

УДК 629.7.087

## АНАЛИЗ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЕ ПРИ РАЗВЕРТЫВАНИИ КОЛЬЦЕВОЙ ТРОСОВОЙ ГРУППИРОВКИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

© 2023 г. Ю. М. Заболотнов<sup>a,\*</sup>, А. А. Назарова<sup>a,\*\*</sup>, Чанцин Ван<sup>b,\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Самарский национальный исследовательский университет, Самара, Россия

<sup>b</sup>Северо-западный политехнический университет, Сиань, Китай

\*e-mail: yumz@yandex.ru

\*\*e-mail: anazarova63@gmail.com

\*\*\*e-mail: wangcq@nwpu.edu.cn

Поступила в редакцию 29.08.2022 г.

После доработки 01.10.2022 г.

Принята к публикации 04.10.2022 г.

В работе рассматривается метод формирования вращающейся тросовой группировки малых космических аппаратов в виде правильного многоугольника. Для создания внешнего вращающего момента, действующего на всю систему в целом, используются двигатели малой тяги, причем направления реактивных сил неизменны в связанных с космическими аппаратами системах координат. Выпуск тросов регулируется по измерениям их длины и скорости в соответствии с номинальной программой, в которой предполагается, что механизмы выпуска тросов работают только на их торможение. Номинальная программа строится по упрощенной модели движения системы, построенной с помощью уравнений Лагранжа. Реализуемость программы развертывания проверяется с использованием более полной модели пространственного движения системы, записанной в геоцентрической неподвижной системе координат и учитывающей растяжимость тросов, односторонность соответствующих им механических связей, работу системы регулирования, возмущения, связанные с начальными условиями движения и т.д. В более полной модели движения учитывается движение космических аппаратов относительно своих центров масс как твердых тел конечных размеров, что приводит к возмущениям в направлениях действия реактивных сил. Приводятся численные примеры развертывания кольцевых тросовых группировок малых космических аппаратов в виде многоугольников, имеющих до семи вершин включительно, при действии возмущений.

*Ключевые слова:* космические аппараты, кольцевая тросовая группировка, развертывание, динамика, управление

DOI: 10.31857/S0572329922600670, EDN: QWPXSI

**1. Введение.** Рассматриваемая в работе тросовая группировка космических аппаратов (ТГКА) после развертывания представляет собой геометрическую кольцевую структуру, близкую к правильному многоугольнику с  $n$  вершинами. Такие ТГКА могут быть использованы для различных целей, например, как многоточечные измерительные системы, как распределенные системы дистанционного зондирования Земли, как космические интерферометры и т.д. В настоящее время имеется большое количество публикаций многих авторов, посвященных ТГКА, в частности, имеются работы, в которых рассматриваются замкнутые структуры. Первые описания замкнутых ТГКА и их возможных применений были сделаны еще в 90-х годах прошлого века, например в

[1]. В настоящее время большое внимание уделяется самой простой плоской замкнутой структуре: ТГКА в виде правильного треугольника [2–9]. Были рассмотрены задачи существования устойчивых состояний треугольной ТГКА в орбитальной плоскости [2] и разработаны программы стабилизации [3] движения вращающейся треугольной тросовой группировки, основанные на линеаризации и принципе обратной связи. В работах [4, 5] решались задачи управления развертыванием вращающейся треугольной ТГКА. Причем в [4] предполагалось как возможность выпуска тросов, так и их втягивание, а в работе [5] было разработано робастное управление с использованием режима скольжения по заданной поверхности (Sliding Mode Control, SMC). В работе [6] оценивается влияние атмосферных и гравитационных возмущений на уже развернутую и вращающуюся треугольную ТГКА. Известны работы [7, 8], в которых исследуется движение треугольной тросовой группировки вблизи точек либрации системы Земля–Луна на этапах развертывания и при вращении в конечном состоянии. К замкнутым ТГКА также можно отнести пространственные ТГКА в виде пирамиды и двойной пирамиды, причем в последнем случае удалось доказать устойчивость ее движения при вращении вокруг вертикали [9–11]. Анализ работ, в которых рассматривается динамика и управление движением замкнутых ТГКА, показывает, что во всех известных случаях КА рассматривались как материальные точки, то есть задачи решались в ограниченной постановке. Авторам также неизвестны работы, где рассматривались бы замкнутые плоские структуры ТГКА с вершинами больше трех. С этой точки зрения данное направление исследований требует дальнейшего развития.

В данной работе в исходном состоянии КА жестко связаны между собой, то есть представляют собой твердое тело, геометрическая конфигурация которого повторяет структуру системы в конечном состоянии. При этом система вращается с некоторой начальной угловой скоростью, причем плоскость вращения в номинальном случае совпадает с плоскостью орбитального движения центра масс системы. При освобождении механических связей (тросов) происходит развертывание тросовой группировки КА, причем внешний вращающий момент создается с помощью двигателей малой тяги, установленных на КА. Одновременно с этим осуществляется контроль сил натяжения тросов, соединяющих КА, по измерениям их длины и скорости выпуска из механизмов управления. Используются механизмы выпуска тросов, которые работают только на торможение и не могут втягивать тросы обратно. Программа формирования ТГКА включает в себя два активных участка (с точки зрения действия реактивных сил) и один пассивный. Пассивный участок движения вводится для обеспечения плавного торможения тросов таким образом, чтобы при достижении заданной длины их скорость и ускорение равнялись нулю. После прекращения выпуска тросов двигатели малой тяги включаются вновь для обеспечения заданной угловой скорости вращения ТГКА в своем конечном состоянии. Величина реактивных сил не регулируется, то есть программа их изменения релейная.

Для обоснования описанной схемы формирования кольцевой ТГКА используются две математические модели ее движения. Первая упрощенная модель движения ТГКА получается с помощью уравнений Лагранжа и служит для построения номинальной программы выпуска тросов. В этой модели КА рассматриваются как материальные точки, а тросы как нерастяжимые идеальные механические связи. При этом в данном идеальном случае в процессе развертывания геометрическая структура системы – правильный многоугольник, причем действием гравитационных сил пренебрегается. Таким образом, фактически рассматривается система, которая вращается относительно неподвижной точки – центра симметрии многоугольника. Простая модель движения системы позволяет выбрать направления действия реактивных сил относительно направления тросов и доказать асимптотическую устойчивость конечного состояния системы на пассивном участке ее движения в силу упрощенных уравнений. Номи-

нальная программа развертывания ТГКА учитывает ограничения на силы натяжения тросов, которые в процессе формирования системы должны быть натянуты, и является по структуре одинаковой для всего семейства многоугольников с  $n$  вершинами.

