^-(z_k) = \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \frac{\overline{A_{k+jl}}}{z_k + (\mu_{k+j} - \mu_k) h^- - z_{kl}} + \sum_{r=1}^R \frac{\overline{A_{k+jr}^0}}{z_k + (\mu_{k+j} - \mu_k) h^- - z_{kr}^0} \quad (j = 0, 1)$$

$$\Phi_{k+jln}^-(z_k) = -\frac{n}{R_{kl} (\zeta_{k+jl}^-)^{n-1} ((\zeta_{k+jl}^+)^2 - \bar{m}_{kl})} \quad (j = 0, 1)$$

ζ_{k+jl}^- – переменные, определяемые по аналогии с величинами (1.17) из конформных отображений внешностей единичных окружностей $|\zeta_{k+jl}^-| \geq 1$ на внешности контуров L_{k+jl}^- нижней полуплоскости с границей L_k^- по формулам [10]

$$z_k = -(\bar{\mu}_{k+j} - \mu_k) h^- + \bar{z}_{k+jl} + \bar{R}_{k+jl} \left(\zeta_{k+jl}^- + \frac{\bar{m}_{k+jl}}{\zeta_{k+jl}^-} \right) \quad (j = 0, 1)$$

a_{kln} , \bar{b}_{kln} , \bar{c}_{kln} – неизвестные коэффициенты разложений функций в ряды Лорана, которые определим из граничных условий (1.11) ОМНК [9, 10, 12–14], выбрав “коллокационные точки” на всех конурах, включая и прямолинейные границы полосы. Получаем следующую систему:

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} \left[\Phi_{kln}^+(t_{kpm}) a_{kln} - \bar{r}_{1k} \Phi_{kln}^+(t_{kpm}) \bar{b}_{kln} - \right. \\ \left. - \bar{r}_{2,k+1} \Phi_{k+1ln}^+(z_k) \bar{b}_{k+1ln} - \bar{r}_{1k} \Phi_{kln}^-(z_k) \bar{c}_{kln} - \bar{r}_{2,k+1} \Phi_{k+1ln}^-(z_k) \bar{c}_{k+1ln} \right] = \\ = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \delta_{k,s} [T_k + N_k^+(t_{kpm}) + F_k^+(t_{kpm}) + F_k^-(t_{kpm})] \\ (i = 1, 2; p = 1, \mathcal{L} + 2; m = 1, M_p)$$

При этом под $L_{\mathcal{L}+1}$ и $L_{\mathcal{L}+2}$ понимаются прямолинейные границы L^+ и L^- и для $f_k^-(t)$ по аналогии с выражением (1.15) выражение

$$f_k^-(t) = \begin{cases} -\frac{X_n^- + \mu_{k+1} Y_n^-}{\mu_k - \mu_{k+1}} & \text{на отрезке } [\alpha^-, \beta^-] \\ 0 & \text{вне отрезка } [\alpha^-, \beta^-] \end{cases}$$

X_n^- , Y_n^- – проекции на оси основной системы координат действующих на отрезке $[\alpha^-, \beta^-]$ прямолинейной границы L^- внешних усилий.

Система (2.2), как и (1.19), решается с использованием сингулярных разложений [15, 16] и после ее решения напряжения и КИН находятся по формулам (1.20), (1.21).

Как частные случаи из приведенного решения следуют решения задач для многосвязных изотропных полуплоскости и полосы. В последнем случае при численной реализации алгоритмов один из коэффициентов деформации a_{ij} нужно брать несколько отличным от реального, например, a_{11} и a_{22} брать отличающимися друг от друга 5–6-й

значашей цифрой в конце. В этом случае корни характеристического уравнения (1.4) будут близки к мнимой единице i , но несколько отличаться друг от друга (слабая анизотропия) и общая программа позволит получать значения напряжений и деформаций, практически совпадающие с данными, получаемыми при решении задачи теории упругости изотропного тела с использованием комплексных потенциалов Колосова–Мухелишвили [17].

