

УДК 534.1, 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА С ВИБРИРУЮЩИМИ ОПОРАМИ

© 2023 г. И. М. Утяшев^{a,*}, М. М. Шакирьянов^{a,**}

^aИнститут механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

*e-mail: utyashev@mail.ru

**e-mail: shakmar9@mail.ru

Поступила в редакцию 30.03.2022 г.

После доработки 26.07.2022 г.

Принята к публикации 31.07.2022 г.

Исследованы пространственные колебания участка трубопровода с заключенной в нем жидкостью при поступательных вибрационных движениях опор. Колебания обеих опор происходят с равными амплитудами, частотами и фазами. Деформации трубы, связанные с выходом ее оси из плоскости изгиба, предполагаются малыми. Учитываются взаимодействия внутреннего постоянного давления и изменений кривизны осевой линии, продольной и окружной деформаций трубы. Ее изгибно-вращательные колебания описываются системой двух нелинейных дифференциальных уравнений. Применением метода Бубнова–Галеркина эта система сводится к задаче Коши, которая далее решается численно методом Рунге–Кутты. В случае малых изгибных и угловых движений трубы дается сравнение аналитического и численного решений. Дан анализ периодических и непериодических колебаний стальной, титановой и композитной труб, для чего построены, в частности, спектры частот и отображения Пуанкаре.

Ключевые слова: трубопровод, пространственные колебания, внутреннее давление, вибрации опор, линейные и нелинейные колебания

DOI: 10.31857/S057232992260058X, EDN: JLLDYA

Введение. Композитные и металлические трубопроводы широко применяются в нефтегазовой промышленности, энергетике, авиационной и ракетно-космической технике для транспортировки жидких и газообразных продуктов. Их транспортировка осуществляется работой насосных станций, которые создают в трубопроводе постоянное и переменное давление. Колебательные движения при этом может совершать также основание, с которым связаны опоры трубопровода. В результате указанных воздействий трубопровод может совершать пространственные колебания.

Теоретическому и экспериментальному изучению динамического поведения трубопроводных систем, транспортирующих жидкость или газ, посвящено большое количество работ. Обзор литературы по указанной обширной проблеме можно найти, например, в [1–5]. В данной работе ограничимся кратким обзором исследований по пространственным колебаниям трубопровода с транспортируемым продуктом. Эта часть динамики трубопроводных систем относительно мало изучена. Так как влияние внутреннего давления на колебательные движения трубы имеет место как в пространстве, так и в одной плоскости, то в обзор включены также исследования, посвященные изучению плоских изгибных колебаний.

Трехмерная нелинейная динамика консольных труб, транспортирующих жидкость, исследовалась в [6–9]. Экспериментальное изучение влияния внутреннего давления на частоту свободных колебаний приведено в [10]. Показано качественное и количественное согласие результатов теории с экспериментальными данными. Поперечные колебания трубы в вертикальной плоскости под действием бегущих волн давления рассмотрены в [11]. Исследование изгибных колебаний композитного (трехслойного) трубопровода для транспортировки газа приведено в [12]. Сейсмические колебания трубопровода с жидкостью в грунтовой среде изучены в [13, 14]. Влияние пульсаций давления в транспортируемой жидкости на трехмерные нелинейные колебания гибкой трубы исследованы в [15]. Пространственные колебания трубопровода в сплошной среде при действии внутреннего давления, изменяющегося по гармоническому закону, рассмотрены в [16, 17]. Действие внутреннего ударного давления на пространственные движения трубы со смещающейся опорой изучено в [18–20]. В [21] проведено экспериментальное исследование пространственного распределения энергии вибрации при взрыве газопровода. Динамика трубопровода, транспортирующего жидкость, на вращающемся основании рассмотрена в [22]. Влияние нелинейных колебаний на усталостную прочность многослойного композиционного трубопровода с жидкостью исследовалось в [23]. Демпфирование изгибных колебаний труб при транспортировке жидкости с помощью нелинейных поглотителей кручения на опорах изучено в [24]. В [25] определены положения динамического равновесия изогнутого трубопровода с вибрирующими опорами. Кроме указанных работ большое количество исследований посвящено изучению свободных колебаний и устойчивости пролета трубопровода с движущейся жидкостью. К последним работам можно отнести статьи [26–28].

В настоящей работе исследуются пространственные колебания трубопровода при горизонтальных вибрационных движениях его опор.

1. Постановка задачи. Рассматриваются пространственные колебания пролета трубопровода между опорами и заключенной в нем жидкости под действием подвижного основания. Трубопровод имеет сферическое шарнирное крепление к опорам (рис. 1). Левая опора неподвижна относительно поступательно движущегося основания, а правая опора, связанная с ним линейно-упругими элементами, может скользить параллельно оси x . Начало правой системы осей координат $x\eta z$ (рис. 1, а) совмещено с левой опорой. Труба, изогнутая собственным весом, весом и постоянным давлением заключенной в ней жидкости, находится в покое. В момент времени t основание начинает совершать горизонтальные движения $s = s(t)$, направленные перпендикулярно оси x . Учитываются взаимодействия внутреннего давления и изменений кривизны осевой линии, продольной и окружной деформаций трубы. Деформации трубопровода, связанные с выходом его оси из плоскости изгиба, предполагаются малыми. Поэтому исследование проводится по модели изгибно-вращательных движений трубопровода. Согласно этой модели пространственные движения трубы рассматриваются как совокупность относительных изгибных колебаний $W(x, t)$ в одной плоскости, переносных вращений $\theta(t)$ этой плоскости вокруг оси x и переносных поступательных перемещений $s(t)$ подвижного основания. Длина, внутренний радиус, толщина стенки и плотность материала трубы соответственно равны L , R , h и ρ . Плотность несжимаемой жидкости – ρ_0 . Скоростной напор $\rho_0 V^2/2$ также считается малым по сравнению с давлением p_0 , где V – скорость движения среды в трубе.

На рис. 1, а символ W' представляет проекцию прогиба ($W' = W \cos \theta$) элемента трубы длиной dx на координатную плоскость xz . Ускорения элемента массой $dm = m_1 dx$ и силы, действующие на него изображены на рис. 1, б, в, г. Здесь \mathbf{g} , \mathbf{a}_v , \mathbf{a}_k , \mathbf{a}_r , \mathbf{a}_t и \mathbf{a}_n , $m_1 = \pi \{ \rho_0 R^2 + \rho [(R + h)^2 - R^2] \}$ – гравитационное, вибрационное, кориолисово, относительное, переносные касательное и нормальное ускорения, масса элемента единичной

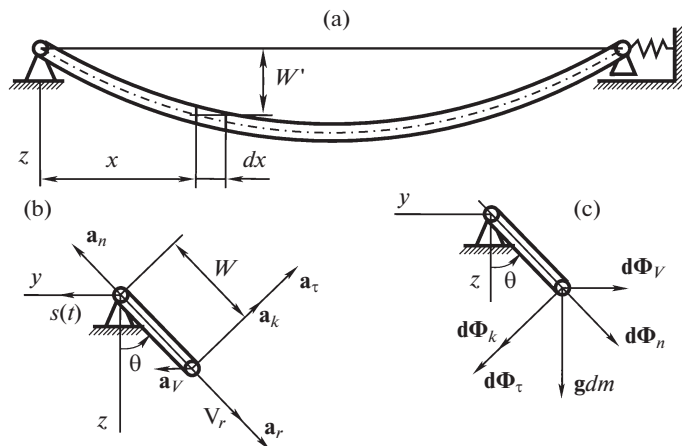


Рис. 1. Расчетная схема: виды на трубопровод соответственно с положительного конца оси y (а) и со стороны правой опоры (б, в).

