ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 4, с. 97–109

УДК 539.3

ОДИН ПОДХОД К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ УДАРА ОБОЛОЧЕК ТИПА С.П. ТИМОШЕНКО ОБ УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

В. Р. Богданов[a,*]

[a] *Progressive Research Solutions Pty Ltd, Sydney, Australia*
**e-mail: vladislav_bogdanov@hotmail.com, mr.vbogdanov@gmail.com*

Поступила в редакцию 13.09.2022 г.
После доработки 15.09.2022 г.
Принята к публикации 06.10.2022 г.

В работе приводится попытка решить плоскую задачу удара упругой оболочки типа С.П. Тимошенко об упругое полупространство используя методику сведения задач динамики к решению бесконечной системы интегральных уравнений (БСИУ) Вольтерра второго рода. Показано, что такой подход не приемлем. При дискретизации редуцированной БСИУ Вольтерра второго рода получается плохо определенная система линейных алгебраических уравнений: с ростом порядка редуцирования определитель такой системы стремится в бесконечность. Это показывает ограниченность такого подхода.

Ключевые слова: удар, полупространство, плоская задача, цилиндрическая оболочка

DOI: 10.31857/S0572329923700058, **EDN:** QXYLLX

1. Введение. Подход [1–5] для решения задач динамики, заключающийся в сведении к решению бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода [6–8, 10], дает возможность определять напряженно-деформированное состояние упругих полупространства и слоя при проникании абсолютно твердых тел [1, 2, 7, 8, 10] и напряженно-деформированное состояние упругих оболочек типа Кирхгоффа–Лява и упругих полупространства и слоя при их соударении [3–6] и не позволяет так решать задачи удара упругих тел и оболочек типа С.П. Тимошенко. Кроме этого такой подход дает возможность определять неизвестные напряжения и перемещения только на поверхности основания. Это привело к целесообразности разработки других математических подходов и моделей. В [9, 11–14] разработан новый подход к решению задач удара и нестационарного взаимодействия в упругопластической математической постановке [15–19]. В нестационарных задачах действие ударника заменяется распределенной нагрузкой в области контакта, изменяющейся по линейному закону [20–22]. Решение задач для упругих оболочек [23–26], упругого полупространства [27–29], упругого слоя [30], упругого стержня [31, 32] было разработано с использованием метода функций влияния [33]. В [23] исследуется процесс нестационарного взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с упругим полупространством на так называемой “сверхзвуковой” стадии взаимодействия. Он характеризуется превышением скорости расширения области контактного взаимодействия скорости распространения волн растяжения–сжатия в упругом полупространстве. Решение было разработано с использованием функций влияния, соответствующих сосредоточенной силе или кинематическим воздействиям для упругого изотропного полупространства, которые были найдены и исследованы в [33].

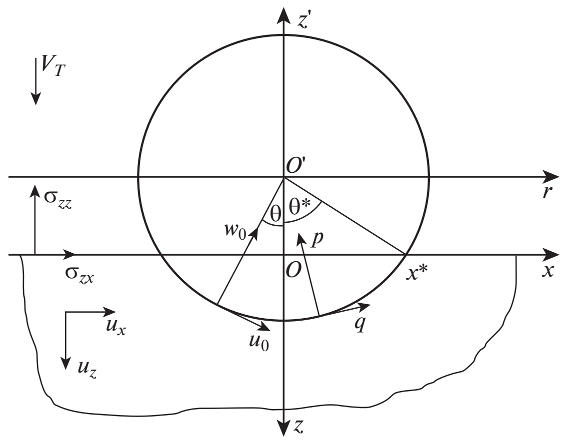

Рис. 1. Геометрическая схема задачи.

В данной работе исследуется подход [2–6] для решения плоской задачи удара цилиндрической оболочки типа С.П. Тимошенко об упругое полупространство. Уточненная модель оболочек типа С.П. Тимошенко дает возможность учитывать инерцию вращения поперечного сечения оболочки. Показано, что подход [1–5] после редуцирования бесконечной системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода [6–8, 10] и дискретизации с использованием методов Грегори для численного интегрирования и Адамса для решения задачи Коши получается плохо определенная система линейных алгебраических уравнений, у которой определитель матрицы коэффициентов неограниченно возрастает с увеличением порядка редукции.

2. Постановка задачи. Тонкая упругая круговая цилиндрическая оболочка в начальный момент времени $t = 0$ входит в соударение с упругим полупространством $z \geq 0$ по образующей своей боковой поверхности. Связываем с оболочкой, как это видно на рис. 1, подвижную цилиндрическую систему координат $r\theta z'$: θ – полярный угол, который откладывается от положительного направления оси Oz. Ось $O'y'$ совпадает с осью цилиндра. Обозначим через $u_0(t,\theta)$, $w_0(t,\theta)$ и $p(t,\theta)$, $q(t,\theta)$ тангенциальные и нормальные перемещения точек серединной поверхности оболочки и радиальные и тангенциальные составляющие распределенной внешней нагрузки, воздействующей на оболочку. С полупространством связываем неподвижную декартову систему координат xyz, так что ось Oz направлена вглубь среды, ось Ox – по недеформированной поверхности полупространства, а ось Oy – параллельна образующей цилиндра. Толщина оболочки h значительно меньше радиуса R срединной поверхности оболочки $(h/R \leq 0.05)$.

Физические свойства материала полупространства характеризуются упругими постоянными: модулем объемного расширения K, модулем сдвига μ и плотностью ρ. Под C_p, C_S, C_0 будем понимать скорости продольных и поперечных волн в упругом полупространстве, а также гипотетический параметр, имеющий размерность скорости.

Оболочка проникает (рис. 1) в упругое полупространство со скоростью $V_T(t)$, $(0 \leq t \leq T)$, начальная скорость $V_0 = V_T(0)$, где T – время взаимодействия оболочки и полупространства.