При построении второй более полной модели движения ТГКА используется методика, описанная в работе [12], где рассматривалось формирование линейной вертикальной тросовой группировки, состоящей из трех наноспутников. В этом случае уравнения движения ТГКА записываются в неподвижной геоцентрической системе координат и вся система, включая уравнения движения вокруг центра масс каждого КА, численно интегрируется совместно с учетом взаимного влияния колебаний тросов и углового движения КА. Тросы рассматриваются как растяжимые односторонние механические связи, то есть допускается их ослабление. Колебания КА относительно центров масс приводят к возмущениям в направлениях реактивных сил, которые имеют постоянную ориентацию в связанных с КА системах координат. В рамках этой более полной модели учитываются также: ошибки, связанные с начальной ориентацией вектора угловой скорости системы (до разделения КА), который может быть не ортогонален орбитальной плоскости движения центра масс системы (пространственное движение системы); массово-инерционная асимметрия КА, влияющая на их угловое движение. Возможность реализации предлагаемой схемы управления подтверждается характерными примерами численного моделирования процесса формирования ТГКА в виде многоугольника до семи вершин включительно по более полной модели ее движения с учетом перечисленных возмущений. Причем показано, что если зафиксировать радиус описанной вокруг многоугольника окружности, то можно использовать номинальную программу развертывания системы с одними и теми же значениями ее параметров.

**2. Простая модель движения ТГКА и номинальная программа управления.** Для построения номинальной программы управления при формировании ТГКА используется простая модель движения системы, полученная с помощью уравнений Лагранжа. В этой модели предполагается, что идеальная форма правильного многоугольника при развертывании системы сохраняется, а тросы – нерастяжимые механические связи, причем силы реакции в них должны быть положительными (должны растягивать тросы в более полной модели), что обеспечивается предлагаемой программой выпуска тросов и выбором направлений действия реактивных сил  $\mathbf{F}_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Другие допущения: 1) КА – материальные точки; 2) рассматривается плоское движение системы; 3) учитывается только кинетическая энергия движения системы относительно ее центра масс.

Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_c}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T_c}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{q} = (l, \theta)^T$  – вектор обобщенных координат,  $l$  и  $\theta$  – длина тросов и угол ориентации многоугольника относительно вертикали,  $\dot{\mathbf{q}} = d\mathbf{q}/dt$  – вектор обобщенных скоростей,  $T_c$  – кинетическая энергия,  $\mathbf{Q} = (Q_l, Q_\theta)^T$  – вектор обобщенных сил.

В системе координат  $c x_o y_o$ , связанной с центром масс системы (в данном случае  $c$  – это неподвижная точка), компоненты радиус-векторов  $\mathbf{r}_k$  материальных точек определяются следующим образом

$$x_{ok} = r(l) \cos(\theta + \theta_{ok}), \quad y_{ok} = r(l) \sin(\theta + \theta_{ok}) \quad (2.2)$$

где  $\theta_{ok} = (k - 1) \varphi_n$  ( $k = 1, \dots, n$ ),  $r(l) = l/2 \sin(\varphi_n/2)$  – радиус описанной вокруг многоугольника окружности,  $\varphi_n = 2\pi/n$  – центральный угол многоугольника, соответствующий тросу длиной  $l$ .

Кинетическая энергия всей системы определяется как

$$T_c = \frac{1}{2} m \sum_{k=1}^n (\dot{x}_{ok}^2 + \dot{y}_{ok}^2) \quad (2.3)$$

где  $m$  – масса одного КА.

После подстановки выражений (2) в (3) и дифференцирования кинетическая энергия примет вид

$$T_c = nm(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2)/8 \sin^2(\varphi_n/2) \quad (2.4)$$

Компоненты обобщенных сил, зависящие от  $\mathbf{F}_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), вычисляются стандартным образом с использованием скалярного произведения

$$Q^{(F)} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{F}_k \quad (2.5)$$

Проводя вычисления (2.5), с учетом выражений (2.2) получим

$$Q_l^{(F)} = nF \sin(\psi - \varphi_n/2)/2 \sin(\varphi_n/2), \quad Q_\theta = nFl \cos(\psi - \varphi_n/2)/2 \sin(\varphi_n/2) \quad (2.6)$$

где  $F = |\mathbf{F}_k|$  – модуль реактивных сил,  $\psi$  – угол, который определяет направление действия реактивных сил (рис. 1). Полная обобщенная сила  $Q_l$  будет иметь вид

$$Q_l = Q_l^{(F)} - nT \quad (2.7)$$

Здесь учитывается, что для невесомых тросов силы натяжения ( $T$ ) равны управляющим силам в механизмах их выпуска, которые работают только на торможение.

Проводя дифференцирование кинетической энергии, с учетом (1) получим

$$\dot{l} - l\dot{\theta}^2 = Q_l f(n)/m, \quad \ddot{\theta} + 2\dot{\theta}/l = Q_\theta f(n)/m \quad (2.8)$$

где  $f(n) = 4 \sin^2(\varphi_n/2)/n$ .

Как было отмечено выше, при формировании ТГКА имеются активные и пассивные участки. Причем пассивные участки ( $\mathbf{F}_k = 0$ ) вводятся для того, чтобы при окончании выпуска тросов для номинального случая  $l \rightarrow l_{\text{end}}$ ,  $\dot{l} \rightarrow 0$  при выполнении ограничений  $l < l_{\text{end}}$ ,  $\dot{l} > 0$  (управляющие механизма работают только на торможение). Эти условия можно выполнить, выбрав соответствующую программу изменения натяжения тросов

$$T(n) = m[l\dot{\theta}^2 + k_l(l - l_{\text{end}}) + k_v\dot{l}]/nf(n) \quad (2.9)$$

где  $k_l, k_v$  – коэффициенты, которые выбираются исходя из выполнения конечных граничных условий, приведенных выше для  $l, \dot{l}$ .

Подставляя (2.9) в первое уравнение системы (2.8), получим линейное уравнение

$$\dot{l} + k_v\dot{l} + k_l(l - l_{\text{end}}) = 0 \quad \text{или} \quad \Delta\ddot{l} + k_v\Delta\dot{l} + k_l\Delta l = 0 \quad (2.10)$$

где  $\Delta l = l - l_{\text{end}}$ ,  $\Delta\dot{l} = \dot{l}$ ,  $\Delta\ddot{l} = \ddot{l}$ .