длины; gdm – сила тяжести, $d\Phi_V$, $d\Phi_r$, $d\Phi_\tau$, $d\Phi_n$ и $d\Phi_k$ – вибрационная, относительная, касательная, нормальная и кориолисова силы инерции.

Выражения для ускорений выделенного элемента, а также сил, приложенных к нему, при неподвижном основании следующие [16]:

$$\begin{aligned} a_r &= \dot{W}, & a_t &= W\ddot{\theta}, & a_n &= W\dot{\theta}^2, & a_k &= 2\dot{\theta}\dot{W}, & d\Phi_V &= a_V dm \\ d\Phi_r &= a_r dm, & d\Phi_\tau &= a_\tau dm, & d\Phi_n &= a_n dm, & d\Phi_k &= a_k dm \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь и далее точка над буквой обозначает производную по времени.

Дифференциальное уравнение вращательного движения трубопровода относительно оси x имеет вид

$$\begin{aligned} -\int_{(m)} W \sin \theta g dm - M_u - \int_{(m)} W d\Phi_\tau - \int_{(m)} W d\Phi_c + \int_{(m)} W \sin \theta d\Phi_V &= 0 \\ M_u &= J_p \ddot{\theta}, & J_p &= 2\rho LJ, & 4J &= \pi[(R+h)^4 - R^4] \end{aligned} \quad (1.2)$$

Дифференциальное уравнение изгибных колебаний, учитывающее взаимодействия внутреннего давления и изменений кривизны осевой линии, продольной и окружной деформаций трубы, следующее [18]

$$\begin{aligned} \ddot{W} dm &= -EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} dx - \left[F p_0 (1 - \chi) - \alpha \int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dx + g \cos \theta dm + \\ &+ d\Phi_n + d\Phi_V \cos \theta, & F &= \pi R^2, & \chi &= \frac{2\nu}{1 + \lambda}, & \lambda &= \frac{Eh}{CL}, & \alpha &= \frac{\pi EhR}{(1 + \lambda)L} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь E – модуль Юнга материала трубы, C – коэффициент продольной упругости единичной дуги элементов крепления скользящей опоры к основанию.

Горизонтальное перемещение основания задается в виде

$$s = s_0 \sin t, \quad \Omega = 2\pi f \quad (1.4)$$

где s_0 , f – амплитуда и частота колебаний основания.

Функция прогиба, удовлетворяющая условиям шарнирного крепления трубопровода к опорам, принимается по первой гармонике

$$W = [W_0 + w(t)] \sin \beta x, \quad \beta = \pi/L \quad (1.5)$$

Здесь W_0 и $w(t)$ – амплитуды статической и динамической составляющих прогиба средней точки пролета. Первая часть прогиба зависит от сил гравитации и внутреннего давления в трубе, а вторая – от амплитуды и частоты колебаний опор.

Подставляя (1.4), (1.5) в (1.2), (1.3) и применяя в последнем вариационный принцип Бубнова–Галеркина, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} \left[(W_0 + w)^2 + \frac{4\rho J}{m_1} \right] + 2 \left[\frac{2}{\pi} (g \sin \theta + s_0 \Omega^2 \sin \Omega t \cos \theta) + \dot{\theta} \dot{w} \right] (W_0 + w) = 0 \\ \dot{w} + \frac{\beta^4 EJ}{m_1} (W_0 + w) = \frac{4}{\pi} (g \cos \theta - s_0 \Omega^2 \sin \Omega t \sin \theta) + (W_0 + w) \dot{\theta}^2 + \\ + \frac{\beta^2}{m_1} \left[F(1 - \chi) p_0 - \frac{\alpha \beta^2 L}{2} (W_0 + w)^2 \right] (W_0 + w) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (1.6) нулевые

$$\theta = 0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad w = 0, \quad \dot{w} = 0 \quad (t=0) \quad (1.7)$$

Полагая во втором уравнении (1.6) $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $w = 0$, $\dot{w} = 0$, $s_0 = 0$, получаем уравнение для определения статической составляющей прогиба

$$W_0^3 + \frac{2F(p_* - p_0)(1 - \chi)}{\alpha \beta^2 L} W_0 - \frac{8m_1 g}{\pi \alpha \beta^4 L} = 0, \quad p_* = \frac{\beta^2 EJ}{F(1 - \chi)} \quad (1.8)$$

Значение внутреннего давления p_* является критическим. При $p_* = p_0$ решение линейного уравнения неограниченно возрастает. Для решения кубического уравнения (1.8) можно воспользоваться формулами Кардано или численным методом. При преобладающем влиянии на изгиб трубы сил внутреннего давления над силами гравитации возможно также применение приближенного аналитического способа [25]. В настоящей работе решение (1.8) находилось численно.

Решение нелинейной задачи Коши (1.6), (1.7) определяется численным методом Рунге–Кутты, представленным в программном математическом пакете Maple. Далее это решение подвергается дискретному преобразованию Фурье и отображению Пуанкаре.

2. Сравнение значений собственных частот угловых и изгибных колебаний приближенного аналитического решения и численного моделирования. В случае малых колебаний из (1.6) имеем линеаризованные уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + k_2^2 \theta = -\frac{s_0 \Omega^2 k_2^2}{g} \sin \Omega t, \quad \ddot{w} + k_1^2 w = -\frac{4s_0 \Omega^2}{\pi} \theta \sin \Omega t, \\ k_1^2 = \frac{\beta^4}{m_1} \left[EJ(1 - p) + 3 \frac{\alpha L}{2} W_0^2 \right], \quad k_2^2 = \frac{4gW_0}{\pi(W_0^2 + 4\rho J/m_1)}, \quad p = \frac{p_0}{p_*} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где k_1 , k_2 – циклические частоты собственных изгибных и угловых колебаний трубы, p – безразмерный параметр внутреннего давления.

