

УДК 629.7

УПРАВЛЕНИЕ РАЗВОРОТОМ ТВЕРДОГО ТЕЛА (КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА) С КОМБИНИРОВАННЫМ КРИТЕРИЕМ ОПТИМАЛЬНОСТИ НА ОСНОВЕ КВАТЕРНИОНОВ

© 2023 г. М. В. Левский^{a,*}

^a Научно-исследовательский институт космических систем им. А.А. Максимова –
филиал Государственного космического научно-производственного центра им. М.В. Хруничева,
Королев, Россия

*e-mail: levskii1966@mail.ru

Поступила в редакцию 22.05.2022 г.

После доработки 30.08.2022 г.

Принята к публикации 19.10.2022 г.

Изучается динамическая задача оптимального разворота твердого тела (например, космического аппарата) из произвольного начального в назначенное конечное угловое положение при наличии ограничений на управляющие переменные. Время разворота не фиксировано. Для оптимизации программы управления вращением применяется комбинированный критерий качества, минимизируемый функционал объединяет в заданной пропорции энергетические затраты и длительность маневра. На основе принципа максимума Л.С. Понтрягина и кватернионных моделей управляемого движения твердого тела получено решение поставленной задачи. Условия оптимальности переориентации записаны в аналитической форме, и раскрыты свойства оптимального вращения. Для построения оптимальной программы вращения записаны формализованные уравнения и расчетные формулы. Оптимальное управление представлено в форме синтеза. Закон управления сформулирован в виде явной зависимости управляющих переменных от фазовых координат. Приведены аналитические уравнения и соотношения для нахождения оптимального движения. Даны ключевые соотношения, определяющие оптимальные значения параметров алгоритма управления вращением. Также описана конструктивная схема решения краевой задачи принципа максимума для произвольных условий разворота (начального и конечного положений и моментов инерции твердого тела). Для динамически симметричного твердого тела получено решение задачи переориентации в замкнутой форме. Представлены численный пример и результаты математического моделирования, демонстрирующие практическую реализуемость разработанного метода управления ориентацией космического аппарата.

Ключевые слова: переориентация, кватернион, управляющая функция, принцип максимума, комбинированный критерий оптимальности, краевая задача, закон управления

DOI: 10.31857/S0572329922600566, EDN: QWIXGS

Введение. В динамической постановке исследуется задача перевода твердого тела, например, космического аппарата (КА) из исходного углового положения в положение заданной ориентации. Главным отличием предложенного решения является использование нового показателя качества в условиях ограниченности управляющих переменных.

Огромное количество работ изучают проблемы управления угловым положением твердого тела в различных формулировках и используют широкий диапазон методов решения [1–26]. Например, одни авторы предлагают синтез оптимального управления, основанного на методе аналитического конструирования оптимальных регуляторов [1], другие используют концепцию обратных задач динамики для получения гладких управлений для реализации пространственного вращения КА, когда программная траектория разыскивается в классе полиномов заданной степени, коэффициенты которых определяются известными значениями фазовых переменных в граничных точках траектории [2]. Особое внимание уделялось проблемам оптимального управления [1, 3–24]. Методы оптимизации также могут быть различны. В частности, решения задачи переориентации твердых тел различной конфигурации, основанные на принципе максимума Л.С. Понтрягина, рассматриваются в [8–24]. Ранее использовались классические критерии качества процесса управления (быстродействие [4–12], минимум расхода топлива [13], минимум энергозатрат [11, 13, 14] и др.); более подробно рассмотрены кинематические задачи разворота [15–18]. Динамические задачи оптимального управления представляют особый интерес и в то же время определенные сложности в решении краевой задачи разворота; в отдельных частных случаях управления за фиксированное время краевая двухточечная задача разворота решается методом разделения переменных [13]. Практически важными остаются аналитические решения задачи оптимального разворота. Однако получить их для тел с произвольной динамической конфигурацией крайне затруднительно. Для сферического [12, 19] и динамически симметричного распределения масс [9–11, 16, 20–22] некоторые решения (в том числе аналитические) известны.

В статье рассмотрена задача, когда используется новый показатель качества, объединяющий в заданной пропорции время разворота и энергетические затраты, необходимые для переориентации КА (фактор времени делает ограниченной длительность маневра); фазовыми переменными являются кватернион ориентации и угловая скорость твердого тела (КА). Решаемая задача отличается от других задач с комбинированным функционалом видом функционала, наличием ограничений на управление и не относится к осесимметричному твердому телу [21–23].