Введем безразмерные переменные:

$$
\begin{gathered}
t' = \frac{C_0 t}{R}, \quad x' = \frac{x}{R}, \quad z' = \frac{z}{R}, \quad u_t' = \frac{u_t}{R}, \quad \sigma_{ij}' = \frac{\sigma_{ij}}{K}, \quad v_T' = \frac{v_T}{C_0} \\
w_T' = \frac{w_T}{R}, \quad p' = \frac{p}{KR}, \quad q' = \frac{q}{KR}, \quad M' = \frac{M}{\rho R^2}, \quad (i, j = x, y, z) \\
\beta^2 = \frac{C_S^2}{C_0^2} = \frac{\mu}{K}, \quad \alpha^2 = \frac{C_p^2}{C_0^2} = \left(1 + \frac{4\mu}{3K}\right), \quad C_0^2 = \frac{K}{\rho}, \quad b^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{3\mu}{3K + 4\mu}
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ — вектор перемещения точек среды; σ_{zz}, σ_{xx}, σ_{xz} — не нулевые компоненты тензора напряжений среды; M — погонная масса оболочки; $v_T(t)$, $w_T(t)$ — скорость и перемещение оболочки как твердого тела. Дальше будем использовать только безразмерные величины, поэтому штрих опускаем. Упругое полупространство и оболочка находятся в состоянии плоской деформации.

Дифференциальные уравнения (типа Тимошенко С.П.), выведенные Д.В. Тарлаковским по аналогии с [стр. 87, 34], которые описывают динамику цилиндрических оболочек и учитывают сдвиг и инерцию вращения поперечного сечения, в силу (2.1) имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\gamma_0^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + (1 + a_4)\frac{\partial w_0}{\partial \theta} + a_4 \Phi - a_4 u_0 + \beta_3 q \\
\eta_0^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - (1 + a_3)\frac{\partial u_0}{\partial \theta} - a_3 w_0 + \beta_4 p \\
\gamma_0^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - a_2 \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - a_2 \Phi + a_2 u_0,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\gamma_0^2 = \frac{C_0^2}{C_{02}^2}, \quad \eta_0^2 = \frac{C_0^2}{C_{01}^2}, \quad C_{01}^2 = \frac{E_0}{(1 - \nu_0^2)\rho_0}, \quad C_{02}^2 = \frac{b_1^2 E_0}{2(1 + \nu_0)}, \quad a_2 = \frac{6(1 - \nu_0) b_1^2 R^2}{h^2} \\
b_1^2 = \frac{5}{6}, \quad a_3 = \frac{2}{(1 - \nu_0) b_1^2}, \quad a_4 = \frac{1}{a_3}, \quad \beta_3 = \frac{(1 - \nu_0^2) K^2 R}{E_0^2 h}, \quad \beta_4 = \frac{2(1 + \nu_0) K^2 R}{b_1^2 E_0^2 h}
\end{gathered}
$$

где Φ — угол поворота нормального сечения к серединной поверхности, b_1^2 — коэффициент, учитывающий распределение касательных усилий в поперечном сечении оболочки, ν_0, E_0 и ρ_0 — коэффициент Пуассона, модуль упругости Юнга и плотность материала оболочки, p и q — соответственно, радиальная и тангенциальная составляющие распределенной нагрузки, действующей на оболочку, R — радиус оболочки.

Движение упругой среды описывается скалярным потенциалом φ и ненулевой компонентой векторного потенциала ψ, которые удовлетворяют волновым уравнениям [1–8]:

$$
\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\alpha^2 \partial t^2}, \quad \Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\beta^2 \partial t^2}, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}
\tag{2.3}
$$

Физические величины выражаются через волновые потенциалы следующим образом:

$$
u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u_y = 0, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0, \quad \sigma_{xx} = \Theta - \sigma_{zz}
$$

$$\sigma_{zz} = (1 - 2b^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2\beta^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right), \quad \sigma_{xz} = 2\beta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - 2\beta^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{2.4}$$

$$\Theta = \sigma_{zz} + \sigma_{xx} = 2(1 - b^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

Рассмотрим начальную стадию процесса удара упругих оболочек о поверхность упругого полупространства, когда не возникает пластических деформаций и величина заглубления оболочки в среду мала. Задача взаимодействия упругих оболочек с упругим полупространством решается в линейной постановке, поэтому выполняем линеаризацию краевых условий [1–8, 10]: краевые условия с возмущенной поверхности сносим на не возмущенную поверхность тел, которые деформируются.

Как видно из рис. 1, проекции функций u_0, w_0, p и q на оси $O'z$ и $O'x$ определяются так:

$$\begin{gathered} pr_z w_0(t,\theta) = w_0(t,\theta)\cos\theta, \quad pr_x w_0(t,\theta) = -w_0(t,\theta)\sin\theta, \quad pr_z u_0(t,\theta) = u_0(t,\theta)\sin\theta \\ pr_x u_0(t,\theta) = u_0(t,\theta)\cos\theta, \quad pr_z p(t,\theta) = p(t,\theta)\cos\theta, \quad pr_x p(t,\theta) = -p(t,\theta)\sin\theta \\ pr_z q(t,\theta) = q(t,\theta)\sin\theta, \quad pr_x q(t,\theta) = q(t,\theta)\cos\theta \end{gathered} \tag{2.5}$$

Тогда при контакте, который происходит в условиях жесткого сцепления, в системе координат zOx перемещения u_z, u_x и напряжения σ_{zz} и σ_{zx} в поверхностных точках области контакта запишутся в виде:

$$\begin{gathered} u_z(t,x,0) = w_T(t) - f(x) - w_0(t,\theta)\cos\theta - u_0(t,\theta)\sin\theta \\ u_x(t,x,0) = -w_0(t,\theta)\sin\theta + u_0(t,\theta)\cos\theta \\ \sigma_{zz}(t,x,0) = -p(t,\theta)\cos\theta - q(t,\theta)\sin\theta, \quad \sigma_{xz}(t,x,0) = -p(t,\theta)\sin\theta + q(t,\theta)\cos\theta \end{gathered} \tag{2.6}$$

где функция $f(x)$ описывает профиль оболочки. В случае кругового цилиндра $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$.