Из (2.1) следует, что вынужденные угловые перемещения изогнутого трубопровода при нулевых начальных условиях (1.7) определяются только колебательными движениями опор. Кроме того видно, что в данном случае вынужденные изгибные перемещения находятся в прямой зависимости как от вращательных движений трубы, так и от колебаний ее опор. Нерезонансное решение (2.1) с учетом условий (1.7) запишется

$$\theta(t) = \delta \left(\frac{\Omega}{k_2} \sin k_2 t - \sin \Omega t \right), \quad w(t) = \frac{2\delta s_0 \Omega^2}{\pi} \left\{ \frac{1 - \cos k_1 t}{k_1^2} + \frac{\cos k_1 t - \cos 2\Omega t}{k_1^2 - 4\Omega^2} + \frac{\Omega}{k_2} \left[\frac{\cos(\Omega + k_2)t - \cos k_1 t}{k_1^2 - (\Omega + k_2)^2} - \frac{\cos(\Omega - k_2)t - \cos k_1 t}{k_1^2 - (\Omega - k_2)^2} \right] \right\} \quad (2.2)$$

$$\delta = \frac{s_0 \Omega^2 k_2^2}{g(k_2^2 - \Omega^2)}, \quad k_2 \neq \Omega, \quad k_1 \neq 2\Omega, \quad k_1 \neq \Omega + k_2, \quad k_1 \neq \Omega - k_2$$

Решение (2.2) позволяет сделать вывод о том, что малые вращательные и изгибные движения трубы складываются из собственных и вынужденных колебаний соответственно с частотами $f_2 = k_2/(2\pi)$ и f , $f_1 = k_1/(2\pi)$ и $2f$, $f_3 = f - f_2$, $f_4 = f + f_2$. При этом происхождение вынужденных изгибных колебаний с частотами $2f, f_3, f_4$ обусловлено взаимодействием вращательных колебаний трубопровода и вибрационных движений опор.

Вычисления были проведены для трех труб, изготовленных из легированной стали, титанового сплава и композитного материала. У всех труб – равные геометрические размеры: $L = 4.5$ м, $R = 0.05$ м, $h = 0.002$ м. Модули Юнга, коэффициенты Пуассона и плотности указанных материалов имеют следующие значения. Сталь: $E = 2 \times 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800$ кг/м³. Титановый сплав: $E = 1.18 \times 10^5$ МПа, $\nu = 0.35$, $\rho = 4500$ кг/м³. Композитный материал (эффективные характеристики): $E = 0.433 \times 10^5$ МПа, $\nu = 0.4$, $\rho = 2000$ кг/м³. Модуль упругости продольных элементов крепления подвижной опоры к основанию: $C = 32$ МПа. Гравитационное ускорение: $g = 9.81$ м/с². Частота и относительная амплитуда колебаний опор: $f = 7, 10$ Гц, $s_0/R = 0.02, 0.04, 0.06, 0.2$. Наполнение труб – жидкость с плотностью $\rho_0 = 900$ кг/м³. Внутреннее давление в трубах: $p_0 = 4, 8, 9, 16$ МПа.

Величины критических давлений по (2.1) рассматриваемых стальной, титановой и композитной труб равной геометрии соответственно составляют: $p_* = 12.3, 7.89, 4.48$ МПа. Результаты вычислений представлены на рис. 2–10 в виде графических зависимостей. Переменные на графиках измеряются: t – в секундах, линейная скорость \dot{w} – в метрах в секунду, угол θ – в радианах, угловая скорость $\dot{\theta}$ – в радианах в секунду, частота f – в Герцах. Размерности модулей комплексных амплитуд Фурье спектров: F_1 – в метрах на секунду, F_2 – в радианах на секунду.

На рис. 2 приведены графики изменения собственных частот f_1 и f_2 малых изгибных и вращательных колебаний трубы в зависимости от безразмерного параметра p внутреннего давления. Сплошные, штриховые и штрихпунктирные линии соответственно относятся к трубам, изготовленным из стали, титанового сплава и композитного материала. Если на рис. 2, а данные линии в перечисленном порядке расположены одна под другой, то на рис. 2, б они имеют обратный порядок расположения. В первом случае такую закономерность можно объяснить различием в значениях изгибных жесткостей, а во втором – масс стальной, титановой и композитной труб. С увеличением отношения p собственные частоты f_1 изгибных колебаний всех труб уменьшаются, достигают минимальных значений, а далее, ввиду преобладания сил продольного натяжения над действиями сил гравитации и внутреннего давления, увеличиваются. При этом частоты f_2 вращательных колебаний труб сначала растут, достигают своего максимума, а затем уменьшаются. Последнее обстоятельство объясняется тем, что до достижения определенного значения статической составляющей прогиба трубопровод проявляет свойства физического маятника, а после достижения этого значения – свойства математического маятника. Точками в виде треугольников, прямоугольников и кружочков на графиках нанесены значения собственных частот угло-

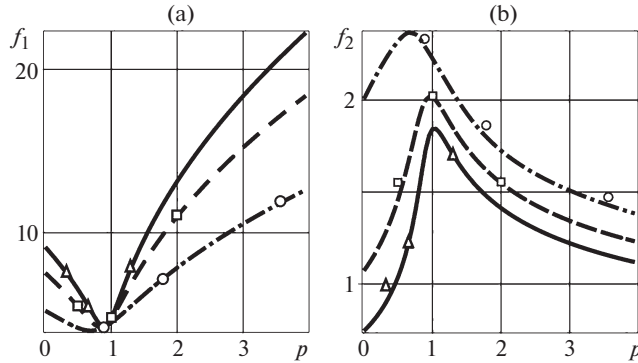


Рис. 2. Зависимости собственных частот изгибных f_1 (Гц) и вращательных f_2 (Гц) колебаний труб от безразмерного параметра p внутреннего давления.

вых и изгибных колебаний соответственно стальной, титановой и композитной труб, полученные численным интегрированием (1.6), (1.7) при $s_0/R = 0.02$, $f = 10$ Гц, $p_0 = 4, 8, 16$ МПа. Можно видеть, что указанные точки практически лежат на соответствующих кривых линиях.

3. Зависимость угловых и изгибных перемещений от внутреннего давления и вибраций опор. Графические зависимости угловых θ и относительных изгибных w/R перемещений от времени приведены на рис. 3–6. На них сверху буквами а, б и с обозначены столбцы графиков, сгруппированные соответственно для стальной, титановой и композитной труб. На графиках сплошными линиями нанесены результаты численного решения задачи (1.6), (1.7), а пунктирными – результаты вычислений по формулам (2.2) в отрезке времени $0 \leq t \leq 1.5$ с. Графики, расположенные сверху вниз соответственно на первой и второй строках, на рис. 3, 4 ($s_0/R = 0.02$, $f = 10$ Гц) относятся к двум величинам внутреннего давления p_0 : 4, 16 МПа, а на рис. 5, 6 ($p_0 = 9$ МПа, $f = 10$ Гц) – к двум значениям относительной амплитуды колебаний опор s_0/R : 0.04, 0.06. Численным решением кубического уравнения (1.8) при $p_0 = 4, 9, 16$ МПа для рассматриваемых труб были получены следующие значения отношения W_0/R . Стальная труба: 0.112, 0.274, 1.67; титановая труба: 0.128, 0.371, 1.83; композитная труба: 0.811, 1.96, 3.04. Сравнительный анализ обеих строк графиков рис. 3 и 4 позволяет сделать следующие выводы. При принятых входных данных увеличение внутреннего давления в трубе приводит к уменьшению разницы между результатами численного моделирования и приближенного аналитического решения как угловых, так и изгибных перемещений. Это уменьшение обусловлено тем, что с ростом давления p_0 происходит увеличение статической составляющей W_0 прогиба и, следовательно, уменьшение отношения w/W_0 . А на малости последнего, совместно с углом θ , основаны приближения (2.2). Наибольшее согласие в результатах вычислений по приближенным формулам и численному интегрированию при $p_0 = 16$ МПа можно отнести к трубе из композитного материала. Таким образом, в случае малых пространственных колебаний трубопровода сказанное выше подтверждает пригодность применения соотношений (2.1), (2.2).