1. Постановка оптимизационной задачи управления. Будем полагать, что пространственное положение КА регулируется с помощью системы ориентации, создающей вращающие моменты относительно трех главных центральных осей инерции. Вращательное движение твердого тела (КА) описывают следующие динамические уравнения [12]:

$$J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 = M_1, \quad J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 = M_2, \quad J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 = M_3 \quad (1.1)$$

и кинематическое уравнение [12]

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega \quad (1.2)$$

где ω_i – проекции вектора ω абсолютной угловой скорости КА на главные центральные оси эллипсоида инерции КА (эти оси образуют связанный базис); M_i – проекции управляющего момента \mathbf{M} сил на оси связанного базиса; J_i – главные центральные моменты инерции КА ($i = 1, 3$); Λ – нормированный кватернион [12], задающий движение связанного базиса относительно инерциального базиса \mathbf{I} ($\|\Lambda\| = 1$), “ \circ ” – знак умножения кватернионов [12, с. 11–20]. Управление КА вокруг центра масс производится за счет изменения момента \mathbf{M} . Область допустимых управлений \mathbf{M} полагаем подобной эллипсоиду инерции КА [11]:

$$\frac{M_1^2}{J_1} + \frac{M_2^2}{J_2} + \frac{M_3^2}{J_3} \leq u_0^2 \quad (1.3)$$

где $u_0 > 0$ определяет управляющие возможности системы ориентации КА. На практике интересны задачи, когда начальная и конечная угловые скорости отсутствуют. Выпишем граничные условия для управляемой системы (1.1)–(1.3):

$$\Lambda(0) = \Lambda_{in}, \quad \omega(0) = 0 \quad (1.4)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_f, \quad \omega(T) = 0 \quad (1.5)$$

где T – время завершения маневра. Кватернионы Λ_{in} и Λ_f удовлетворяют условию $\|\Lambda_{in}\| = \|\Lambda_f\| = 1$ (предполагается, что $\Lambda_f \neq \pm \Lambda_{in}$).

Оптимальным считаем управление, доставляющее минимум следующей величине

$$G = T + k_0 \int_0^T (M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3) dt \quad (1.6)$$

где $k_0 > 0$ – постоянный положительный коэффициент ($k_0 \neq 0$). Задача оптимального управления формулируется в следующей постановке: требуется перевести КА из состояния (1.4) в состояние (1.5) согласно уравнениям (1.1), (1.2) с ограничением (1.3) так, чтобы сумма (1.6) была минимальной (время T заранее не известно). Решение $\mathbf{M}(t)$ находится в классе кусочно-непрерывных функций времени.

Принятый критерий качества (1.6) отличает предлагаемую оптимизационную задачу от рассмотренных ранее задач видом минимизируемого функционала при наличии ограничения (1.3). Фактор времени, присутствующий в (1.6), ограничивает длительность T некоторым конечным значением T_{opt} (коэффициент $k_0 \neq 0$). И еще одна особенность – так как время T не фиксировано, то заявленный поворотный маневр реализуется при любых значениях Λ_{in} , Λ_f и J_1, J_2, J_3, k_0, u_0 . Задача оптимального разворота КА с ограниченным управлением, когда качество процесса управления характеризуется показателем (1.6), остается все еще актуальной.

2. Применение принципа максимума для решения оптимизационной задачи. Рассматриваемая задача (1.1)–(1.6) есть задача динамического оптимального разворота твердого тела [12], у которой моменты M_i – управляющие функции ($i = \overline{1,3}$). Поставленная задача (1.1)–(1.6) решается с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина [27]. Введем сопряженные переменные φ_i , которые соответствуют угловым скоростям ω_i ($i = \overline{1,3}$). Поскольку критерий качества (1.6) не содержит элементов кватерниона ориентации Λ , мы вместо сопряженных функций ψ_j , соответствующих компонентам λ_j кватерниона Λ , используем следующие переменные r_i ($i = \overline{1,3}, j = \overline{0,3}$) [24]:

$$\begin{aligned} r_1 &= (\lambda_0\psi_1 + \lambda_3\psi_2 - \lambda_1\psi_0 - \lambda_2\psi_3)/2, & r_2 &= (\lambda_0\psi_2 + \lambda_1\psi_3 - \lambda_2\psi_0 - \lambda_3\psi_1)/2, \\ r_1 &= (\lambda_0\psi_1 + \lambda_3\psi_2 - \lambda_1\psi_0 - \lambda_2\psi_3)/2, & r_3 &= (\lambda_0\psi_3 + \lambda_2\psi_1 - \lambda_3\psi_0 - \lambda_1\psi_2)/2 \end{aligned}$$