Радиальная и тангенциальная составляющие распределенной нагрузки, действующей на оболочку, выражаются через нормальные и тангенциальные напряжения, возникающие на поверхности полупространства в зоне контакта.

$$p(t,\theta) = -\sigma_{zz}(t,x,0)\cos\theta - \sigma_{xz}(t,x,0)\sin\theta, \quad |\theta| < \theta^* \tag{2.7}$$

$$q(t,\theta) = -\sigma_{zz}(t,x,0)\sin\theta + \sigma_{xz}(t,x,0)\cos\theta, \quad |\theta| < \theta^* \tag{2.8}$$

где $2\theta^*$, как видно из рис. 1, есть величина сектора оболочки, контактирующего с полупространством.

Кинематическое условие, определяющее полуразмер области контакта $x^*(t)$ запишется следующим образом:

$$w_T(t) - f(x) - u_z(t,x,0) - w_0(t,\theta)\cos\theta - u_0(t,\theta)\sin\theta \begin{cases} = 0, & |x| \le x^*(t) \\ < 0, & |x| > x^*(t) \end{cases} \tag{2.9}$$

Предполагаем, что область контакта односвязная, а это утверждение эквивалентно тому, что нормальные к площадке контакта напряжения являются сжимающими:

$$\sigma_{zz}\big|_{z=0} < 0, \quad |x| < x^*(t) \tag{2.10}$$

На основании (2.4), граничные условия при отсутствии трения в зоне контакта можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{gathered} \left.\frac{\partial u_z}{\partial t}\right|_{z=0} \equiv V(t,x) = v_T(t) - \frac{\partial w_0(t,\theta)}{\partial t}\cos\theta - \frac{\partial u_0(t,\theta)}{\partial t}\sin\theta, \quad |x| < x^*(t) \\ \sigma_{zz}\big| = 0; \quad |x| > x^*(t), \quad \sigma_{zx}\big|_{z=0} = 0, \quad |x| < \infty \end{gathered} \tag{2.11}$$

Начальные условия для потенциалов φ и ψ – нулевые:

$$\varphi\Big|_{t=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \quad \psi\Big|_{t=0} = \frac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{2.12}$$

Для задачи удара упругой оболочки об упругое полупространство скорость и перемещение ударяющегося тела находятся из уравнения движения путем его интегрирования.

Уравнение движения центра масс оболочки в задаче удара с начальной скоростью V_0 имеет вид:

$$M\frac{d^2 w_T(t)}{dt^2} = P(t) \tag{2.13}$$

$$v_T(t)\Big|_{t=0} = V_0, \quad w_T(t)\Big|_{t=0} = 0 \tag{2.14}$$

$$P(t) = 2\int\limits_0^{x^*(t)} \sigma_{zz}(t,x,0)dx \tag{2.15}$$

Справедливо условие отсутствия возмущений перед фронтом продольных волн и условие затухания возмущений на бесконечности.

3. Методика решения. Так как процесс удара – кратковременный, область возмущений в каждый момент времени t является конечной. Ограничиваясь конечным интервалом времени взаимодействия $(0 \le t \le T)$, можно выделить область полупространства, которая к моменту времени T охватывает всю зону возмущений. С этой точки зрения для времен $(0 \le t \le T)$ упругое полупространство можно заменить упругой полуполосой $(|x| \le l;\ z \ge 0)$, до границ которой к моменту времени T не доходят возмущения.

$$l = \alpha T + x^*(T) \tag{3.1}$$

Таким образом, для времен $(0 \le t \le T)$ рассматриваемая задача сводится к нестационарной задаче для полуполосы при смешанных граничных условиях на ее торце.

На боковых гранях полуполосы выбираем, например, условия скользящей заделки:

$$u_x\Big|_{|x|=l} = 0, \quad \sigma_{zx}\Big|_{|x|=l} = 0 \tag{3.2}$$

Рассмотрим начально-краевую задачу (2.2), (2.3), (2.11)–(2.14). Представим нормальные $w_0(t,\theta)$ и тангенциальные $u_0(t,\theta)$ перемещения точек срединной поверхности оболочки и радиальные $p(t,\theta)$ и тангенциальные $q(t,\theta)$ составляющие распределенной внешней нагрузки, действующей на оболочку в виде тригонометрических рядов Фурье.

$$w_0(t,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{0n}(t)\cos(n\theta) \tag{3.3}$$

$$u_0(t,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{0n}(t)\sin(n\theta) \tag{3.4}$$

$$p(t,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)\cos(n\theta) \tag{3.5}$$

$$q(t,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\sin(n\theta) \tag{3.6}$$

$$\Phi(t,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t)\sin(n\theta) \tag{3.7}$$

Подставляя равенства (3.3)–(3.7) в систему уравнений (2.2), приравнивая коэффициенты при $\cos(n\theta)$, $\sin(n\theta)$ и применяя к полученным уравнениям преобразование Лапласа по переменной t с параметром s, приходим к соотношениям, связывающим изображения по Лапласу коэффициентов рядов (3.3)–(3.7) (здесь и далее верхний индекс "L" означает изображение по Лапласу):

$$w_{0,0}^L(s) = \frac{\beta_4 p_0^L(s)}{\eta_0^2 s^2 + a_3} \tag{3.8}$$

$$w_{0,n}^L(s) = Q_{11}^L(n,s)p_n^L(s) + Q_{12}^L(n,s)q_n^L(s) \tag{3.9}$$

$$u_{0,n}^L(s) = Q_{21}^L(n,s)p_n^L(s) + Q_{22}^L(n,s)q_n^L(s) \tag{3.10}$$

$$\Phi_n^L(s) = Q_{31}^L(n,s)p_n^L(s) + Q_{32}^L(n,s)q_n^L(s) \tag{3.11}$$

где

$$Q_{ij}^L(n,s) = \frac{\Delta_{ij}(s)}{\Delta(s)}, \quad (i = \overline{1,3};\ j = 1,2;\ n = \overline{1,\infty})$$