Из сравнения первой и второй строк графиков рис. 5, 6 видно, что при принятых входных данных увеличение отношения s_0/R приводит как к росту амплитуд вращательных и изгибных колебаний, так и к значительным изменениям в относительных расположениях сплошных и пунктирных линий. Отсюда следует, что при достижении отношения s_0/R определенного значения формулы (2.2) могут также потерять свою

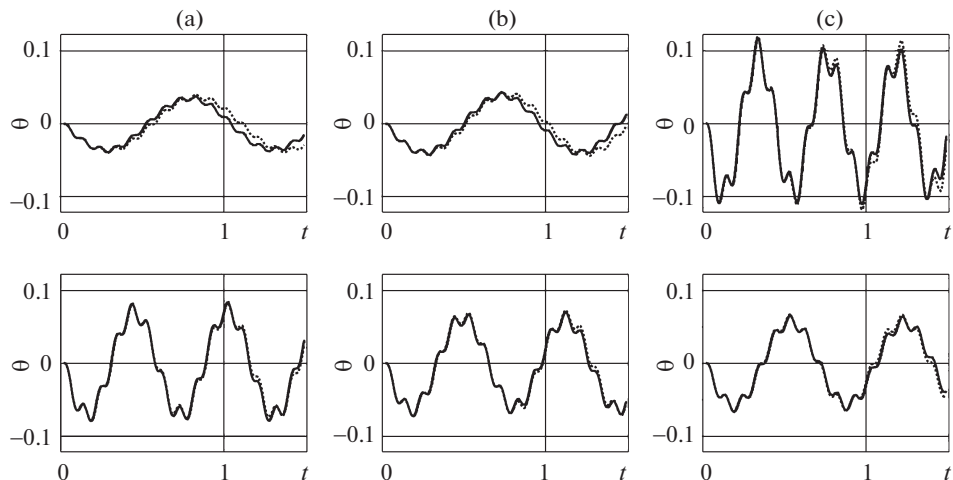


Рис. 3. Зависимости угла θ от времени t при $s_0/R = 0.02$, $f = 10$ Гц, $p_0 = 4, 16$ МПа.

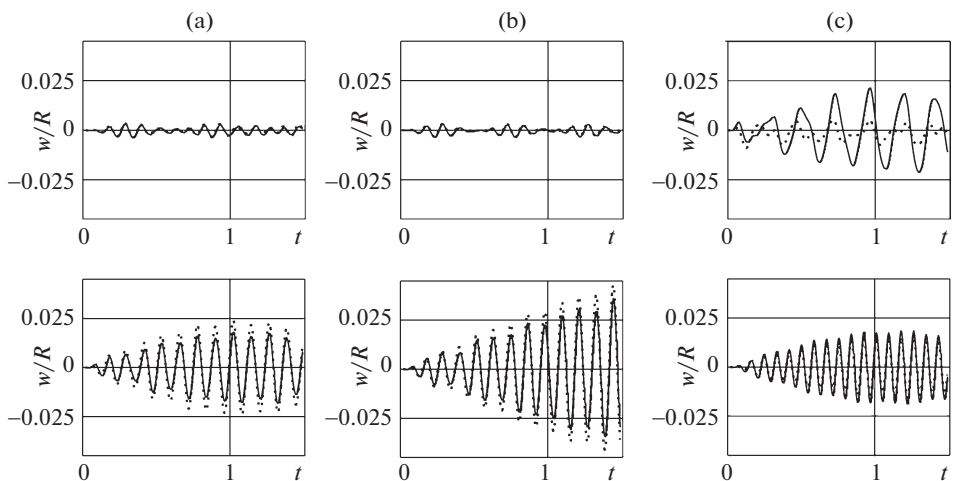


Рис. 4. Зависимости отношения w/R от времени t при $s_0/R = 0.02$, $f = 10$ Гц, $p_0 = 4, 16$ МПа.

применимость. Очевидно, что сказанное относится ко всем трубам, рассматриваемым в настоящей работе.

4. Периодические и неперидические режимы пространственных колебаний труб. Результаты численного решения задачи (1.6), (1.7), полученные при $p_0 = 9$ МПа, $f = 7$ Гц, изображены на рис. 7, 8 ($s_0/R = 0.02$) и 9, 10 ($s_0/R = 0.20$) в виде графических зависимостей. Для построения последних рассмотрены два отрезка времени: $0 \leq t \leq 5$ с (рис. 7, 8) и $5 \leq t \leq 10$ с (рис. 9, 10). Так же, как на рис. 3–6, графики столбцами а, б и с сгруппированы для стальной, титановой и композитной труб. Первыми строками сверху представлены графики зависимости угла θ поворота и отношения w/R от времени ($0 \leq t \leq 5$ с). На второй и последующих строках рисунков приведены фазовые траектории, отобра-

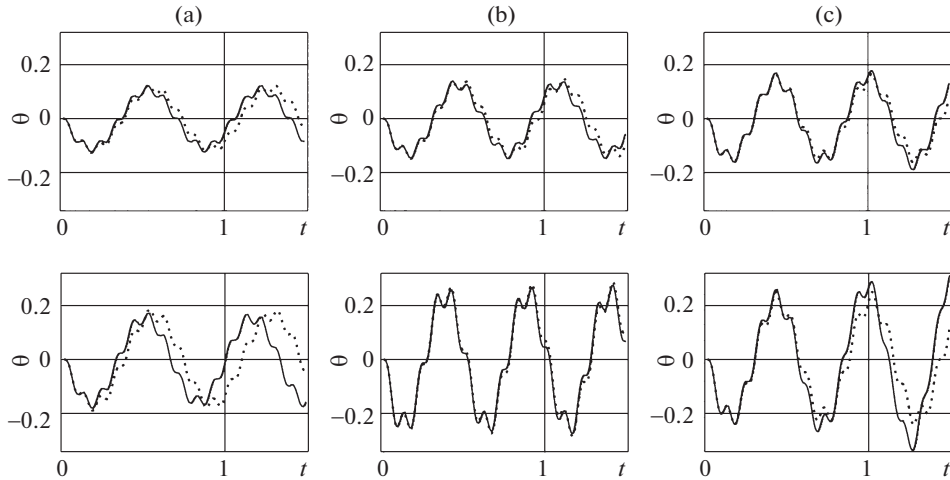


Рис. 5. Зависимости угла θ от времени t при $p_0 = 9$ МПа, $f = 10$ Гц, $s_0/R = 0.04, 0.06$.