3. Решение некоторых частных задач. Приведенный подход решения задачи с помощью ОМНК был использован для решения различных частных задач. Исследования проводились для полуплоскости и полосы из следующих материалов:

– изотропного материала алюминий (материал М1) с техническими постоянными [18]

$$E_1 = 71000 \text{ МПа}, \quad E_2 = 71000.5 \text{ МПа}, \quad G_{12} = 28400 \text{ МПа}, \quad \nu_{21} = 0.25$$

– сильно анизотропного материала (“степень анизотропии” материала характеризуется степенью отличия отношения a_{11}/a_{22} от единицы) углепластик HMS/DX209 [19] с жесткими волокнами вдоль оси Ox (материал М2) с постоянными

$$E_1 = 188800 \text{ МПа}, \quad E_2 = 6000 \text{ МПа}, \quad G_{12} = 2700 \text{ МПа}, \quad \nu_{21} = 0.3$$

– этого же материала углепластик HMS/DX209 [19] с жесткими волокнами вдоль оси Oy (материал М22) с постоянными

$$E_1 = 6000 \text{ МПа}, \quad E_2 = 188800 \text{ МПа}, \quad G_{12} = 2700 \text{ МПа}, \quad \nu_{21} = 0.0095$$

Заметим, что по техническим постоянным коэффициенты деформации вычисляются по известным формулам

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_1} = -\frac{\nu_{12}}{E_2}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

Также отметим, что для изотропного материала М1 постоянная E_2 принята несколько отличной от истинного значения, чтобы изотропную пластинку рассматривать как анизотропную и использовать приведенное выше решение, иначе при $E_2 = E_1$ корни μ_k характеристического уравнения (1.4) были бы равны i и это не давало бы возможность проводить ряд вычислений, например, определители систем линейных уравнений (1.6)–(1.8) были бы равны нулю.

Численные исследования были проведены для растяжения полуплоскости и полосы усилиями на бесконечности и для случая когда по отрезку верхней линии действует постоянное нормальное давление. Для этих случаев в приведенных выше формулах нужно положить

– в случае растяжения

$$F_k^{r+}(z_k) = F_k^{r-}(z_k) = 0, \quad N_k^{r+}(z_k) = N_{k+j}^{r+}(z_k) = 0 \quad (j = 0, 1)$$

Γ_k – постоянные, вычисляемые по формулам (1.6);

– в случае давления на отрезке $[\alpha^+, \beta^+] = [-a_1, a_1]$

$$\Gamma_k = F_k^{r-}(z_k) = N_k^{r+}(z_k) = N_{k+j}^{r+}(z_k) = 0 \quad (j = 0, 1)$$

$$F_k^{r+}(z_k) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\mu_{k+1} q}{\mu_k - \mu_{k+1}} \int_{-a_1 + \mu_k h^+}^{a_1 + \mu_k h^+} \frac{dt}{t - z_k} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\mu_{k+1} q}{\mu_k - \mu_{k+1}} \ln \frac{z_k - a_1 - \mu_k h^+}{z_k + a_1 - \mu_k h^+}$$

При проведении численных исследований количество членов в бесконечных рядах (1.18) и (2.1) для каждого из контуров L_p ($p = \overline{1, \mathcal{L} + 2}$) и “коллокационных точек” M_p на этом контуре, для которых составлялись уравнения (1.19) и (2.2), увеличивалось до

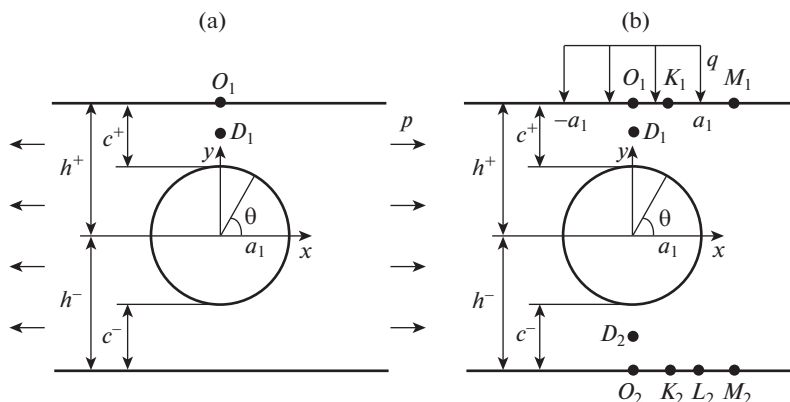


Рис. 3. Схема задачи для полосы с круговым отверстием.

тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (пока значения напряжений на площадках, касательных к контурам, не были менее 10^{-3}). В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 10 до 150 членов, и на каждом из контуров брать от 50 до 500 “коллокационных точек”. При выборе “коллокационных точек” для каждого контура отверстия L_p ($p = \overline{1, \mathcal{L}}$) отрезок $[0, 2\pi]$ изменения параметра θ параметрического задания (1.1) делился на количество M_p для данного контура и “коллокационными точками” выбирались середины подотрезков, т.е. точки располагались “равномерно” по контуру отверстия. На прямолинейных границах L^+ , L^- “коллокационные точки” выбирались на отрезках, где наблюдалось значительное влияние отверстий на значения напряжений, с равномерно удаленным друг от друга расположением “коллокационных точек”. Эти отрезки были длины 5 диаметров отверстий. Ниже описаны некоторые из полученных результатов для полосы с центральным круговым отверстием или отверстием и трещиной, в том числе выходящей на контур отверстия или на прямолинейную границу.

В табл. 1, 2 и 3 для полосы с одним центральным круговым отверстием радиуса a_1 ($h^- = h^+$, $c^- = c^+$, $b_1 = a_1$) (рис. 3) в зависимости от c^+/a_1 , где c^+ – ширина перемычек, и центрального угла отверстия θ , отсчитываемого от направления оси Ox (направления прямолинейных границ) против часовой стрелки, с точностью до интенсивности приложенной нагрузки приведены значения нормальных напряжений σ_y вблизи контура отверстия на площадках, перпендикулярных к нему, и напряжений σ_x в некоторых характерных точках полосы для случаев растяжения полосы усилиями p (рис. 3,а) и равномерного давления интенсивности q по отрезку $[-a_1; a_1]$ верхней прямолинейной границы полосы (рис. 3,б). При этом в качестве характерных рассматривались точки $D_1(0; a_1 + c^+/2)$, $O_1(0; h^+)$, $K_1(a_1/2; h^+)$, $M_1(3a_1/2; h^+)$, $D_2(0; -a_1 - c^+/2)$, $O_2(0; -h^-)$, $K_2(a_1/2; -h^-)$, $M_2(3a_1/2; -h^-)$.

Из данных табл. 1–3 следует, что при растяжении полосы с центральным круговым отверстием взаимовлияние отверстия и прямолинейных границ значительно, начиная с ширины перемычек, равных радиусу отверстия. При этом с уменьшением ширины полосы значения напряжений около контура отверстия резко возрастают. Если шири-

Таблица 1. Значения напряжений σ_s/p по контуру отверстия и σ_x/p в некоторых точках полосы при растяжении усилиями p

Материал	c/a	θ , рад							Точки	
		0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$	D_1	O_1
		σ_s/p							σ_x/p	
M1	5	-1.08	-0.80	-0.04	1.00	2.04	2.81	3.09	1.07	0.96
	2	-1.29	-1.00	-0.20	0.95	2.15	3.08	3.43	1.30	0.84
	1	-1.57	-1.30	-0.52	0.72	2.25	3.65	4.23	1.76	0.69
	0.5	-1.86	-1.67	-1.08	0.09	2.10	4.65	5.96	2.66	0.53
M2	5	-0.18	-0.15	-0.06	0.08	0.38	1.63	9.76	1.02	0.94
	2	-0.19	-0.16	-0.07	0.06	0.35	1.56	9.44	1.10	0.78
	1	-0.22	-0.19	-0.11	0.03	0.33	1.64	10.17	1.39	0.65
	0.5	-0.23	-0.20	-0.14	-0.04	0.23	1.54	10.32	1.73	0.42
M22	5	-7.81	-0.35	0.93	1.47	1.98	2.48	2.71	1.09	0.90
	2	-10.98	-1.03	0.66	1.34	2.04	2.76	3.10	1.34	0.83
	1	-14.11	-1.85	0.17	1.04	2.09	3.29	3.89	1.79	0.79
	0.5	-17.22	-2.90	-0.66	0.35	1.94	4.23	5.54	2.63	0.75

Таблица 2. Значения напряжений σ_s/q по контуру отверстия в полосе при действии на границе давления интенсивности q