$$\Delta_{21}(n,s) = -\beta_4 n\left[a_2 + (1 + a_4)(\gamma_0^2 s^2 + n^2)\right]$$

$$\Delta_{22}(n,s) = \beta_3\left[(\eta_0^2 s^2 + n^2)(\gamma_0^2 s^2 + n^2) + (\eta_0^2 a_2 + \gamma_0^2 a_3)s^2 + a_3 n^2 + a_2 a_3\right]$$

$$\Delta_{11}(n,s) = \beta_4\left[(\gamma_0^2 s^2 + n^2)(\gamma_0^2 s^2 + n^2) + a_2 + a_4\right]$$

$$\Delta_{12}(n,s) = -\beta_3 n\left[(1 + a_3)(\gamma_0^2 s^2 + n^2) + a_2 a_3\right]$$

$$\Delta_{31}(n,s) = \beta_4 a_2\left[n(\gamma_0^2 s^2 + n^2) - 1\right], \quad \Delta_{32}(n,s) = \beta_3 a_2\left[\eta_0^2 s^2 + a_3(1 - n^2)\right]$$

$$\Delta(s) = \eta_0^2\gamma_0^4\left[s^6 + A_a s^4 + B_b s^2 + C_c\right], \quad A_a = ((2\eta_0^2 + \gamma_0^2)n^2 + a_3\gamma_0^2 + a_4\eta_0^2)/(\eta_0^2\gamma_0^2)$$

$$B_b = ((\eta_0^2 + 2\gamma_0^2)n^4 + ((a_3 - 2)\gamma_0^2 + a_4\eta_0^2)n^2 + a_2(\eta_0^2\gamma_0^2 + a_3\gamma_0^2 - a_4\eta_0^2) + \gamma_0^2)/(\eta_0^2\gamma_0^4)$$

$$C_c = (n^6 - 2n^4 + (a_2\eta_0^2 + 1)n^2 + a_3 a_4\eta_0^2)/(\eta_0^2\gamma_0^4)$$

Тогда применяя к (3.8)–(3.11) обратное преобразование Лапласа, по теореме о свертке оригиналов двух функций имеем:

$$\dot{w}_{0,0}(t) = \frac{\beta_4}{\eta_0^2}\int_0^t p_0(\tau)\cos\frac{t-\tau}{\eta_0(a_4)^{1/2}}d\tau \tag{3.12}$$

$$\dot{w}_{0,n}(t) = \int_0^t p_n(\tau)Q_{11}(n,t-\tau)d\tau + \int_0^t q_n(\tau)Q_{12}(n,t-\tau)d\tau \tag{3.13}$$

$$\dot{u}_{0,n}(t) = \int_0^t p_n(\tau)Q_{21}(n,t-\tau)d\tau + \int_0^t q_n(\tau)Q_{22}(n,t-\tau)d\tau \tag{3.14}$$

$$\dot{\Phi}_n(t) = \int_0^t p_n(\tau)Q_{31}(n,t-\tau)d\tau + \int_0^t q_n(\tau)Q_{32}(n,t-\tau)d\tau, \quad (n = \overline{1,\infty}) \tag{3.15}$$

где

$$Q_{ij}(n,t) = 4\left[(\Delta_r R_{ij} + \Delta_i I_{ij})\mathrm{ch}(r_0 t)\cos(\sigma_0 t) + (\Delta_i R_{ij} - \Delta_r I_{ij})\mathrm{sh}(r_0 t)\sin(\sigma_0 t)\right] \Big/ (\Delta_r^2 + \Delta_i^2) + \\ + \frac{2\Delta_{ij}(n, s_1^2)(\mathrm{H}(s_1^2)\mathrm{ch}(s_1 t) + \mathrm{H}(-s_1^2)\cos(s_1 t))}{\Delta'(s_1^2)}$$

$$R_{11} = \beta_4\left[\gamma_0^4 r_1 + \gamma_0^2(2n^2 + a_2 + a_4)r_2 + n^2(n^2 + a_2 + a_4)\right]$$

$$I_{11} = \beta_4\left[\gamma_0^4\sigma_1 + \gamma_0^2(2n^2 + a_2 + a_4)\sigma_2\right]$$

$$R_{22} = \beta_3\left[\eta_0^2\gamma_0^2 r_1 + ((\gamma_0^2 + \eta_0^2)n^2 + \eta_0^2 a_2 + \gamma_0^2 a_3)r_2 + n^2(n^2 + a_3) + a_2 a_3\right]$$

$$I_{22} = \beta_3\left[\eta_0^2\gamma_0^2\sigma_1 + ((\gamma_0^2 + \eta_0^2)n^2 + \eta_0^2 a_2 + \gamma_0^2 a_3)\sigma_2\right]$$

$$R_{12} = -\beta_3 n\left[(1 + a_3)(\gamma_0^2 r_2 + n^2) + a_2 a_3\right], \quad I_{12} = -\beta_3 n(1 + a_3)\gamma_0^2\sigma_2, \quad I_{21} = -\beta_4 n(1 + a_4)\gamma_0^2\sigma_2$$

$$R_{21} = -\beta_4 n\left[(1 + a_4)(\gamma_0^2 r_2 + n^2) + a_2\right]$$

$$\Delta_r = \eta_0^2\gamma_0^4\left[6r_1 + 4A_a r_2 + 2B_b\right], \quad \Delta_i = \eta_0^2\gamma_0^4\left[6\sigma_1 + 4A_a\sigma_2\right]$$

$$\Delta'(s) = \eta_0^2\gamma_0^4\left[6s^4 + 4A_a s^2 + 2B_b\right]$$

Здесь $\mathrm{H}(x)$ – единичная функция Хевисайда, выражения s_1, r_i, σ_i ($i = 1; 2$) определяются из решения Кардано [стр. 43, 35].