Решение уравнения (2.10) зависит от его характеристических чисел

$$\lambda_{1,2} = -k_v/2 \pm (k_v^2/4 - k_l)^{0.5} \quad (2.11)$$

Если  $k_v > 0$  и  $k_v^2/4 - k_l > 0$ , то переходный процесс по переменным  $\Delta l, \Delta\dot{l}$  будет апериодическим и асимптотически устойчивым, т.е.  $\Delta l \rightarrow 0$ ,  $\Delta\dot{l} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , причем если  $l(0) < l_{\text{end}}$ ,  $\dot{l}(0) > 0$ , то эти неравенства будут выполняться в каждый момент

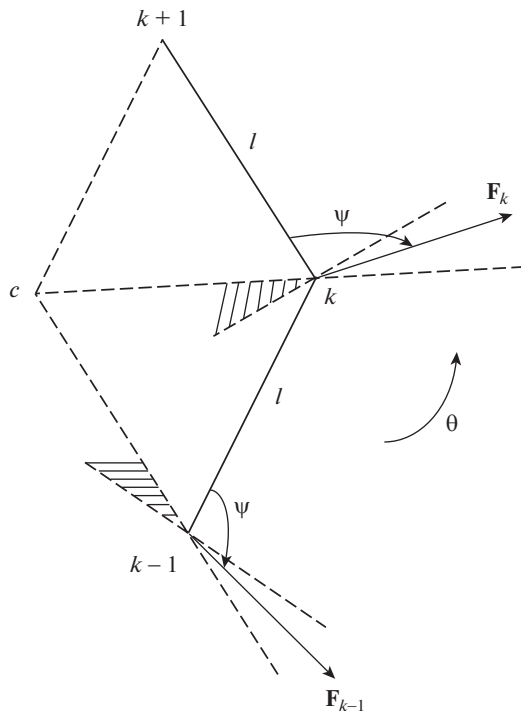


Рис. 1. Фрагмент ТГКА в виде многоугольника с обобщенными координатами.

времени. Таким образом, если управляющую силу в механизмах выпуска тросов задать в виде (2.9) с учетом соответствующего выбора значений коэффициентов  $k_v, k_l$ , то фактически будет иметь место терминальный метод управления при формировании ТГКА в виде многоугольника при соблюдении приведенных выше ограничений.

Чередование активных и пассивных участков при разворачивании ТГКА зависит от моментов времени  $t_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), которые являются параметрами программы управления. Тогда

$$F(t) = \begin{cases} F_n, & t < t_1 \\ 0, & t_1 \leq t \leq t_2 \\ F_n, & t_2 < t < t_3 \\ 0, & t \geq t_3 \end{cases} \quad (2.12)$$

где  $F_n$  — номинальная величина реактивных сил, а момент времени  $t_3$  соответствует достижению угловой скорости вращения системы  $\dot{\theta}_{\text{end}}$  заданного значения.

Как показали проведенные исследования с использованием более полной модели движения ТГКА, важным является выбор направления действия реактивных сил, т.е. угла  $\psi$ . С одной стороны силы  $\mathbf{F}_k$  должны создавать момент определенного знака, например, положительного, который будет увеличивать угловую скорость  $\dot{\theta}$  на активных участках движения системы, а с другой стороны проекции векторов реактивных сил на направление каждого участка троса должны иметь разные знаки и растягивать трос, соответствующий этому участку (в более полной модели тросы растяжимы). Приве-

денные рассуждения иллюстрируются на рис. 1, где заштрихованы сектора, в которые должны быть направлены сопла двигателей, расположенных в крайних точках участка троса. В соответствии с рис. 1 для угла  $\psi$  должно выполняться неравенство  $\pi/2 < \psi < (\pi + \varphi_n)/2$ , причем очевидно, что этот диапазон для углов  $\psi$  будет уменьшаться с увеличением числа вершин многоугольника.

В качестве численного примера рассматривается развертывание ТГКА в виде многоугольников, имеющих пять и семь вершин. Параметры системы следующие: массы КА 20 кг, силы тяги 6 Н, начальная угловая скорость всей системы до разделения КА  $0.1 \text{ с}^{-1}$ , угол  $\psi = 95$  град, высота начальной круговой орбиты 500 км, коэффициенты  $k_l = 0.15 \text{ кг с}^{-2}$ ,  $k_v = 15 \text{ кг с}^{-1}$ . На начальном участке развертывания системы имеется небольшой промежуток времени (в приведенных примерах 10–15 с), на котором сила натяжения, определенная по формуле (2.9), отрицательна. На этом участке предполагается, что выпуск тросов осуществляется с постоянной силой натяжения, т.е. учитывается ограничение  $T \geq T_{\min}$ . В данном случае полагается  $T_{\min} = 0.01 \text{ Н}$ . Моменты времени, определяющие программу изменения силы  $F(t)$ , равны  $t_1 = 150 \text{ с}$ ,  $t_2 = 800 \text{ с}$ ,  $t_3 = 950 \text{ с}$ . Радиус описанной вокруг многоугольников окружности был принят одинаковым 500 м. Было установлено, что в этом случае можно использовать одни и те же параметры программы развертывания ТГКА (это  $t_{1,2,3}$ ,  $\psi$ ,  $F_n$ ,  $k_l$ ,  $k_v$ ,  $T_{\min}$ ), причем это справедливо также для  $n = 4$  и  $n = 6$  (треугольник не рассматривался). Характерные зависимости, соответствующие пяти- и семиугольникам, для номинальных программ формирования ТГКА приводятся на рис. 2,а–d (сплошная линия –  $n = 5$ , штриховая линия –  $n = 7$ ). На рис. 2,а–d и далее при построении графиков  $\tau = \Omega t$  – безразмерное время, где  $\Omega$  – угловая скорость перемещения центра масс ТГКА, соответствующая начальной круговой орбите. Для рассматриваемых случаев величина заштрихованных секторов (рис. 1) равна соответственно  $\varphi_5/2 = 36$  град и  $\varphi_7/2 \approx 25.7$  град. Здесь необходимо отметить, что, как следует из рис. 2,с, на пассивном участке движения системы  $t_1 \leq t \leq t_2$ , когда  $\Delta l \rightarrow 0$ ,  $\Delta \dot{l} \rightarrow 0$ , угловая скорость  $\dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta}_{\lim}$ , где  $\dot{\theta}_{\lim}$  – некоторая постоянная величина. Так как с увеличением числа вершин (т.е. КА) масса всей системы увеличивается, то очевидно, что конечная угловая скорость вращения системы  $\dot{\theta}_{\text{end}}$ , будет меньше (рис. 2,с). Однако это не является принципиальным, так как увеличивая время  $t_3$ , т.е. длительность последнего активного участка, всегда можно обеспечить требуемую угловую скорость вращения ТГКА.

**3. Уравнения движения ТГКА в геоцентрической системе координат.** Запись уравнений движения ТГКА в геоцентрической неподвижной системе координат с учетом растяжимости и односторонности механических связей (тросов) между КА (которые рассматриваются как твердые тела конечных размеров), с учетом работы системы регулирования выпуска тросов из механизмов управления и других возмущений, которые будут описаны ниже, осуществляется с использованием методики, изложенной в работе [12], где рассматривалась задача формирования вертикальной (или радиальной) тросовой группировки, состоящей из трех наноспутников.