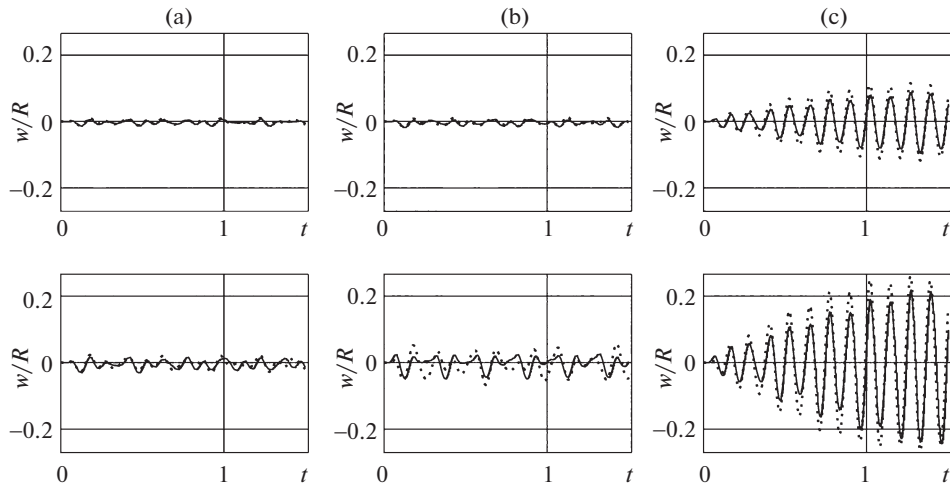


Рис. 6. Зависимости отношения w/R от времени t при $p_0 = 9$ МПа, $f = 10$ Гц, $s_0/R = 0.04, 0.06$.

жения Пуанкаре и зависимости модулей комплексных амплитуд F_1, F_2 изгибных и вращательных колебаний от частоты f . Выборка фазовых точек для картин Пуанкаре проводилась с периодом, равным периоду $T = 1/f$ колебаний опор.

Из сравнения графиков первых строк рис. 7, 8 можно видеть, что при принятых входных данных наибольшие амплитуды угловых и изгибных колебаний имеет титановая труба, а наименьшие – стальная труба. При этом изгибные колебания совершаются в виде биений, частота которых у композитной трубы больше, чем у стальной и титановой.

Вторыми строками графиков приведены фазовые траектории угловых (рис. 7) и изгибных колебаний (рис. 8). При этом первые траектории имеют два центра притяже-

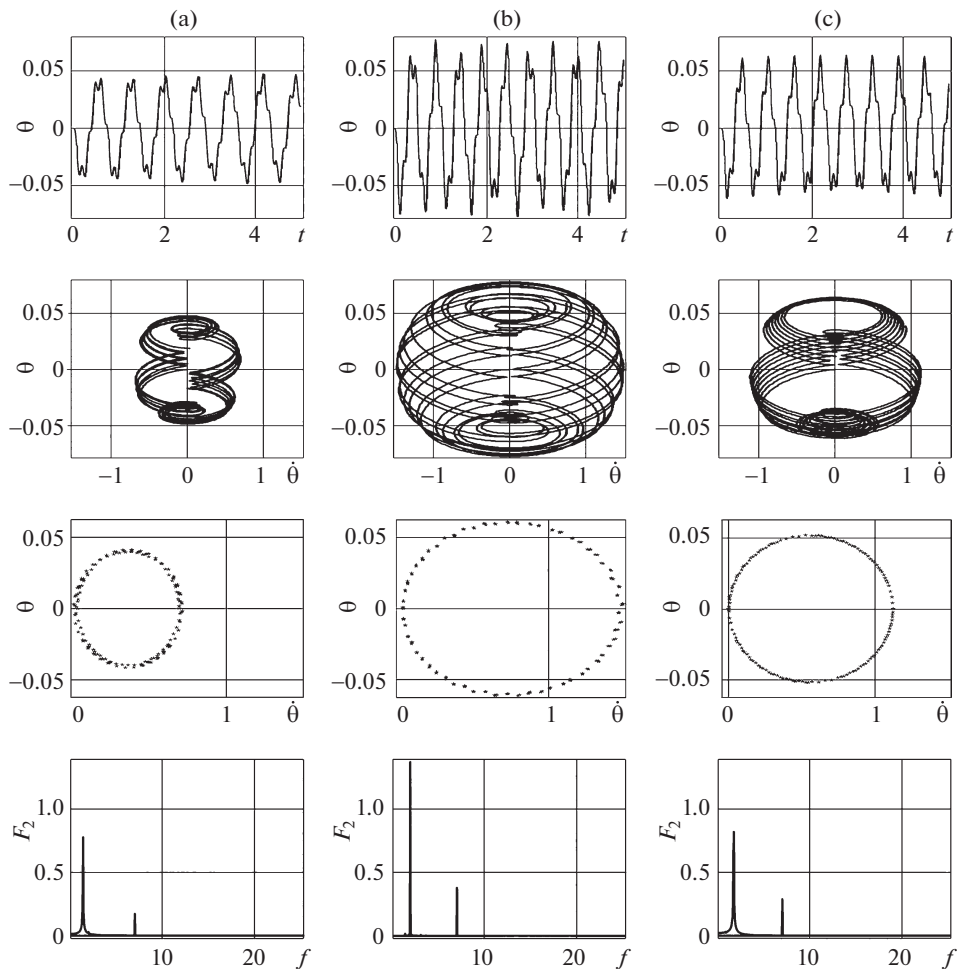


Рис. 7. Зависимости угла θ от времени t , фазовые траектории и отображения Пуанкаре $\theta, \dot{\theta}$, спектры частот F_2, f вращательных колебаний трубы при $s_0/R = 0.02, p_0 = 9$ МПа, $f = 7$ Гц.

ния, а последние — один центр притяжения. Общее для обоих колебательных движений состоит в том, что они являются периодическими.

Картинами Пуанкаре на рис. 7, 8 заняты третьи строки графиков. На картинах видно, что фазовые точки вращательных движений труб имеют форму эллипсов (рис. 7). При этом наибольшие размеры имеет эллипс отображений Пуанкаре титановой трубы, а наименьшие — стальной трубы. Множество фазовых точек изгибных колебаний труб на картинах Пуанкаре могут образовывать фигуры различных очертаний, которые характерны для каждой конкретной трубы (рис. 8).