$$w_{0,0}(t) = \frac{\beta_4(a_4)^{1/2}}{\eta_0}\int_0^t p_0(\tau)\sin\frac{t-\tau}{\eta_0(a_4)^{1/2}}d\tau$$

$$w_{0,n}(t) = \int_0^t p_n(\tau)\tilde{Q}_{11}(n, t-\tau)d\tau + \int_0^t q_n(\tau)\tilde{Q}_{12}(n, t-\tau)d\tau \tag{3.16}$$

$$u_{0,n}(t) = \int_0^t p_n(\tau)\tilde{Q}_{21}(n, t-\tau)d\tau + \int_0^t q_n(\tau)\tilde{Q}_{22}(n, t-\tau)d\tau \tag{3.17}$$

$$\Phi_n(t) = \int_0^t p_n(\tau)\tilde{Q}_{31}(n, t-\tau)d\tau + \int_0^t q_n(\tau)\tilde{Q}_{32}(n, t-\tau)d\tau, \quad (n = \overline{1,\infty}) \tag{3.18}$$

где

$$\tilde{Q}_{ij}(n,t) = 4\left[(\delta_r R_{ij} + \delta_i I_{ij})\mathrm{sh}(r_0 t)\cos(\sigma_0 t) + (\delta_i R_{ij} - \delta_r I_{ij})\mathrm{ch}(r_0 t)\sin(\sigma_0 t)\right] \Big/ \left(\delta_r^2 + \delta_i^2\right) + \\ + \frac{2\Delta_{ij}(n, s_1^2)\left(\mathrm{H}(s_1^2)\mathrm{sh}(s_1 t) + \mathrm{H}(-s_1^2)\sin(s_1 t)\right)}{s_1\Delta'(s_1^2)}, \quad \delta_r = r_0\Delta_r - \sigma_0\Delta_i, \quad \delta_i = \sigma_0\Delta_r + r_0\Delta_i$$

Применим к системе уравнений (2.3) преобразование Лапласа по переменной t (s – параметр преобразования) и метод Фурье разделения переменных [1–5], учитывая четность по x потенциала φ и нечетность ненулевой компоненты векторного потенциала ψ, и потребуем удовлетворение условий (2.16)–(2.17). Тогда в пространстве трансформант Лапласа получим следующие представления для волновых потенциалов [7, 8, 10]:

$$
\begin{aligned}
\varphi^L(s,x,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)\exp\left(-z\sqrt{\frac{s^2}{\alpha^2}+\lambda_n^2}\right)\cos\lambda_n x \\
\psi^L(s,x,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s)\exp\left(-z\sqrt{\frac{s^2}{\beta^2}+\lambda_n^2}\right)\sin\lambda_n x
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

где $\lambda_n = n\pi/l$, $(n = \overline{1,\infty})$ – собственные числа задачи, которые соответствуют условию скользящей заделки (3.3).

В (3.25) $A_n(s)$ и $B_n(s)$ определяются из граничных условий. Из представлений (3.19) и соотношений (2.4) следует, что искомые функции на поверхности полупространства представляются в виде рядов по системе собственных функций задачи.

$$u_z(t,x,0) = \sum_{n=0}^{¥} u_{zn}(t)\cos\lambda_n x \tag{3.20}$$

$$u_x(t,x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{xn}(t)\sin\lambda_n x \tag{3.21}$$

$$\sigma_{zz}(t,x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{zn}(t)\cos\lambda_n x \tag{3.22}$$

$$\sigma_{zx}(t,x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{zxn}(t)\sin\lambda_n x \tag{3.23}$$

Так же, как в [1–5] определяется зависимость между гармониками вертикальной составляющей скорости и нормальных напряжений на поверхности полупространства [6–8, 10]:

$$\sigma_{zn}(t) = -\alpha\left(V_n(t) + \int_0^t V_n(\tau)F(t-\tau)d\tau\right) \tag{3.24}$$

где

$$
\begin{aligned}
F_n(t) = -\alpha\lambda_n J_1(\alpha\lambda_n t) + 2b\beta\lambda_n \Big\{&\beta^2\lambda_n^2 t^2(\bar{J}_0(\alpha\lambda_n t) - \bar{J}_0(\beta\lambda_n t) - J_1(\alpha\lambda_n t) + J_1(\beta\lambda_n t)) + \\
&+ \beta\lambda_n\, t(bJ_0(\alpha\lambda_n t) - J_0(\beta\lambda_n t)) + (2-b^2)\bar{J}_0(\alpha\lambda_n t) - \bar{J}_0(\beta\lambda_n t)\Big\}
\end{aligned}
$$

Здесь $J_0(t)$, $J_1(t)$ – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно, а функцию $\bar{J}_0(t)$ определим так: $\bar{J}_0(t) = \int_0^t J_0(\tau)d\tau$.

Далее, удовлетворим смешанным граничным условиям (2.11). Из (2.11), (3.24) и получим следующее представление для вертикальной составляющей скорости на поверхности полупространства:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} V_n(t)\cos\lambda_n x &= \mathrm{H}(x^* - |x|)\{v_T(t) - \dot{w}_0(t,\theta)\cos\theta - \dot{u}_0(t,\theta)\sin\theta\} - \\
&- \mathrm{H}(|x| - x^*)\sum_{n=0}^{\infty}\cos\lambda_n x\int_0^t V_n(\tau)F_n(t-\tau)d\tau
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Подставляя (3.4) и (3.5) в (3.25) с учетом $x = \sin\theta$, вытекающим из геометрических соображений в области контакта, и представляя обе части (3.25) в виде рядов по $\cos\lambda_n x$, получим бесконечную систему интегральных уравнений (БСИУ) Вольтерра второго рода (3.26) относительно неизвестных гармоник скорости на поверхности полупространства ($n = \overline{0, \infty}$):

$$V_n(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}^{(1)}(x^*) \int_0^t V_m(\tau) F_m(t-\tau) d\tau + \sum_{m=0}^{\infty} \left[\alpha_{mn}^{(2)}(x^*) \dot{w}_{0m}(t) + \alpha_{mn}^{(3)}(x^*) \dot{u}_{0m}(t) \right] \times \\ \times \int_0^t V_m(\tau) F_m(t-\tau) d\tau = C_n(x^*) v_T(t) \tag{3.26}$$