θ , рад.	Значения c/a								
	5	1	0.5	5	1	0.5	5	1	0.5
	Материал M1			Материал M2			Материал M22		
$-\pi/2$	0.42	2.21	5.16	7.41	-13.83	-11.32	0.15	1.09	2.72
$-5\pi/12$	0.36	1.82	3.84	1.23	-1.72	-1.32	0.14	0.87	1.94
$-\pi/3$	0.20	0.92	1.32	0.25	0.09	0.17	0.11	0.45	0.60
$-\pi/4$	-0.01	-0.01	-0.57	-0.02	0.38	0.42	0.08	0.10	-0.28
$-\pi/6$	-0.22	-0.68	-1.47	-0.19	0.24	0.26	0.01	-0.16	-0.76
$-\pi/12$	-0.38	-1.09	-1.75	-0.36	-0.28	-0.34	-0.43	-1.08	-2.01
0	-0.48	-1.36	-1.86	-0.49	-1.08	-1.32	-4.95	-11.76	-15.89
$\pi/12$	-0.50	-1.60	-2.13	-0.51	-1.77	-2.25	-1.30	-3.96	-5.65
$\pi/6$	-0.42	-1.80	-2.65	-0.43	-2.03	-2.80	-0.46	-2.00	-3.39
$\pi/4$	-0.28	-1.71	-2.98	-0.25	-1.80	-2.87	-0.17	-1.28	-2.70
$\pi/3$	-0.09	-1.10	-2.48	0.15	-0.56	-1.87	0.03	-0.58	-1.74
$5\pi/12$	0.08	-0.24	-1.47	1.78	5.76	4.89	0.19	0.23	-0.11
$\pi/2$	0.15	0.17	-0.94	12.36	47.97	52.34	0.26	0.64	0.90

Таблица 3. Значения напряжений σ_x/q в некоторых точках полосы при действии на границе давления интенсивности q

θ , рад.	Значения c/a								
	10	1	0.5	10	1	0.5	10	1	0.5
	Материал М1			Материал М2			Материал М22		
D_1	-0.40	-1.57	-3.20	2.89	9.07	7.77	-0.06	-0.64	-1.46
O_1	-1.72	-3.21	-5.57	-1.24	0.43	-8.15	-0.45	-2.01	-3.86
K_1	-1.71	-2.85	-3.99	-1.23	2.09	-1.95	-0.41	-1.35	-1.78
M_1	-0.70	-0.90	-1.07	4.44	11.49	11.56	-0.10	-0.22	-0.26
D_2	0.46	1.44	2.97	-1.04	-5.46	-3.37	0.11	0.73	1.52
O_2	0.83	1.40	1.80	-2.36	-6.19	-2.81	0.22	0.66	0.80
K_2	0.82	1.62	2.96	-2.36	-6.33	-3.35	0.24	0.83	1.57
L_2	0.82	1.89	3.61	-2.35	-6.31	-3.23	0.26	1.21	2.21
M_2	0.82	1.88	3.09	-2.35	-6.16	-2.78	0.26	0.85	1.22

на одной из перемычек больше диаметра отверстия ($c^+/a_1 \geq 2$ либо $c^-/a_1 \geq 2$), то взаимовлияние отверстия и соответствующей прямолинейной границы незначительно, им можно пренебречь и рассматривать полосу как полуплоскость с отверстием [12], а если ширина обеих перемычек превышает диаметр отверстия, то полосу можно рассматривать как бесконечную пластинку с отверстием. В случае сильно анизотропной полосы концентрация напряжений около контура отверстия значительно выше, чем в случае изотропной и возникает в различных зонах, в зависимости от направления жестких (мягких) волокон материала – для полосы из М2 наблюдаются большие растягивающие напряжения, для полосы из М22 – большие сжимающие напряжения, причем она возникает в разных зонах.

В случае давления на прямолинейной границе взаимовлияние прямолинейных границ и контура отверстия для материалов М1 и М22 такое же, как при растяжении полосы, а для М2 это влияние начинается гораздо раньше и распределение напряжений имеет свои особенности. При этом значения напряжений особенно велики для сильно анизотропного материала полосы. При этом в точках перемычек напряжения всегда отрицательны (сжимающие), кроме небольшой окрестности точек контура отверстия, где они положительны (узкая полоса растяжения вблизи контура отверстия). В случае полуплоскости из сильно анизотропного материала М22 с мягкими волокнами вдоль направления границы полуплоскости весьма большие сжимающие напряжения наблюдаются и вблизи горизонтального диаметра отверстия (при $\theta = 0$ рад. и $\theta = \pi$ рад.). В противоположной от перемычки зоне значения напряжений значительно ниже, меньше и влияние анизотропии материала полосы.