Уравнения движения центров масс КА в геоцентрической неподвижной системе координат  $OXYZ$  имеют вид

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 &= \mathbf{G}_1 + \mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_n + \mathbf{F}_1 \\ m_k \ddot{\mathbf{R}}_k &= \mathbf{G}_k + \mathbf{T}_k - \mathbf{T}_{k-1} + \mathbf{F}_k \quad (k = 2, \dots, n-1) \\ m_n \ddot{\mathbf{R}}_n &= \mathbf{G}_n + \mathbf{T}_n - \mathbf{T}_1 + \mathbf{F}_n \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{R}_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) – радиус-векторы центров масс КА,  $\mathbf{F}_k$  – реактивные силы,  $\mathbf{G}_k = -\mu m_k \mathbf{R}_k / R_k^3$  – гравитационные силы,  $\mu$  – гравитационная постоянная,  $\mathbf{T}_k$  – силы на-

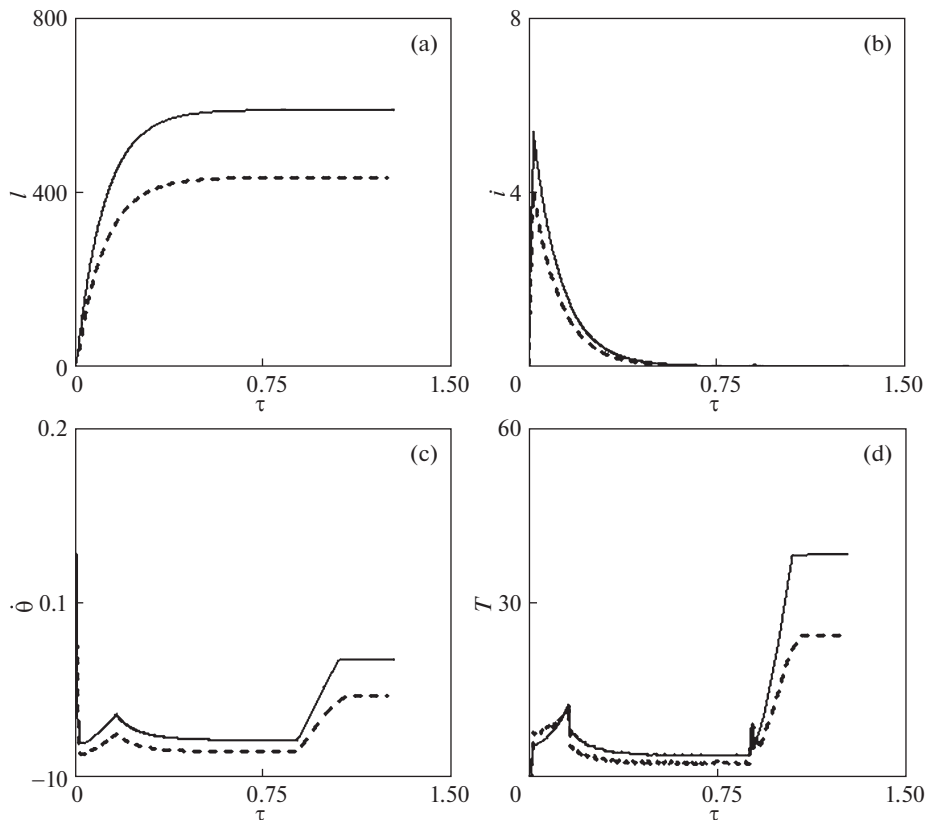


Рис. 2. Номинальные характеристики движения ТГКА в процессе ее развертывания.

тяжения тросов, приложенные к  $k$ -й точке и направленные к следующей точке (например, если считать точки против часовой стрелки). При записи системы (3.1) тросы полагаются невесомыми.

Положение геоцентрической прямоугольной правой неподвижной системы координат  $OXYZ$  в начальный момент (момент разделения КА) свяжем с плоскостью орбиты центра масс системы: плоскость  $OXY$  совпадает с плоскостью орбиты, ось  $OZ$  параллельна вектору кинетического момента движения центра масс системы.

Динамические уравнения уравнений Эйлера для КА имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_k = J_k^{-1} (\mathbf{M}_k - \boldsymbol{\omega}_k \cdot J_k \boldsymbol{\omega}_k) \quad (k = 1, \dots, n) \quad (3.2)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_k$ ,  $J_k$  и  $\mathbf{M}_k$  – векторы угловых скоростей, тензоры инерции и векторы моментов, действующих на  $k$ -й КА. Векторные уравнения (14) проецируются на оси главных связанных систем координат КА  $c_k x_k y_k z_k$ .

Моменты  $\mathbf{M}_k$  определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{T}_1 - \mathbf{r}_1' \cdot \mathbf{T}_n + \mathbf{M}_1^{(F)} \\ \mathbf{M}_k &= \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{T}_k - \mathbf{r}_k' \cdot \mathbf{T}_{k-1} + \mathbf{M}_k^{(F)} \quad (k = 2, \dots, n-1) \\ \mathbf{M}_n &= \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{T}_n - \mathbf{r}_n' \cdot \mathbf{T}_1 + \mathbf{M}_n^{(F)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

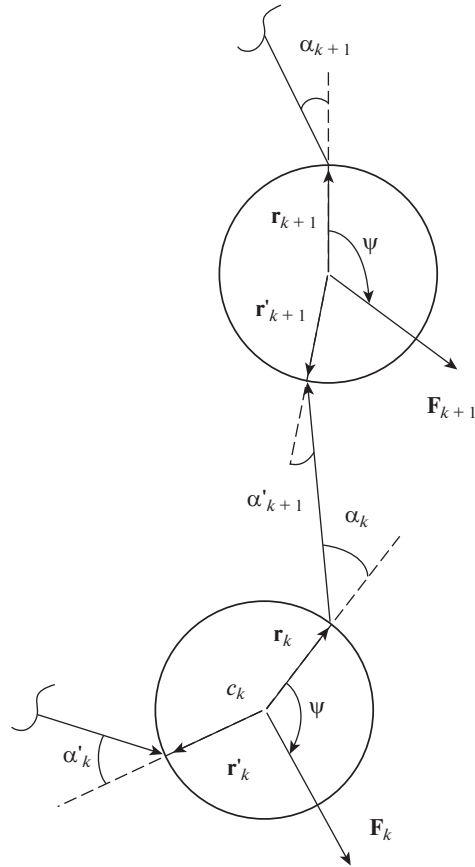


Рис. 3. Положения КА как твердых тел относительно тросов.

где  $r_k$  и  $r'_k$  – радиус-вектора точек крепления тросов относительно центров масс КА (рис. 3),  $M_k^{(F)}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) – моменты от реактивных сил, если линии их действия не проходят через центр масс КА. В динамических уравнениях (3.2) гравитационные и аэродинамические моменты не учитываются.

Положение связанных систем координат  $c_k x_k y_k z_k$  относительно геоцентрической неподвижной системы координат  $OXYZ$  определяется с помощью кинематических уравнений Эйлера–Пуассона

$$\dot{e}_{xk} = \omega_k \cdot e_{xk}, \quad \dot{e}_{yk} = \omega_k \cdot e_{yk}, \quad \dot{e}_{zk} = \omega_k \cdot e_{zk} \quad (3.4)$$

где  $e_{xk}, e_{yk}, e_{zk}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) – орты главных связанных систем координат. Запись кинематических уравнений в форме (3.4) позволяет с одной стороны избежать вычисления поправок в кинематических уравнениях, когда, например, положение КА определяется относительно подвижной системы координат, а с другой стороны при численных расчетах использовать одни и те же алгоритмы матричных вычислений для всех КА, например, при определении их положения относительно направлений тросов. Кроме того, уравнения (3.4) не имеют особенностей, свойственных кинематическим уравнениям, записанным с использованием углов Эйлера.