где

$$\alpha_{mn}^{(1)}(x^*) = \frac{1}{N_n^2} \int_{x^*}^{l} \cos\lambda_m x \cos\lambda_n x dx, \quad \alpha_{mn}^{(2)}(x^*) = \frac{1}{N_n^2} \int_0^{x^*} \sqrt{1-x^2} D_{1m}(x) \cos\lambda_n x dx$$

$$\alpha_{mn}^{(3)}(x^*) = \frac{1}{N_n^2} \int_0^{x^*} x B_{1m}(x) \cos\lambda_n x dx, \quad C_n(x^*) = \frac{1}{N_n^2} \int_0^{x^*} \cos\lambda_n x dx, \quad N_n^2 = \int_0^{l} \cos^2\lambda_n x dx$$

$$D_{1m}(x) = \cos(m\pi/2) T_m(x) + \sin(m\pi/2) U_m(x)$$

$$B_{1m}(x) = \sin(m\pi/2) T_m(x) - \cos(m\pi/2) U_m(x)$$

Здесь $T_m(x)$ и $U_m(x)$ — полиномы Чебышева первого и второго рода.

Функции $\dot{w}_{0m}(t)$, $\dot{u}_{0m}(t)$ и $\dot{\Phi}_n(t)$ определяются из соотношений (3.12)–(3.15), однако в них фигурируют неизвестные функции $p_n(t)$ и $q_n(t)$. Займемся их исключением, для этого используем условия (2.7), (2.8), которые можно переписать, используя (3.24) в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) \cos n\theta = \alpha \mathrm{H}(\theta^* - |\theta|) \cos\theta \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\lambda_n \sin\theta) \left(V_n(t) + \int_0^t V_n(\tau) F_n(t-\tau) d\tau \right) \tag{3.27}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n(t) \sin n\theta = \alpha \mathrm{H}(\theta^* - |\theta|) \sin\theta \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\lambda_n \sin\theta) \left(V_n(t) + \int_0^t V_n(\tau) F_n(t-\tau) d\tau \right) \tag{3.28}$$

Используя ортогональность функций $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$, получим соотношения, устанавливающие связь между гармониками разложений в ряды функций p, q и V:

$$p_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{mn}^{(1)}(\theta^*) \left(V_m(t) + \int_0^t V_m(\tau) F_m(t-\tau) d\tau \right) \tag{3.29}$$

$$q_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_{mn}^{(2)}(\theta^*) \left(V_m(t) + \int_0^t V_m(\tau) F_m(t-\tau) d\tau \right) \tag{3.30}$$

где

$$\gamma_{mn}^{(1)}(\theta^*) = \frac{\alpha}{\bar{N}_n^2} \int_0^{\theta^*} \cos\theta \cos n\theta \cos(\lambda_m \sin\theta) d\theta$$

$$\gamma_{mn}^{(2)}(\theta^*) = \frac{\alpha}{\tilde{N}_n^2} \int_0^{\theta^*} \sin\theta \sin n\theta \cos(\lambda_m \sin\theta) d\theta$$

$$\bar{N}_n^2 = \int_0^{\pi} \cos^2 n\theta d\theta, \quad \tilde{N}_n^2 = \int_0^{\pi} \sin^2 n\theta d\theta$$

Таким образом, окончательный вид разрешающей БСИУ Вольтерра второго рода будет следующий:

$$
\begin{gathered}
V_n(t)+\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{mn}^{(1)}(x^*)\int_0^t V_m(\tau)F_m(t-\tau)d\tau+\\
+\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{mn}^{(2)}(x^*)\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t\gamma_{km}^{(1)}(\theta^*(\tau))\left(V_k(\tau)+\int_0^\tau V_k(\xi)F_k(\tau-\xi)d\xi\right)Q_{11}(m,t-\tau)d\tau+\\
+\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{mn}^{(2)}(x^*)\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t\gamma_{km}^{(2)}(\theta^*(\tau))\left(V_k(\tau)+\int_0^\tau V_k(\xi)F_k(\tau-\xi)d\xi\right)Q_{12}(m,t-\tau)d\tau+\\
+\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{mn}^{(3)}(x^*)\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t\gamma_{km}^{(1)}(\theta^*(\tau))\left(V_k(\tau)+\int_0^\tau V_k(\xi)F_k(\tau-\xi)d\xi\right)Q_{21}(m,t-\tau)d\tau+\\
+\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_{mn}^{(3)}(x^*)\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t\gamma_{km}^{(2)}(\theta^*(\tau))\left(V_k(\tau)+\int_0^\tau V_k(\xi)F_k(\tau-\xi)d\xi\right)Q_{22}(m,t-\tau)d\tau=\\
=C_n(x^*)v_T(t).\quad (n=\overline{0,\infty})
\end{gathered}
\tag{3.31}
$$

Для решения задачи, когда скорость проникания оболочки $v_T(t)$ – наперед заданная функция, достаточно численно реализовать уравнения (3.31).

Выражение для силы реакции упругого полупространства (2.15), используя (3.24) перепишем в виде:

$$
P(t)=-2\int_0^{x^*(t)}\sigma_{zz}(t,x,0)dx=2\alpha\left\{v_T(t)x^*(t)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n x^*}{\lambda_n}\int_0^t V_n(\tau)F_n(t-\tau)d\tau\right\}
\tag{3.32}
$$

Уравнение движения оболочки (2.13) с начальными условиями принимает вид:

$$
M\frac{dv_T(t)}{dt}=-2\alpha\left\{v_T(t)x^*(t)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n x^*}{\lambda_n}\int_0^t V_n(\tau)F_n(t-\tau)d\tau\right\}
\tag{3.33}
$$

Для решения задачи удара с начальной скоростью V_0, систему уравнений (3.32) необходимо дополнить уравнением движения (3.33).