Исследования распределения напряжений проводились и для полосы с эллиптическим отверстием, с помощью которых, в частности, установлено, что в случае эллиптического отверстия с большой полуосью a_1 и малой полуосью b_1 при уменьшении отношения b_1/a_1 значения нормальных напряжений σ_s в окрестности концов большой оси эллипса бесконечно растут и при $b_1/a_1 \leq 10^{-3}$ эллипс можно рассматривать как трещину и для ее концов по формулам (1.21) вычислять КИН. Исследования проводи-

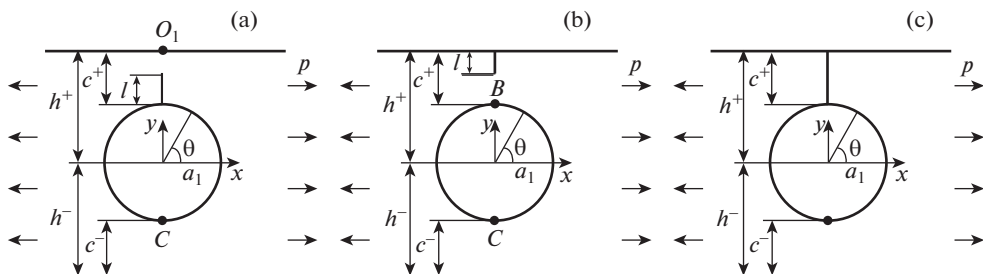
Таблица 4. Значения некоторых величин для полосы с круговым отверстием и краевой трещиной в зависимости от l/a_1

Величина	Значения l/a_1				
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.8
	Трещина из контура отверстия (рис. 4,а)				
КИН k_1	1.22	1.67	1.93	2.33	2.78
σ_x/p в точке O_1	0.56	0.19	-0.08	-0.21	-0.20
σ_x/p в точке C	4.24	4.50	4.84	5.29	5.61
	Трещина из прямолинейной границы (рис. 4,б)				
КИН k_1	0.28	0.74	1.29	2.13	2.71
σ_x/p в точке B	4.15	4.07	3.96	3.84	3.69
σ_x/p в точке C	4.17	4.17	4.18	4.18	4.20

лись и для случаев, когда контуры отверстий и трещин в полосе пересекались друг с другом, образуя отверстия сложной конфигурации, а также пересекали прямолинейные границы полосы. Опишем лишь некоторые из полученных результатов.

В табл. 4 для растяжения полосы с центральным круговым отверстием радиуса a_1 ($h^- = h^+$, $c^- = c^+$, $b_1 = a_1$) из материала М1 и выходящей на контур отверстия или на прямолинейную границу краевой трещиной в верхней перемычке длины l , перпендикулярной прямолинейной границе (рис. 4), при ширине перемычки $c^+ = a_1$, в зависимости от l/a_1 приведены значения напряжений и КИН k_1 для конца трещины, а на рис. 5 изображены графики распределения напряжений σ_s/p по контуру отверстия в полосе с круговым отверстием (сплошная линия), с круговым отверстием и трещиной длины $l = a_1/2$ из контура отверстия (рис. 4,а) (штриховая линия), с круговым отверстием и трещиной прямолинейной границы (штрихпунктирная линия), с круговым отверстием и трещиной длины $l = a_1/2$ из прямолинейной границы (рис. 4,б) (штрихпунктирная линия), круговым отверстием и щелью длины $l = a_1$ между верхней границей полосы и контуром отверстия (рис. 4,с) (пунктирная линия).

Из данных табл. 4 и рис. 5 следует, что с увеличением длины краевой трещины из контура отверстия или границы полосы значения напряжений около контура отвер-