Зная матрицу перехода  $E_k = (\mathbf{e}_{xk}, \mathbf{e}_{yk}, \mathbf{e}_{zk})$  от системы координат  $OXYZ$  к связанным системам координат каждого КА  $c_k x_k y_k z_k$ , нетрудно определить углы между векторами  $\mathbf{r}_k, \mathbf{r}'_k$  (векторы принадлежат плоскости  $c_k x_k y_k$ ) и направлениями тросов (или векторами, соединяющими точки крепления тросов, если они не натянуты, рис. 3)

$$\alpha_k = \arccos\left(\frac{\Delta \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k}{r_k \Delta r_k}\right) \quad (k = 1, \dots, n)$$

$$\alpha'_k = \pi - \arccos\left(\frac{\Delta \mathbf{r}_{k-1} \cdot \mathbf{r}'_k}{r'_k \Delta r_{k-1}}\right), \quad (k = 2, \dots, n), \quad \alpha'_1 = \pi - \arccos\left(\frac{\Delta \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}'_1}{r'_1 \Delta r_n}\right) \quad (3.5)$$

где  $\Delta \mathbf{r}_k = \mathbf{R}_{k+1} + \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{R}_k - \mathbf{r}_k$  ( $k = 1, \dots, n-1$ ),  $\Delta \mathbf{r}_n = \mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_n - \mathbf{r}'_n$ , причем угол между векторами  $\mathbf{r}_k$  и  $\mathbf{r}'_k$  равен  $\pi - \varphi_n$ .

Для определения длин тросов  $L_k$ , выпущенных из механизмов управления, используются динамические уравнения [12, 13]

$$m_{in} \ddot{L}_k = T_k - U_k \quad (3.6)$$

где  $U_k$  – управляющие силы, тормозящие тросы;  $m_{in}$  – параметр, учитывающий инерционность механизмов управления.

Управляющие силы определяются следующим образом [13]

$$U_k = K_l (L_k - l) + K_v (\dot{L}_k - \dot{l}) \quad (3.7)$$

где  $K_l, K_v$  – коэффициенты обратной связи,  $l, \dot{l}$  – номинальные значения длины и скорости тросов, определенные в соответствии с системой уравнений (2.8). Так как управляющие механизмы работают только на торможение, поэтому если  $\dot{L}_k \leq 0$  или  $T_k \leq 0$ , то  $\dot{L}_k = \ddot{L}_k = 0$ .

Силы натяжения тросов  $\mathbf{T}_k$  определяются по закону Гука и с учетом односторонности механических связей между КА [13]

$$\mathbf{T}_k = T_k \Delta \mathbf{r}_k / \Delta r_k$$

$$T_k = \begin{cases} C \frac{\Delta r_k - L_k}{L_k}, & \Delta r_k - L_k \geq 0 \\ 0, & \Delta r_k - L_k < 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

где  $k = 1, \dots, n$ ,  $C = ES$ ,  $E$  – модуль упругости Юнга,  $S$  – площадь поперечного сечения тросов.

Предполагается, что система до разделения КА имеет некоторую угловую скорость вращения относительно центра масс  $\dot{\theta}_0$  (в численных примерах  $\dot{\theta}_0 = 0.1 \text{ c}^{-1}$ ) и процесс разделения КА происходит естественным образом посредством освобождения механических связей (тросов) под действием центробежных сил.

Система уравнений (3.1), (3.2), (3.4), (3.6) с учетом (3.3), (3.7), (3.8) описывает пространственное движение ТГКА в геоцентрической системе координат  $OXYZ$  и используется для оценки реализуемости предлагаемой номинальной программы управления, описанной выше, при действии возмущений. Следует отметить, что все перечисленные уравнения связаны между собой и интегрируются совместно, т.е. движения центров масс и относительно центров масс как КА, так и всей системы, не разделяются. При этом учитывается взаимное влияние продольных колебаний тросов и угловых колебаний КА вокруг центров масс, переменность направлений действия реактивных сил  $\mathbf{F}_k$ , связанная с движениями КА относительно своих центров масс.

**4. Результаты моделирования возмущенного движения ТГКА.** Моделирование процесса формирования ТГКА осуществлялось для многоугольников, содержащих от че-

тырех до семи вершин включительно. При проведении моделирования с использованием системы уравнений (3.1), (3.2), (3.4), (3.6) были приняты дополнительно следующие исходные данные: КА – сферы диаметром  $D = 0.4$  м, жесткость троса  $C = 7070$  Н, коэффициент инерционности механизмов управления  $m_{in} = 0.2$  кг, коэффициенты обратной связи  $K_l = 0.2$  м с<sup>-2</sup>,  $K_v = 7.8$  м с<sup>-1</sup> [13]. Как показали результаты моделирования при отсутствии дополнительных возмущений (рассматривалась лишь более полная модель движения), т.е. когда КА – идеальные однородные сферы, система до разделения КА вращается в плоскости орбиты центра масс с номинальной угловой скоростью  $\dot{\theta}_0 = 0.1$  с<sup>-1</sup>, массы КА одинаковы, во всех рассмотренных случаях многоугольники сохраняли симметричную конфигурацию и угловое движение КА относительно центров масс было ограничено (углы  $\alpha_k$  и  $\alpha'_k$  совершали малые колебания относительно своих невозмущенных значений  $\alpha_k = \alpha'_k = 0$ ) в процессе всего времени развертывания ТГКА. После этого была проведена оценка влияния на процесс формирования ТГКА возмущений, приводящих к сложному пространственному движению всей системы и отдельных КА. С этой точки зрения были рассмотрены следующие возмущения: начальная угловая скорость вращения системы до разделения КА  $\omega_{x0} = \pm 0.1$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_{y0} = \pm 0.1$  с<sup>-1</sup>; неравные массы КА  $m_k = m(1 \pm 0.05)$ ; динамическая асимметрия при задании моментов инерции КА  $(J_{yk} - J_{zk})/J_{zk} = \pm 0.1$ ; статическая асимметрия (смещение положения центра масс КА относительно геометрического центра сферы)  $\Delta y_k = \pm 0.1D$ ,  $\Delta z_k = \pm 0.1D$ . Проведенные численные расчеты показали структурную устойчивость (сохранение в процессе развертывания правильной геометрической конфигурации ТГКА) при приведенном уровне возмущений многоугольников с пятью, шестью и семью вершинами, причем колебания углов  $\alpha_k$ ,  $\alpha'_k$  также оставались ограниченными. В качестве примера на рис. 4–5 приводятся некоторые характеристики возмущенного движения ТГКА при ее формировании для  $n = 6$ . На рис. 4,a,b показаны переходные процессы для отклонений  $\Delta l = L_1 - l$ ,  $\Delta \dot{l} = \dot{L}_1 - \dot{l}$  для первого троса (для других тросов переходные процессы аналогичны). На рис. 4c показано как изменяется угловая скорость для того же троса  $\dot{\theta}_l$  (штриховая линия) по сравнению с номинальной угловой скоростью всей системы  $\dot{\theta}$ , определенной по уравнениям (2.8). На рис. 4,d приводится сравнение номинальной силы натяжения троса (сплошная жирная линия) с силой натяжения, определенной с использованием более полной математической модели в соответствии с (3.8). Когда действие реактивных сил прекращается  $t \geq t_3$ , как следует из рис. 4,d, имеют место упругие колебания силы натяжения троса. На рис. 5 показаны как изменяются характеристики углового движения первого КА: характерных углов  $\alpha_1, \alpha'_1$  (рис. 3) и угловой скорости  $\omega_{z1}$ , которая в номинальном случае должна совпадать с  $\dot{\theta}$ , определенной в соответствии с уравнениями (2.8). Рис. 5,a,c,e соответствуют случаю, когда дополнительная стабилизация углового движения КА не производится, а рис. 5,b,d,f иллюстрируют случай, когда вводится дополнительное активное управление угловым движением КА с помощью двигателей системы стабилизации, работающих в соответствии с измерениями угловых скоростей  $\omega_{xk,yk,zk}$ . Стабилизирующие КА моменты имеют вид