Область контакта определяется с учетом подъема среды из условия:

$$
\begin{gathered}
\delta_{1j}v_T t+\delta_{2j}\int_0^t v_T(\tau)d\tau-f(x^*)-\sum_{n=0}^{\infty}\cos\lambda_n x^*\int_0^t V_n(\tau)d\tau-\\
-\sqrt{1-x^{*2}}\sum_{n=0}^{\infty}\cos(n\arcsin x^*)\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^t[\gamma_{mn}^{(1)}(\arcsin x^*(\tau))\tilde{G}_{11}(n,t-\tau)+\\
+\gamma_{mn}^{(2)}(\arcsin x^*(\tau))\tilde{G}_{12}(n,t-\tau)]\left(V_m(\tau)+\int_0^\tau V_m(\xi)F_m(\tau-\xi)d\xi\right)d\tau-\\
-x^*\sum_{n=0}^{\infty}\sin(n\arcsin x^*)\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^t\Big[\gamma_{mn}^{(1)}(\arcsin x^*(\tau))\tilde{G}_{21}(n,t-\tau)+\\
+\gamma_{mn}^{(2)}(\arcsin x^*(\tau))\tilde{G}_{22}(n,t-\tau)\Big]\left(V_m(\tau)+\int_0^\tau V_m(\xi)F_m(\tau-\xi)d\xi\right)d\tau\begin{cases}=0, & |x|<x^*(t)\\ <0, & |x|>x^*(t)\end{cases}
\end{gathered}
\tag{3.34}
$$

здесь $\delta_{ij}=\{0$, если $i\neq j$; 1, если $i=j\}$ – символ Кронекера. Индекс $j=1$ соответствует случаю, когда тело проникает в среду со скоростью, изменяющейся по наперед заданному закону (постановка 1); если скорость проникающего тела известна только в начальный момент времени $t=0$, а в последующие моменты определяется из уравнения движения (постановка 2), тогда $j = 2$. Если в соотношении (3.34) исключить четвертое слагаемое, то получим условие, из которого определяется граница области контакта без учета подъема среды.

4. Численная реализация. Для расчетов были выбраны стальная оболочка и алюминиевое и стальное полупространства. Порядок редукции N БСИУ Вольтерра второго рода будем выбирать из соображений практической сходимости. Для сглаживания осцилляций, возникающих при суммировании конечного числа членов ряда, а также явлений Гиббса вблизи точек слабого разрыва, применялась операция усреднения, определенная в [1–5], состоящая, в случае суммы конечного числа членов тригонометрического ряда, к почленному умножению членов конечной суммы на σ_n – множители Ланцоша (4.1) [7, 8, 10].

$$\sigma_n = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = 0 \\ \dfrac{\sin(n\pi/N)}{n\pi/N}, & \text{если} \quad n \neq 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Для вычисления интегралов применялся метод механических квадратур, в частности симметричная квадратурная формула Грегори для равноотстоящих узлов. Задача Коши для дифференциального уравнения (3.33) решалась методом Адамса (формулы замкнутого типа) [1–5] порядка m_1 с локальной ошибкой усечения $O(\Delta t^{m_1+1})$ [6–8, 10]. В результате дискретизации получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Расчеты показали, что с увеличением порядка редукции N определитель матрицы СЛАУ неограниченно увеличивается. СЛАУ является плохо определенной: при стремлении в бесконечность порядка редукции N значение определителя матрицы СЛАУ тоже стремится в бесконечность. Это происходит из-за того, что по параметру n ядра $Q_{11}(n,t)$, $Q_{22}(n,t)$ в (3.19), (3.20) имеют асимптотику $\exp(O(n))$, а $\tilde{Q}_{11}(n,t)$ и $\tilde{Q}_{22}(n,t)$ в (3.22) и (3.23) имеют асимптотику $O(1/n)\exp(O(n))$. Методы регуляризации Тихонова и ортогональных многочленов не дают возможности нейтрализовать такую экспоненциальную особенность. Подход [1–5] для решения задач динамики не дает возможности исследовать удар упругих оболочек типа С.П. Тимошенко и упругих тел об упругое основание [6–8, 10]. Кроме этого, этот подход дает возможность определять напряженно деформированное состояние только на поверхности среды, в которую проникает ударник.

Заключение. В результате попытки решить плоскую задачу удара цилиндрической оболочки типа С.П. Тимошенко о поверхность упругого полупространства, применяя методику [1–5], была выявлена ограниченность этой методики. Данная методика не позволяет решать плоские задачи динамики для уточненных оболочек типа С.П. Тимошенко и упругих тел.

Удобно и целесообразно использовать методику [1–8, 10] для решения задач динамики для калибровки вычислительного [1] процесса в упругопластической постановке на упругом этапе, которая применялась для решения [9, 11–14] задач удара и нестационарного взаимодействия [15–22].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богданов В.Р.* Impact a circular cylinder with a flat on an elastic layer // Transfer of Innovative Technologies. 2018. V. 1 (2). P. 68–74. https://doi.org/10.31493/tit1812.0302
2. *Богданов В.Р.* Impact of a hard cylinder with flat surface on the elastic layer // Underwater Technologies. 2017. V. 5. P. 8–15.
3. *Богданов В.Р., Левицкая Е.Р., Приходько Т.Б., Радзивил Е.Ю., Самборская Л.Р.* Дослідження плоского удару оболонки об пружний шар // Вісник Національного транспортного університету. 2009. № 19. С. 283–292.