Такой прием применяют многие исследователи [10–23], но с другими функционалами качества (чистые быстродействие, минимум энергозатрат и пр.); впервые указанную замену переменных сделали В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский и М.Б. Черток, Ю.В. Казначеев [11, 12]. Оптимальное изменение функций r_i описывается уравнениями [24]

$$\dot{r}_1 = \omega_3 r_2 - \omega_2 r_3, \quad \dot{r}_2 = \omega_1 r_3 - \omega_3 r_1, \quad \dot{r}_3 = \omega_2 r_1 - \omega_1 r_2, \quad \dot{\mathbf{r}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.1)$$

(r_i образуют вектор \mathbf{r} , символ \times означает векторное произведение векторов).

Выпишем функцию Гамильтона–Понтрягина для оптимизационной задачи (1.1)–(1.6)

$$\begin{aligned} H &= -1 - k_0(M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3) + \varphi_1(M_1 + (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3)/J_1 + \\ &+ \varphi_2(M_2 + (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3)/J_2 + \varphi_3(M_3 + (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2)/J_3 + \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3 \end{aligned}$$

Уравнения для φ_i получаются из формул [27]

$$\dot{\varphi}_i = -\frac{\partial H}{\partial \omega_i} \quad (i = \overline{1,3})$$

из которых формулируется сопряженная система уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \omega_3 \varphi_2 (J_1 - J_3) / J_2 + \omega_2 \varphi_3 (J_2 - J_1) / J_3 - r_1 \\ \dot{\varphi}_2 &= \omega_3 \varphi_1 (J_3 - J_2) / J_1 + \omega_1 \varphi_3 (J_2 - J_1) / J_3 - r_2 \\ \dot{\varphi}_3 &= \omega_2 \varphi_1 (J_3 - J_2) / J_1 + \omega_1 \varphi_2 (J_1 - J_3) / J_2 - r_3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вектор \mathbf{r} оказывается зафиксированным относительно инерциального базиса \mathbf{I} и $|\mathbf{r}| = \text{const} \neq 0$ (уравнения (2.1) свидетельствуют об этом свойстве оптимального вращения). Решение $\mathbf{r}(t)$ запишем, используя кватернион $\Lambda(t)$ [12, 24]:

$$\mathbf{r} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda, \quad \text{где} \quad \mathbf{c}_E = \text{const} = \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{r}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}}$$

(компоненты вектора \mathbf{c}_E есть проекции \mathbf{r} на оси опорного базиса \mathbf{I}); $\tilde{\Lambda}$ – сопряженный кватерниону Λ кватернион [12, с. 11–20]. Мы полагаем $\mathbf{r}(0) \neq 0$ (иначе $r_1 = r_2 = r_3 \equiv 0$ и дальше не имеет смысла решать оптимизационную задачу).

Задача поиска оптимального управления заключается в решении системы дифференциальных уравнений (1.1), (1.2), (2.1), (2.2) с ограничением (1.3) с одновременной максимизацией функции H в каждый момент времени t и выполнением краевых условий (1.4), (1.5).

2.1. *Определение структуры оптимального управления.* Найдем условия максимума функции Гамильтона–Понтрягина H . Полагая $u_i = M_i / \sqrt{J_i}$, $\eta_i = \varphi_i / \sqrt{J_i}$ ($i = \overline{1,3}$), перепишем

$$H = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} - k_0 |\mathbf{u}|^2 + H_{\text{inv}} = |\boldsymbol{\eta}| |\mathbf{u}| \cos \delta - k_0 |\mathbf{u}|^2 + H_{\text{inv}}$$

где $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$; $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$; δ – угол между векторами \mathbf{u} и $\boldsymbol{\eta}$; H_{inv} не зависит в явном виде от управляющих моментов M_i (знак умножения “ \cdot ” обозначает скалярное произведение векторов). Величина H максимальна, когда $\delta = 0$. Если $|\mathbf{u}| \leq u_0$, то максимум функции H по аргументу $|\mathbf{u}|$ находится внутри отрезка $[0, u_0]$ и совпадает с локальным максимумом, который определяют необходимые условия экстремума $\partial H / \partial M_i = 0$. Гамильтониан H – квадратичная функция вектора управления \mathbf{M} , и локальному максимуму соответствуют величины

$$M_i = \varphi_i / (2k_0) \quad (2.3)$$

которые удовлетворяют (1.3) и условиям оптимальности, если $\varphi_1^2 / J_2 + \varphi_1^2 / J_2 + \varphi_1^2 / J_2 \leq 4k_0^2 u_0^2$.