$$M_{x,y,z}^{(k)} = K_{\omega} \omega_{xk,yk,zk} \quad (k = 1, \dots, n) \quad (4.1)$$

где  $K_{\omega}$  – коэффициент обратной связи (в численном примере  $K_{\omega} = -0.01$ ).

Если без введения моментов (4.1) угловое движение КА из-за наличия начальных возмущений имеет сложный пространственный характер, а угловая скорость  $\omega_{z1}$  имеет большую амплитуду колебаний относительно  $\dot{\theta}$  (рис. 5,a), то после введения управ-

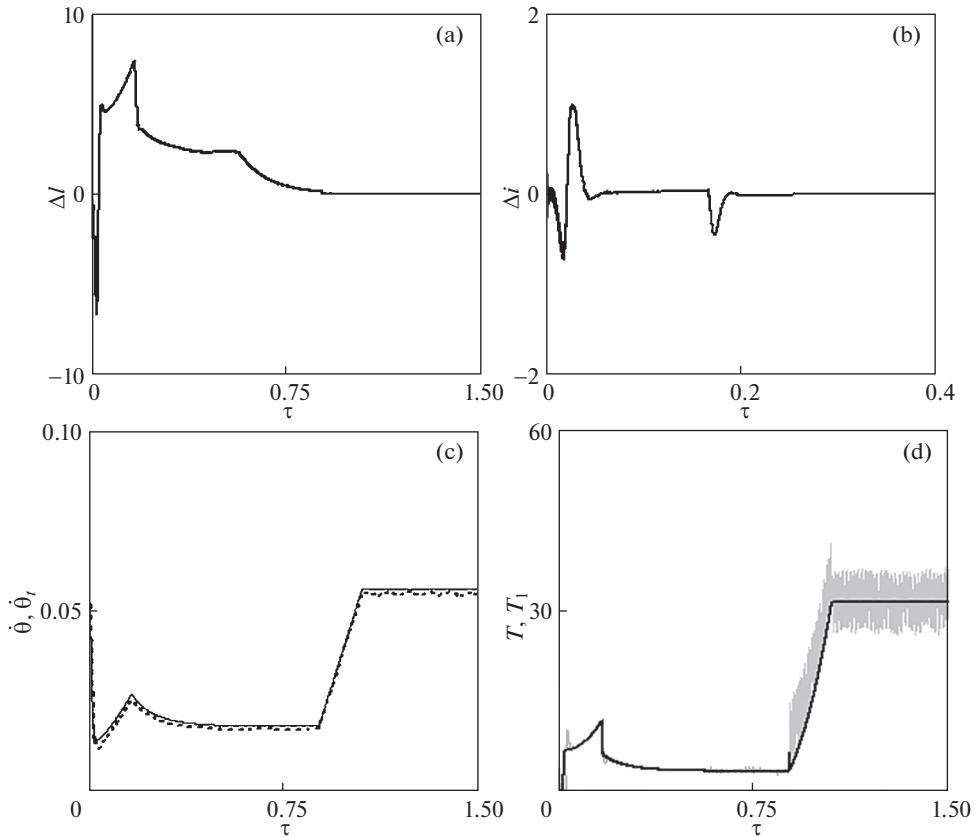


Рис. 4. Примеры зависимостей, характеризующих возмущенное движение ТГКА.

ления (4.1)  $\omega_{xk}, y_k \rightarrow 0$ ,  $\omega_{zk} \rightarrow \dot{\theta}$  (рис. 5,b), т.е. плоскости связанных систем координат  $c_k x_k y_k$  приближаются к плоскости орбиты центра масс системы. При этом амплитуды колебаний углов  $\alpha_1, \alpha_1'$  относительно своих невозмущенных значений  $\alpha_1 = \alpha_1' = 0$  уменьшаются (рис. 5,d,f). Движение центров масс всех КА относительно общего центра масс системы  $(0, 0)$  показано на рис. 6, где рис. 6,a,b соответствуют  $n = 6$ , а рис. 6,c,d –  $n = 7$  (используется более полная модель движения ТГКА, масштаб по осям в км). Как следует из проведенных численных результатов, центры масс всех КА, если их соединить прямыми, геометрически представляют собой фигуру близкую к правильному многоугольнику в каждый момент времени. Причем это справедливо независимо от того используется дополнительная стабилизация (4.1) или нет. Численное моделирование показало, что при заданном уровне возмущений ТГКА в виде четырехугольника не сохраняла свою геометрическую конфигурацию, хотя процесс регулирования выпуска тросов по скорости и длине (3.7) проходил почти идеально. В этом случае квадрат в процессе разворачивания ТГКА деформировался в ромб (рис. 7,a,b), т.е. данная конфигурация показала худшие свойства структурной устойчивости по сравнению со случаями, когда  $n = 5, 6, 7$ . Выше было отмечено, что ориентация реактивных сил по отношению к направлениям тросов должна удовлетворять определенным условиям, а именно угол  $\psi$  должен принадлежать интервалу  $\pi/2 < \psi < (\pi + \varphi_n)/2$ . Проверка данно-