4. *Кубенко В.Д., Богданов В.Р.* Плоская задача удара оболочек об упругое полупространство // Прикл. механика. 1995. 31. № 6. С. 78–86.
5. *Кубенко В.Д., Богданов В.Р.* Осесимметричная задача удара оболочек об упругое полупространство // Прикл. механика. 1995. Т. 31. № 10. С. 56–63.
6. *Кубенко В.Д., Попов С.Н., Богданов В.Р.* Удар упругой цилиндрической оболочки о поверхность упругого полупространства // Доповіді НАН України. 1995. № 7. С. 40–44.
7. *Кубенко В.Д., Попов С.Н.* Плоская задача удара жесткого затупленного тела о поверхность упругого полупространства // Прикл. механика. 1988. Т. 24. № 7. С. 69–77.
8. *Попов С.Н.* Вертикальный удар жесткого кругового цилиндра боковой поверхностью об упругое полупространство // Прикл. механика. 1989. Т. 25. № 12. С. 41–47.
9. *Богданов В.Р., Сулим Г.Т.* Определение вязкости разрушения материала с использованием расчета пространственного упругопластического динамического деформирования // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 2. С. 87–99.
10. *Богданов В.Р.* Плоска задача про удар жорсткого циліндра об пружний шар // Вісник Киевск. нац. унив. Мех. Мат. 2015. № 34. С. 42–47.
11. *Богданов В.Р., Сулим Г.Т.* Плоская деформация упругопластического материала с профилем формы компактного образца (динамическое нагружение) // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 3. С. 111–120.
12. *Богданов В.Р., Сулим Г.Т.* Моделирование роста пластических деформаций при ударе на основе численного решения задачи плоского напряженного состояния // Вестник МАИ. 2013. Т. 20. № 3. С. 196–201.
13. *Богданов В.Р.* Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини // Вісник Київського ун-ту. 2009. № 2. С. 51–56.
14. *Богданов В.Р., Сулим Г.Т.* Плоский деформований стан матеріалу з нерухомою тріщиною із врахуванням процесу розвантаження // Математичні методи і фізико механічні поля. Львів. 2012. 55. № 3. С. 132–138.
15. *Богданов В.Р., Сулим Г.Т.* Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружнопластичною моделлю плоского напруженого стану // Вісник Київського нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. 2010. № 4. С. 51–54.
16. *Богданов В.Р., Сулим Г.Т.* Моделювання руху тріщини на основі числового розв'язування задачі плоского напруженого стану // Вісник Львівського нац. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. 2010. Вип. 73. С. 192–204.
17. *Bohdanov V.R., Sulym H.T.* Evaluation of crack resistance based on the numerical modelling of the plane strained state // Mater. Sci. 2011. V. 46. № 6. P. 723–734. https://doi.org/10.1007/s11003-011-9346-0
18. *Богданов В.Р., Сулим Г.Т.* Моделирование подрастания трещины на основе численного решения задачи плоского деформированного состояния // Зб. наукових праць "Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій". Дніпропетровськ. 2011. № 15. С. 33–44.
19. *Богданов В.Р., Сулим Г.Т.* Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання тривимірної динамічної задачі // Международный научно-технический сборник "Надежность и долговечность машин и сооружений". 2010. № 33. С. 153–166.
20. *Богданов В.Р., Сулим Г.Т.* Просторове моделювання процесу підростання тріщини на основі числового розв'язування Зб. наукових праць "Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій". Дніпропетровськ. 2012. № 19. С. 10–19.
21. *Богданов В.Р., Сулим Г.Т.* Моделювання руху тріщини у компактному зразку на основі числового розв'язування просторової задачі // Збірник наукових праць "Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла". Дніпропетровськ. 2012. № 13. С. 60–68.
22. *Богданов В.Р.* О пространственной деформации упругопластического материала с профилем формы компактного образца // Теоретическая и прикладная механика. Донецьк. 2011. № 3 (49). С. 51–58.
23. *Федотенков Г.В.* Удар цилиндрической оболочки по упругой полуплоскости. М.: МАИ, 2001. 100 с.
24. *Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек // Ученые записки Казанского университета. Серия физ.-мат. науки. 2018. 160. № 3. С. 561–577.

25. *Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Скопинцев П.Д., Федотенков Г.В.* Нестационарное напряженно-деформированное состояние композитной цилиндрической оболочки // Механика композиционных материалов и конструкций. 2020. 26. № 4. С. 544–559. https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2020.26.04.544_559.08
26. *Вестяк А.V., Игуменов Л.А., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Воздействие нестационарного давления на тонкую сферическую оболочку с упругим заполнителем // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9. № 4. С. 443–452. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.37
27. *Афанасьева О.А., Михайлова Е.Ю., Федотенков Г.В.* Произвольный этап нестационарного контактного взаимодействия сферической оболочки и упругого полупространства // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 2012. № 20. С. 19–26.
28. *Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства // Труды МАИ. 2014. № 78. С. 1–26.
29. *Игуменов Л.А., Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Плоская нестационарная задача о движении поверхностной нагрузки по упругому полупространству // Мат. методи фіз.-мех. поля. 2013. Т. 56. № 2. С. 157–163.
30. *Кузнецова Е.Л., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В., Медведский А.Л.* Воздействие нестационарной распределенной нагрузки на поверхность упругого слоя // Труды МАИ. 2013. № 71. С. 1–21.
31. *Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A.* Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam // Lobachevskii J. Math. 2019. 40. № 4. P. 439–447. https://doi.org/10.1134/S1995080219040061
32. *Vahterova Y.A., Fedotenkov G.V.* The inverse problem of recovering an unsteady linear load for an elastic rod of finite length // J. Appl. Eng. Sci. 2020. 18. № 4. P. 687–692. https://doi.org/10.5937/jaes0-28073
33. *Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука, 1995. 352 с.
34. *Сагомонян А.Я.* Удар и проникание тел в жидкость. М.: МГУ, 1986. 169 с.
35. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). 4-е издание. М.: Наука, 1977. 830 с. = *Korn G., Korn T.* Mathematical handbook: For scientists and engineers. N.Y.: McGraw Hill, 1968