На четвертых строках графиков рис. 7, 8 приведены спектры частот вращательных (рис. 7) и изгибных (рис. 8) колебаний. Из графиков видно, что дискретное преобразование Фурье у угловых движений выделяет колебания с частотами f_2, f , а у изгибных движений — колебания с частотами $2f_2, f_1, f_3, f_4, 2f$. Ранее при анализе приближенного аналитического решения (2.2) такие выводы, за исключением отсутствия в изгибных

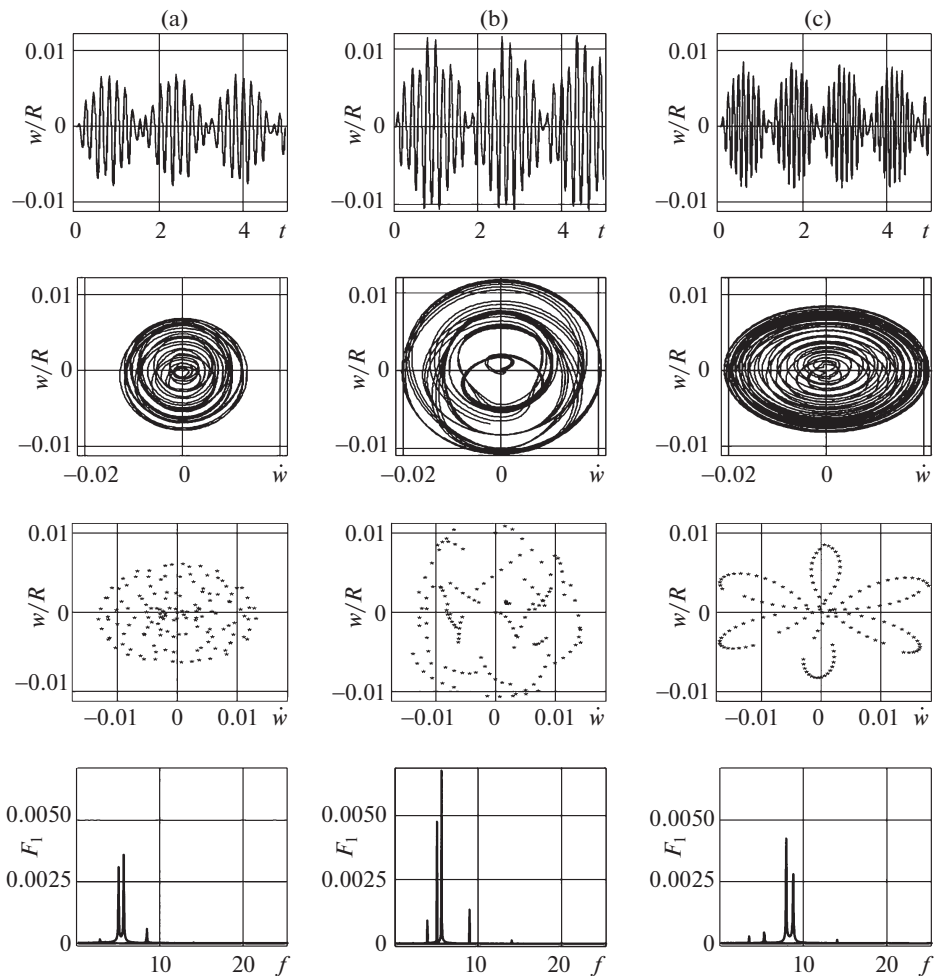


Рис. 8. Зависимости отношения w/R от времени t , фазовые траектории и отображения Пуанкаре w/R , \dot{w} , спектры частот F_1 , f изгибных колебаний трубы при $s_0/R = 0.02$, $p_0 = 9$ МПа, $f = 7$ Гц.

перемещениях колебаний с частотой $2f_2$, уже были сделаны. Данный пробел в решении (2.2) может быть восполнен, если при линеаризации второго уравнения (2.1) в его правой части сохранить член $W_0\theta^2$ и принять приближение $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$. Из результатов числовых расчетов следует, что при принятых входных данных вращательные и изгибные движения труб суммируются в указанной выше последовательности из колебаний с частотами: 1.36, 7.0/10.0 и 2.72, 4.97, 5.64/8.64, 8.36/11.36, 14.0/20.0 Гц (стальная труба); 1.96, 7.0/10.0 и 3.92, 5.61, 5.04/8.04, 8.96/11.96, 14.0/20.0 Гц (титановая труба); 1.72, 7.0/10.0 и 3.44, 7.89, 5.28/8.28, 8.72/11.72, 14.0/20.0 Гц (композитная труба). Здесь косыми знаками дробей разделены значения частот составляющих колебаний, которые соответствуют принятым расчетным частотам 7.0 и 10.0 Гц вибраций основания. Можно констатировать, что в обоих случаях неравенства $f_1 \neq 2f, f_2 \neq f, f_1 \neq f_3, f_1 \neq f_4$, обуславливающие нерезонансные решения (2.2), соблюдаются.

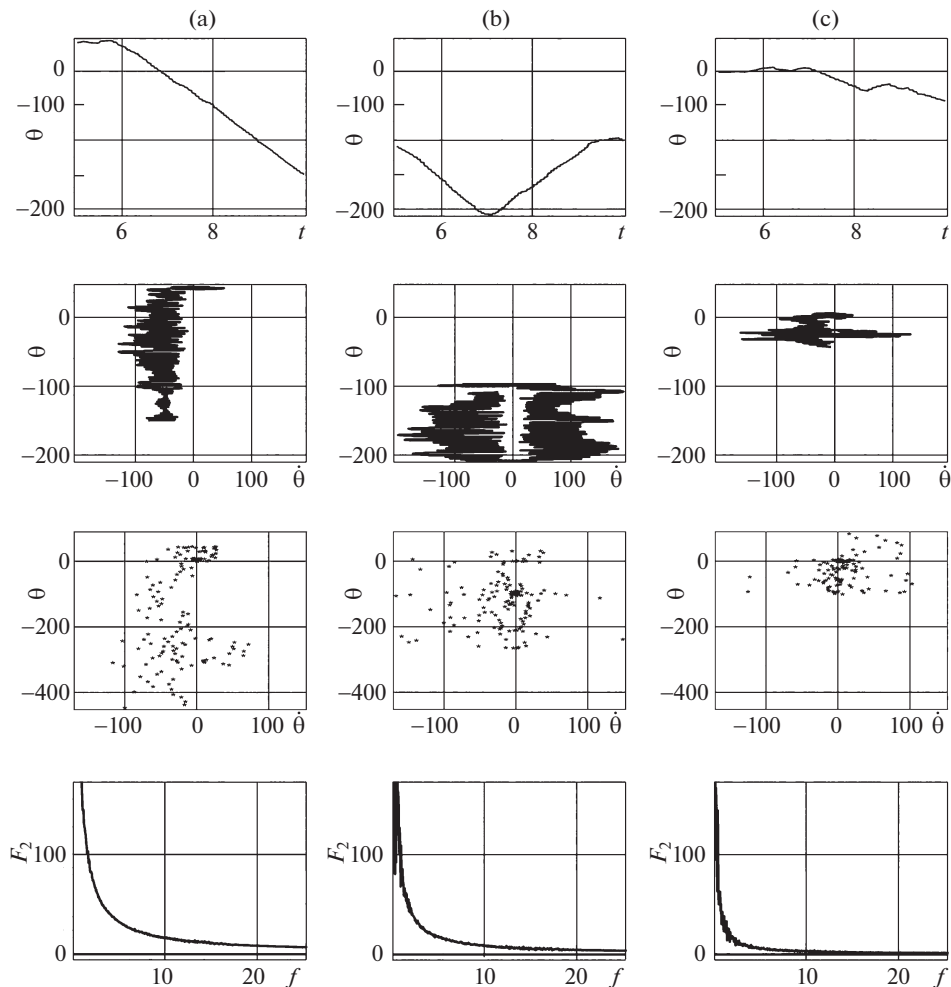


Рис. 9. Зависимости угла θ от времени t , фазовые траектории и отображения Пуанкаре θ , $\dot{\theta}$, спектры частот F_2 , f вращательных колебаний трубы при $s_0/R = 0.2$, $p_0 = 9$ МПа, $f = 7$ Гц.