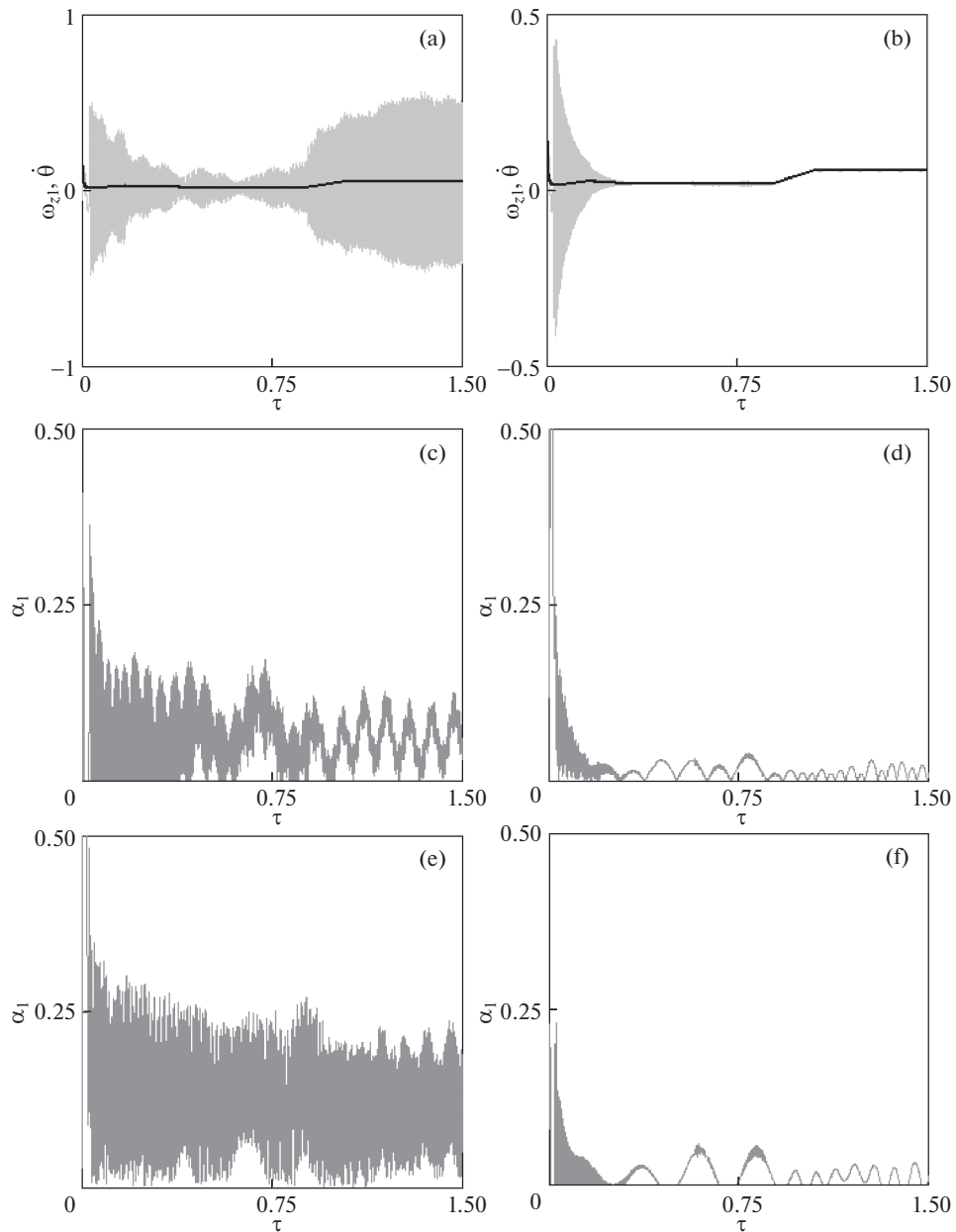


Рис. 5. Примеры зависимостей, характеризующих возмущенное угловое движение КА.

го положения была также проведена с использованием более полной модели движения ТГКА. Численное моделирование показало, что если  $\psi < \pi/2$  (нарушение верхнего ограничения не рассматривалось, так как в этом случае реактивные силы создают моменты вокруг центра масс системы другого знака), то с уменьшением угла  $\psi$  качество переходных процессов становилось хуже и в итоге тросы провисали (т.е. не были

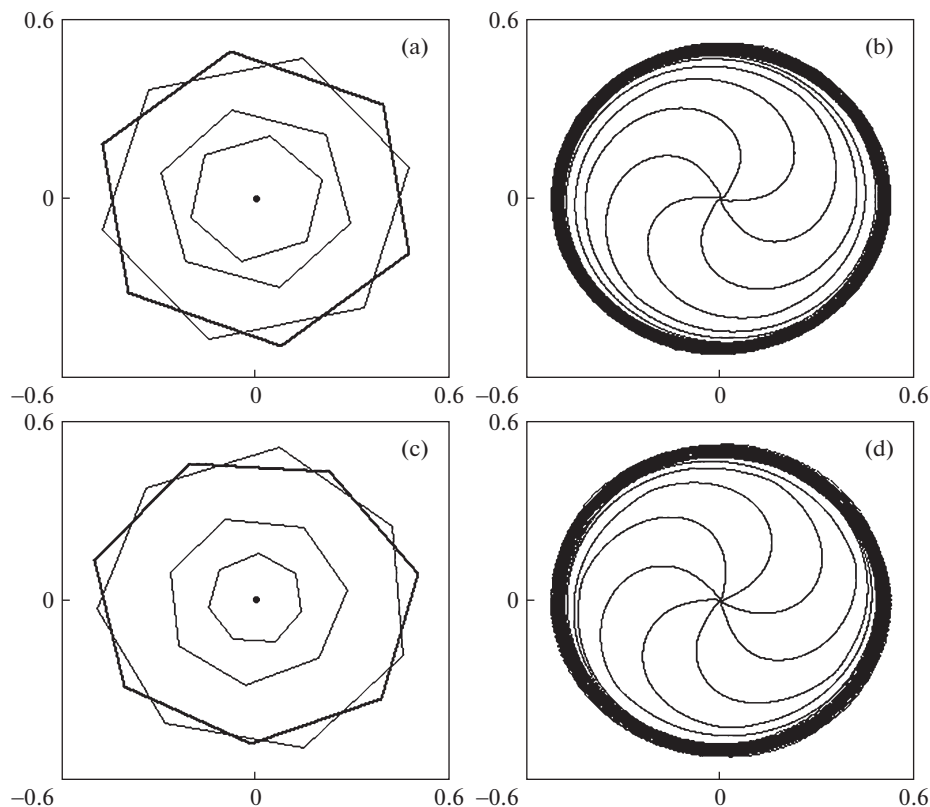


Рис. 6. Примеры движений ТГКА относительно центра масс (0.0) при их развертывании.

натянуты), и имела место сложная деформация всех рассматриваемых структур сразу после разделения КА. В качестве примера на рис. 7,с,d показано, как деформируется шестиугольник в этом случае ( $\psi = 5\pi/12$ ).