Если $\varphi_1^2 / J_2 + \varphi_1^2 / J_2 + \varphi_1^2 / J_2 > 4k_0^2 u_0^2$, то точка экстремума функции H находится за пределами отрезка $0 \leq |\mathbf{u}| \leq u_0$, и искомое управление выходит на границу $|\mathbf{u}| = u_0$, следовательно

$$M_i = \frac{u_0 \varphi_i}{\sqrt{\varphi_1^2 / J_1 + \varphi_2^2 / J_2 + \varphi_3^2 / J_3}}, \quad i = \overline{1,3}$$

Таким образом, оптимальные моменты M_i описываются зависимостью

$$M_i = \begin{cases} \varphi_i / (2k_0), & \varphi_1^2 / J_2 + \varphi_1^2 / J_2 + \varphi_1^2 / J_2 \leq 4k_0^2 u_0^2 \\ \frac{u_0 \varphi_i}{\sqrt{\varphi_1^2 / J_1 + \varphi_2^2 / J_2 + \varphi_3^2 / J_3}}, & \varphi_1^2 / J_1 + \varphi_1^2 / J_2 + \varphi_1^2 / J_2 > 4k_0^2 u_0^2 \end{cases} \quad (2.4)$$

Система уравнений (2.1), (2.2), (2.4) – необходимые условия оптимальности для задачи (1.1)–(1.6). Имея ввиду требование $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$, у системы уравнений (1.1), (2.1), (2.2), (2.4) есть единственное решение. Значение $\mathbf{r}(0)$ должно быть таким, чтобы

по результатам интегрирования системы (1.1), (1.2), (2.1), (2.2), (2.4) с начальным условием $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$ выполнялось требование $\Lambda(T) = \Lambda_f$ для траектории $\Lambda(t)$. В силу того, что $|\mathbf{r}| = \text{const} = |\mathbf{r}(0)| \neq 0$, для удобства перейдем к орту $\mathbf{p} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ и далее будем использовать его. Обозначим $r_0 = |\mathbf{r}(t)|$. С учетом (2.1) и свойства $r_0 = \text{const} \neq 0$ для векторной функции $\mathbf{p}(t)$ справедливы уравнения

$$\dot{\mathbf{p}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}, \quad \dot{p}_1 = \omega_3 p_2 - \omega_2 p_3, \quad \dot{p}_2 = \omega_1 p_3 - \omega_3 p_1, \quad \dot{p}_3 = \omega_2 p_1 - \omega_1 p_2 \quad (2.5)$$

где p_i – составляющие вектора \mathbf{p} . Замкнутая система уравнений (1.1), (1.2), (2.1), (2.2), (2.4) определит нам оптимальное управление. Задача нахождения оптимального программного управления свелась к решению системы уравнений движения (1.1), (1.2), сопряженных уравнений (2.2) и уравнений (2.5) с равенствами $r_i = r_0 p_i$ при наличии закона (2.4) для управляющих моментов M_i . Искомое оптимальное решение удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\varphi_i = a(t) p_i \quad (2.6)$$

$$\omega_i = b(t) p_i / J_i \quad (2.7)$$

$$M_i = m(t) p_i \quad (2.8)$$

где $a(t) = a(0) - r_0 t$; $b(t)$, $m(t)$ – скалярные функции времени; $m(t)$ определяется φ_i и равна

$$M_i = \begin{cases} a(t)/(2k_0), & a^2(t)(p_1^2/J_2 + p_1^2/J_2 + p_1^2/J_2) \leq 4k_0^2 u_0^2 \\ \frac{u_0 \text{sign} a(t)}{\sqrt{p_1^2/J_1 + p_1^2/J_2 + p_1^2/J_3}}, & a^2(t)(p_1^2/J_2 + p_1^2/J_2 + p_1^2/J_2) > 4k_0^2 u_0^2 \end{cases}$$