Выше было отмечено, что с увеличением амплитуды перемещений опор происходит рост амплитуд как угловых, так и изгибных колебаний трубы. Графические зависимости рис. 9, 10, демонстрируют, что при определенных значениях параметров ($s_0/R = 0.2$) возможны хаотические колебания рассматриваемых трубопроводов.

Из первой строки графиков рис. 9 видно, что угловые колебания труб перешли в непрерывное вращение вокруг оси, проходящей через опоры. Если на фрагменте стальной трубы вращение происходит по часовой стрелке, то на фрагментах титановой и композитной труб режим этого вращения наблюдается с изменением направления. Это изменение идет в режиме нескольких колебаний около некоторого угла θ . Из первой строки графиков рис. 10 следует, что в хаотическом режиме амплитуды изгибных колебаний труб увеличиваются многократно. При этом наибольшая амплитуда отношения w/R наблюдается у композитной трубы.

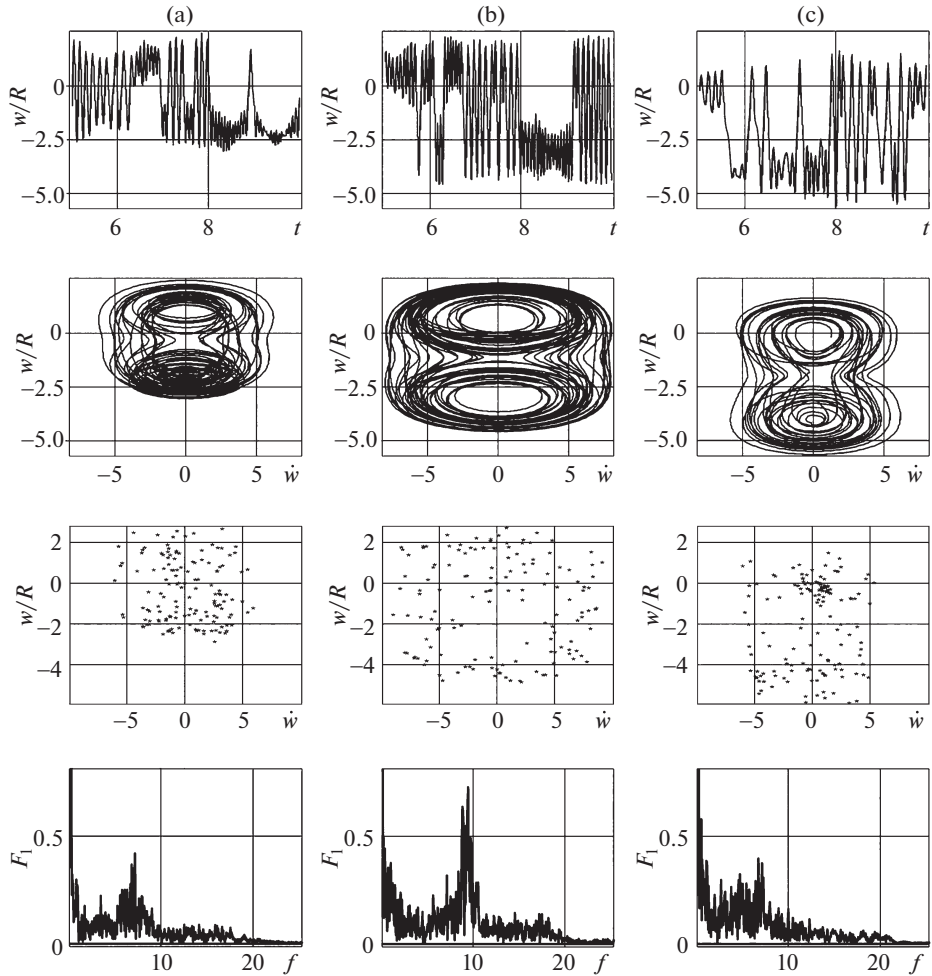


Рис. 10. Зависимости отношения w/R от времени t , фазовые траектории и отображения Пуанкаре w, \dot{w} , спектры частот F_1, f изгибных колебаний трубы при $s_0/R = 0.2, p_0 = 9$ МПа, $f = 7$ Гц.

Фазовые траектории колебаний изображены на вторых строках рис. 9, 10. Можно видеть, что в данном отрезке времени ($5 \leq t \leq 10$ с) изгибные колебания труб имеют по два центра притяжения. Они располагаются около $w/R \approx 0$ и $w/R \approx -2, -3, -4$. Таким образом, колебания совершаются вокруг статического положения каждого трубопровода (стального, титанового, композитного): $W_0/R = 0.274, 1.113, 1.964$ и $\theta \approx 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$. Кроме того из вторых строк графиков рис. 9, 10 видно, что наибольшие модули скоростей угловых и изгибных перемещений имеет титановая труба.

Фазовые точки на картинах Пуанкаре (рис. 9, 10, третьи строки графиков) распределены беспорядочно, без определенных мест скопления и занимают на графиках разные площади. Это объясняется тем, что в работе не учитываются эффекты затухания.

Последними строками графиков рис. 9, 10 соответственно представлены спектры частот вращательных и изгибных движений. Видно, что они имеют сплошной вид.

Из вышеизложенного следует, что при принятых данных в рассматриваемых трубах возбуждаются непериодические колебания.

Заключение. Задача о пространственных колебаниях изогнутого трубопровода на вибрирующих опорах представляется достаточно сложной. Ее решение может быть получено лишь на основе простейшей модели, например, изгибно-вращательных движений трубы. Модель предполагает, что отсутствуют деформации, связанные с выходом изогнутой оси трубопровода из плоскости изгиба (в частности, нет деформации кручения). Поэтому в каждый момент времени движения трубы рассматриваются как совокупность изгибных перемещений в одной плоскости, ее переносных вращений и поступательных вибраций опор. Вместе с тем модель учитывает взаимодействия внутреннего давления и изменений кривизны осевой линии, продольной и кольцевой деформаций трубы. Нелинейные уравнения изгибно-вращательных колебаний трубопровода решаются методами Бубнова–Галеркина и Рунге–Кутта. Результаты решения анализируются с помощью дискретных преобразований Фурье и отображений Пуанкаре.

Для случая малых угловых и изгибных колебаний трубопровода получено приближенное аналитическое решение системы линеаризованных уравнений. Сравнительный анализ результатов вычислений по формулам приближенного аналитического решения и численного моделирования позволил установить, что малые изгибно-вращательные движения стального, титанового и композитного трубопроводов складываются из колебаний с определенными частотами. Показано, что вращательные перемещения состоят из колебательных движений с двумя частотами, а изгибные — с пятью разными частотами. Кроме того, можно констатировать хорошее согласие в числовых значениях собственных частот угловых и изгибных колебаний, полученных по приближенному аналитическому и численному подходам. Установлено, что при относительно небольшой амплитуде перемещения опор с увеличением внутреннего давления в трубах их собственные частоты изгибных колебаний сначала уменьшаются, достигают минимума, а затем увеличиваются. При этом собственные частоты угловых колебаний сначала растут, принимают максимальные значения, а далее уменьшаются. Следует подчеркнуть, что собственные частоты изгибных и угловых колебаний труб принимают экстремальные значения при внутренних давлениях, равных их критическим значениям. Важно также отметить, что с увеличением внутреннего давления в трубах графические зависимости изгибных и угловых перемещений от времени, полученные приближенным аналитическим и численным решениями, сближаются.