**Рис. 4.** Схема задачи для полосы с круговым отверстием и трещиной.

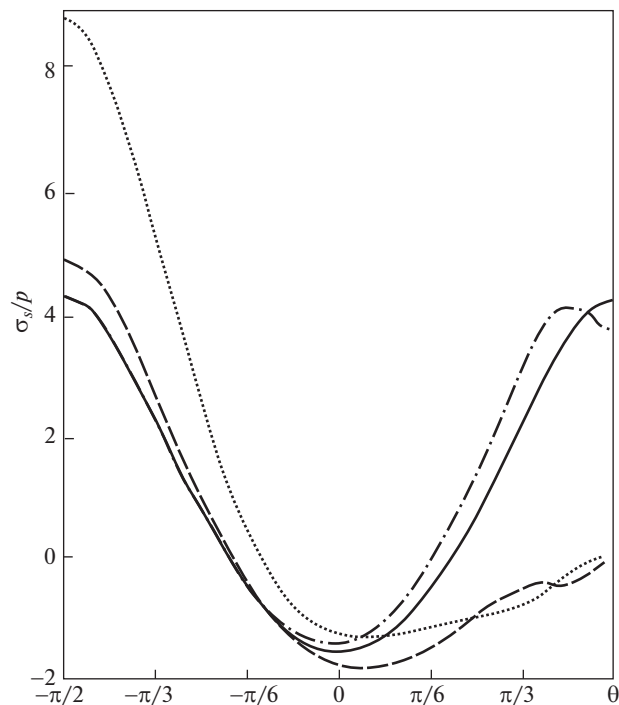


Рис. 5. Графики распределения напряжений σ_s/p по контуру отверстия в полосе с круговым отверстием (сплошная линия), с круговым отверстием и трещиной длины $l = a_1/2$ из контура отверстия (рис. 4,a) (штриховая линия), с круговым отверстием и трещиной прямолинейной границы (штрихпунктирная линия), с круговым отверстием и трещиной длины $l = a_1/2$ из прямолинейной границы (рис. 4,b) (штрихпунктирная линия), круговым отверстием и щелью длины $l = a_1$ между верхней границей полосы и контуром отверстия (рис. 4,c) (пунктирная линия).

ствия и КИН для конца трещины растут. Наиболее высокая концентрация напряжений около контура отверстия наблюдается в случае сквозной щели между контуром отверстия и границей полосы в области перемычки, расположенной противоположно щели. В этом случае и в случае, когда трещина выходит на контур отверстия, значения напряжений около контура отверстия в перемычке с этими дефектами незначительны.

Заключение. Таким образом, с использованием комплексных потенциалов теории упругости анизотропного тела и удовлетворением граничным условиям на прямолинейной границе и на контурах отверстий и трещин обобщенным методом наименьших квадратов решение задач теории упругости для многосвязных анизотропных полуплоскости и полосы с отверстиями и трещинами при действии произвольных внешних сил и произвольном расположении отверстий и трещин, в том числе в случае их взаимопересечений, приведены к переопределенным системам линейных алгебраических уравнений, решаемых методом сингулярного разложения. Описаны результаты численных исследований для полосы с круговым отверстием при ее растяжении или действии равномерного давления по отрезку прямолинейной границы, а также для растяжения полосы с круговым отверстием и трещиной в перемычке, в том числе выходящей на границу полосы или на контур отверстия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Structural Nanocomposites: Perspectives for Future Applications / Ed. by *J. Njuguna*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. VIII, 269 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-40322-4>.
2. Mechanics of Anisotropic Materials / Ed. by *J.J. Skrzypek, A.W. Ganczarski*. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2015. XXIII, 311 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-319-17160-9>
3. *Halpin J.C., Finlayson K.M.* Mechanics of Anisotropic Materials. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2017. XIII, 227 p.
<https://doi.org/10.1201/9780203742235>.
4. Advances in Machining of Composite Materials: Conventional and Non-conventional Processes / Ed. by *I. Shyha, D. Huo*. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2021. VI, 552 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-71438-3>
5. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
6. *Космодамианский А.С.* Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. К., Донецк: Вища шк., 1976. 200 с.
7. *Космодамианский А.С.* Упругое равновесие анизотропной полуплоскости, ослабленной эллиптическим отверстием // Тр. Тбилис. политех. ин-та. 1963. Т. 8 (93). С. 179–183.
8. *Калоеров С.А.* Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с конечным числом эллиптических отверстий // Прикладная механика. 1966. Т. 2. № 10. С. 75–82.
9. *Калоеров С.А., Паршикова О.А.* Термовязкоупругое многосвязной анизотропной пластинки // Прикладная механика. 2012. Т. 48. № 3. С. 103–116.
10. *Калоеров С.А.* Общие решения задач для многосвязных анизотропных полуплоскости и полосы // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. 2018. № 2. С. 22–35.
11. *Калоеров С.А.* Комплексные потенциалы плоской задачи теории упругости для многосвязного тела с трещинами // Теорет. прикл. механика. 1990. Вып. 21. С. 24–34.
12. *Калоеров С.А., Глушанков Е.С., Мироненко А.Б.* Общее решение задачи теории упругости для многосвязной полуплоскости и его приложение к решению частных задач // Вестн. ДонНУ. Сер. А. Естеств. науки. 2022. № 1. С. 41–52.
13. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977. 304 с.
14. *Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B.* Computer methods for mathematical computations. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1977. 259 p. = *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.
15. *Drmač Z., Veselič K.* New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. I // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2008. V. 29. № 4. P. 1322–1342.
<https://doi.org/10.1137/050639193>
16. *Drmač Z., Veselič K.* New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. II // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2008. V. 29. № 4. P. 1343–1362.
<https://doi.org/10.1137/05063920X>
17. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
18. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 888 с.
19. *Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В. и др.* Композиционные материалы: Справочник / Под общ. ред. *В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского*. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.