**5. Заключение.** Предложен комбинированный метод управления при формировании вращающейся ТГКА в виде правильного многоугольника, заключающийся в совместном применении двигателей малой тяги и регулирования натяжений тросов с помощью управляющих механизмов, работающих только на торможение. Построена номинальная программа управления, учитывающая ограничения на направления действия реактивных сил и на силы натяжения тросов. Возможность реализации предложенных номинальных законов управления подтверждена с помощью достаточно полной модели возмущенного пространственного движения ТГКА, учитывающей растяжимость и односторонность механических связей (тросов) между КА, которые рассматриваются как твердые тела конечных размеров, совершающие угловые колебания относительно своих центров масс. При этом рассматриваются возмущения, связанные с начальными условиями вращения системы до разделения КА, с неравенством масс КА, с массово-инерционной асимметрией КА как твердых тел, с отличием направлений действия реактивных сил от номинальных направлений, связанные с колебаниями КА относительно центров масс. Приводятся характерные результаты математического моделирования возмущенного движения ТГКА при их развертывании для многоугольников от четырех до семи вершин включительно. Установлено, что с

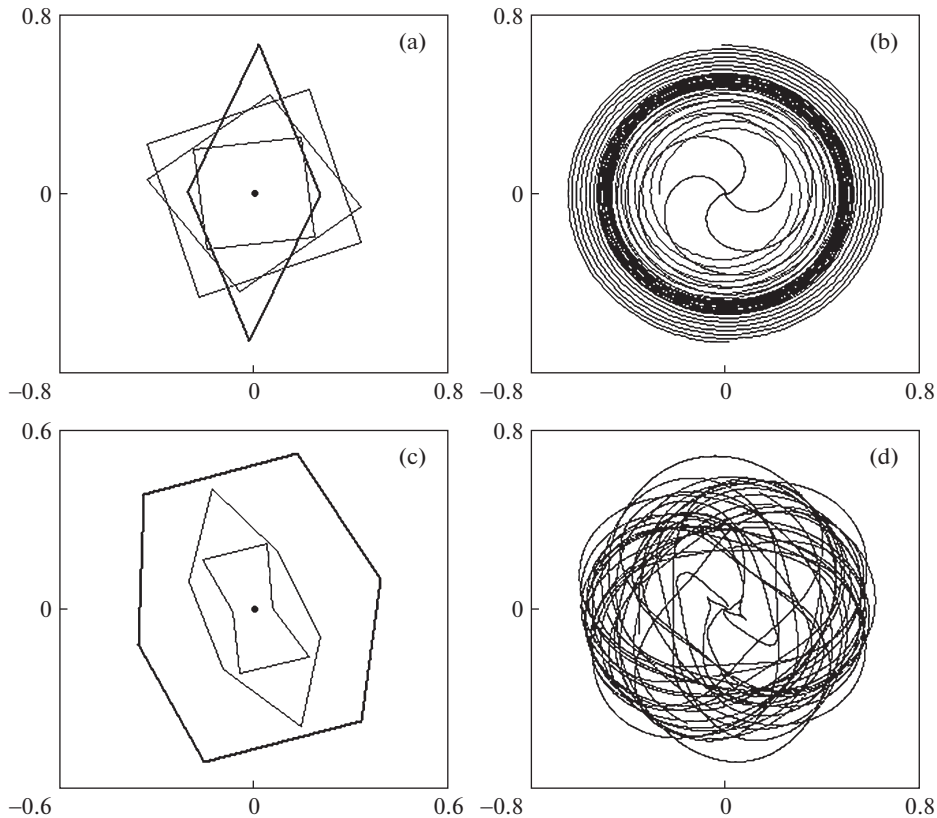


Рис. 7. Неустойчивые движения ТГКА относительно центра масс (0,0).

точки зрения действия рассматриваемых возмущений худшие свойства структурной устойчивости (сохранения заданной геометрической конфигурации) имеет ТГКА в виде квадрата, который в процессе формирования системы деформируется в ромб. Следует отметить, что в данной работе рассматривается лишь процесс формирования ТГКА многоугольной конфигурации, который занимает сравнительно небольшой промежуток времени (в численных примерах менее одного витка вокруг Земли). Устойчивость движения вращающейся ТГКА на длительных интервалах времени после формирования системы при действии традиционно учитываемых в механике полета КА возмущений, таких как нецентральность гравитационного поля, атмосферные возмущения и др. требует отдельного рассмотрения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 21-51-53002.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 336 с.
2. Kumar K.D., Yasaka T. Rotating formation flying of three satellites using tethers // J. Spacecr. 2004. V. 41. № 6. P. 973–985.  
<https://doi.org/10.2514/1.14251>

3. *Kim M., Hall C.D.* Control of a rotating variable-length tethered system // *J. Guid. Contr. Dyn.* 2004. V. 27. № 5. P. 849–858.  
<https://doi.org/10.2514/1.3226>
4. *Williams P.* Optimal deployment/retrieval of a tethered formation spinning in the orbital plane // *J. Spacecr.* 2006. V. 43. № 3. P. 638–650.  
<https://doi.org/10.2514/1.17093>
5. *Su B., Zhang F., Huang P.* Robust control of triangular tethered satellite formation with unmeasured velocities // *Acta Astronaut.* 2021. V. 186. P. 190–202.  
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.04.045>
6. *Razzaghi P., Assadian N.* Study of the Triple-Mass Tethered Satellite System under Aerodynamic Drag and J2 Perturbations // *Adv. Space Res.* 2015. V. 56 (10). P. 2141–2150.  
<https://doi.org/10.1016/J.ASR.2015.07.046>
7. *Cai Z., Li X., Wu Z.* Deployment and retrieval of a rotating triangular tethered satellite formation near libration points // *Acta Astronaut.* 2014. V. 98. P. 37–49.  
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.01.015>
8. *Cai Z., Li X., Zhou H.* Nonlinear dynamics of a rotating triangular tethered satellite formation near libration points // *Aerosp. Sci. Technol.* 2015. V. 42. P. 384–391.  
<https://doi.org/10.1016/j.ast.2015.02.005>
9. *Pizarro-Chong A., Misra A.K.* Dynamics of multi-tethered satellite formations containing a parent body // *Acta Astronaut.* 2008. V. 63. P. 1188–1202.  
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2008.06.021>
10. *Alary D., Andreev K., Boyko P. et al.* Dynamics of multi-tethered pyramidal satellite formation // *Acta Astronaut.* 2015. V. 117. P. 222–230.  
<https://doi.org/10.1016/J.ACTAASTRO.2015.08.011>
11. *Yarotsky D., Sidorenko V., Pritykin D.* Three-dimensional multi-tethered satellite formation with the elements moving along Lissajous curves // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2016. V. 125. № 3. P. 309–322.  
<https://doi.org/10.1007/s10569-016-9683-2>
12. *Ван Ч., Заболотнов Ю.М.* Анализ динамики формирования тросовой группировки из трех наноспутников с учетом их движения вокруг центров масс // *ПММ.* 2021. Т. 85. № 1. С. 21–43.  
<https://doi.org/10.31857/S0032823521010082>
13. *Заболотнов Ю.М.* Управление развертыванием орбитальной тросовой системы, состоящей из двух малых космических аппаратов // *Космич. исслед.* 2017. Т. 55. № 3. С. 236–246.  
<https://doi.org/10.7868/S002342061702008X>