Результатами вычислений также подтверждено, что увеличение амплитуды перемещений опор приводит к увеличению амплитуд как изгибных, так вращательных колебаний трубы. При этом также увеличиваются расхождения в результатах приближенного аналитического и численного методов.

Показано, что при определенной совокупности входных данных и небольшом значении относительной амплитуды перемещения опор изгибно-вращательные колебания труб происходят в периодическом режиме. Десятикратное увеличение относительной амплитуды перемещения опор (при сохранении тех же входных данных) приводит к непериодическим колебаниям труб.

Приведенный в настоящей статье анализ результатов числовых расчетов пространственных движений стальной, титановой и композитной труб дает возможность оценить их работоспособность по условиям прочности, жесткости и близости к резонансным и хаотическим режимам колебаний.

Авторы выражают благодарность М.А. Ильгамову за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 180 с.
2. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
3. Ганиев Р.Ф., Низамов Х.Н., Дербуков Е.И. Волновая стабилизация и предупреждение аварий в трубопроводах. М.: Из-во МГТУ, 1996. 258 с.
4. Ibrahim R.A. Mechanics of pipes conveying fluids // ASME J. Pressure Vessel Technol. 2010. V. 132. P. 1–32.
<https://doi.org/10.1115/1.4001271>
5. Li S., Karney B. W., Liu G. FSI research in pipeline systems – A review of the literature // J. Fluids Struct. 2015. V. 57. P. 277–297.
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.06.020>
6. Ilgamov M.A., Tang D.M., Dowell E.H. Flutter and forced response of a cantilevered pipe: The influence of internal pressure and nozzle discharge // J. Fluids Struct. 1994. V. 8. P. 139–156.
7. Wadham-Gagnon M., Païdoussis M.P., Semler C. Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 1: Nonlinear equations of three-dimensional motion // J. Fluids Struct. 2007. V. 23. P. 545–567.
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2006.10.006>
8. Païdoussis M.P., Semler C., Wadham-Gagnon M., Saaid S. Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 2: Dynamics of the system with intermediate spring support // J. Fluids Struct. 2007. V. 23. P. 569–587.
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2006.10.009>
9. Modarres-Sadeghi Y., Semler C., Wadham-Gagnon M., Païdoussis M.P. Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 3: Three-dimensional dynamics in the presence of an end-mass // J. Fluids Struct. 2007. V. 23. P. 589–603.
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2006.10.007>
10. Tang D.M., Ilgamov M.A., Dowell E.H. Buckling and post-buckling behavior of a pipe subjected to internal pressure // J. Appl. Mech. 1995. V. 62. № 3. P. 595–600.
11. Ильгамов М.А., Мишин В.Н. Поперечные колебания трубы под действием бегущих волн в жидкости // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 181–192.
12. Zou G.P., Cheraghi N., Taheri F. Fluid-induced vibration of composite gas pipelines // J. Solids Struct. 2005. V. 42. P. 1253–1268.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.07.001>
13. Ан Е.В., Рашидов Т.Р. Сейсмомеханика подземных трубопроводов, взаимодействующих с водонасыщенным мелкодисперсным грунтом // Изв. РАН МТТ. 2015. № 3. С. 89–104.
14. Исраилов М.Ш. Связанные сейсмические колебания трубопровода в бесконечной упругой среде // Изв. РАН МТТ. 2016. № 1. С. 57–66.
15. Łuczko J., Czerwiński A. Nonlinear three-dimensional dynamics of flexible pipes conveying fluids // J. Fluids Struct. 2017. V. 70. P. 235–260.
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2017.02.002>
16. Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А., Хакимов А.Г., Шакирьянов М.М. Пространственные колебания трубопровода в сплошной среде под действием переменного внутреннего давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 3–13.
17. Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А., Хакимов А.Г., Шакирьянов М.М. Пространственные неперидические колебания трубопровода под действием переменного внутреннего давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 2. С. 3–12.
18. Ильгамов М.А. Динамика трубопровода при действии внутреннего ударного давления // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 83–96.
19. Ганиев Р.Ф., Ильгамов М.А., Хакимов А.Г., Шакирьянов М.М. Пространственные колебания трубопровода с упруго-смещающейся опорой при действии внутреннего ударного давления // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 6. С. 3–12.
<https://doi.org/10.31857/S023571190002555-1>
20. Шакирьянов М.М. Пространственные нелинейные колебания трубопровода при действии внутреннего ударного давления // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 6. С. 76–84.
<https://doi.org/10.1134/S0572329919060114>

21. *Huayuan Ma, Long Y., Zhong M. et al.* Study on ground vibration mode of physical explosion of high pressure natural gas pipeline // *Acoust. Phys.* 2019. V. 65. С. 583–592.
<https://doi.org/10.1134/S1063771019050142>
22. *Limarchenko V.O., Limarchenko O.S., Sapon N.N.* Dynamics of a Pipeline with a Liquid on a Rotating Base // *Int. Appl. Mech.* 2020. V. 56. P. 351–357.
<https://doi.org/10.1007/s10778-020-01018-6>
23. *Lu Z.Q., Zhang K.K., Ding H., Chen L.Q.* Nonlinear vibration effects on the fatigue life of fluid-conveying pipes composed of axially functionally graded materials. *Nonlinear Dyn.* 2020. V. 100. № 2. P. 1091–1104.
<https://doi.org/10.1007/s11071-020-05577-8>
24. *Mao X., Ding H. & Chen L.* Bending vibration control of pipes conveying fluids by nonlinear torsional absorbers at the boundary // *Sci. China Technol. Sci.* 2021. V. 64. P. 1690–1704.
<https://doi.org/10.1007/s11431-020-1791-2>
25. *Ильгамов М.А., Шакирьянов М.М.* Положения динамического равновесия изогнутого трубопровода с вибрирующими опорами // *Докл. РАН. Физ., тех. науки.* 2021. Т. 496. № 1. С. 55–59.
<https://doi.org/10.31857/S2686740021010053>
26. *Акуленко Л.Д., Иванов М.И., Коровина Л.И., Нестеров С.В.* Свободные колебания участка трубопровода // *Изв. РАН. МТТ.* 2011. № 1. С. 172–187.
27. *Акуленко Л.Д., Иванов М.И., Коровина Л.И., Нестеров С.В.* Основные свойства собственных колебаний протяженного участка трубопровода // *Изв. РАН. МТТ.* 2013. № 4. С. 119–134.
28. *Акуленко Л.Д., Гавриков А.А., Нестеров С.В.* Собственные колебания трубопровода на упругом основании, транспортирующего жидкость // *Изв. РАН. МТТ.* 2018. № 1. С. 123–133.