Последовательная подстановка (2.6) в (2.2) с учетом связей (2.7) и $r_i = r_0 p_i$ подтверждает, что решение (2.6), (2.7) системы дифференциальных уравнений (1.1), (2.2), (2.4), (2.5) действительно справедливо (соотношения (2.7) прямо следуют из системы (1.1), (2.5), (2.8)). После обозначения $\boldsymbol{\varphi}$ – вектор с компонентами φ_i , $J_{SC} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ – тензор инерции твердого тела, систему (2.2) запишем в векторном виде:

$$\boldsymbol{\varphi} = (J_{SC} \boldsymbol{\omega}) \times (J_{SC}^{-1} \boldsymbol{\varphi}) - J_{SC} (\boldsymbol{\omega} \times (J_{SC}^{-1} \boldsymbol{\varphi})) - \mathbf{r} \quad (2.9)$$

Левая часть уравнения (2.9) с учетом (2.5), (2.6) будет следующей:

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \dot{a}(t) \mathbf{p} + a(t) \dot{\mathbf{p}} = \dot{a}(t) \mathbf{p} - a(t) \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$$

Правая часть уравнения (2.9) с учетом (2.6), (2.7) такова

$$b \mathbf{p} \times (a J_{SC}^{-1} \mathbf{p}) - J_{SC} ((b J_{SC}^{-1} \mathbf{p}) \times (a J_{SC}^{-1} \mathbf{p})) - \mathbf{r} = a \mathbf{p} \times (b J_{SC}^{-1} \mathbf{p}) - \mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega} - \mathbf{r} = -a(t) \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} - r_0 \mathbf{p}$$

Левая часть (2.9) тождественно равна правой части, потому что $\dot{a}(t) = -r_0$.

2.2. Главные свойства и возможные варианты оптимального управления. Каким бы ни был тип оптимального управления, скалярные функции $b(t)$ и $m(t)$ связаны зависимостью

$$b(t) = \int_0^t m(t) dt, \quad b(0) = 0, \quad b(T) = 0, \quad \dot{b} = m(t) \quad (\text{оно получается из (1.1) и (2.5), (2.7)})$$

Оптимальное вращение имеет свойство $p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3 = \text{const}$, так как оно удовлетворяет системе (2.5), (2.7). Для проверки приведенное равенство дифференцируется по времени с учетом (2.5), (2.7), в результате чего убеждаемся, что полученная производная равна нулю после подстановки \dot{p}_i по уравнениям (2.5), а затем вычисления ω_i по выражениям (2.7).

Краевая задача принципа максимума состоит в определении вектора $\mathbf{p}(0)$ и величины $r_0 > 0$, при которых решение системы уравнений (1.1), (1.2), (2.2), (2.4), (2.5) с начальными условиями (1.4) и связью $r_i = r_0 p_i$ удовлетворит краевым условиям (1.5). С учетом свойств $a(t)$

$$m(t) = \begin{cases} (a(0) - r_0 t)/(2k_0), & |a(0) - r_0 t| \leq 2k_0 m_0 \\ m_0 \text{sign}(a(0) - r_0 t), & |a(0) - r_0 t| > 2k_0 m_0 \end{cases}$$

где $m_0 = u_0/C$, $C = \sqrt{p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3} = \text{const}$, $p_i = r_i/r_0$, $r_0 = \text{const} = |\mathbf{r}| \neq 0$, $a(0) > 0$, $a(T) = -a(0)$.

Если $a(0) \leq 2k_0 m_0$, то $m(0) = a(0)/(2k_0)$ и $m(t) = m(0) - r_0 t/(2k_0)$. Время маневра T не фиксировано и гамильтониан H в явной форме не зависит от времени. Значит, для оптимального управления $H = \text{const} = 0$ [28] и $H(0) = H(T) = -1 - k_0 C^2 m^2(0) + a(0) C^2 m(0) = k_0 C^2 m^2(0) - 1 = 0$, так как $a(0) = 2k_0 m(0)$. Откуда $m(0) = 1/(C\sqrt{k_0})$. Следовательно, если $k_0 \geq 1/u_0^2$, то $\mathbf{M} = \boldsymbol{\varphi}/(2k_0)$ в любой момент времени $t \in [0, T]$.

Если $k_0 u_0^2 < 1$, то $m(0) = u_0/C$ и существует два отрезка времени, внутри которых $|\mathbf{M}| = \text{const} = m_0$, при этом $a(0) > 2k_0 m_0 = a_{cr}$. Рассмотрим подробнее этот вариант. Обозначим b_{\max} – максимальное значение функции $b(t)$. Так как $m(T/2) = a(T/2) = 0$, то $b(T/2) = b_{\max}$. Найдем $H(T/2) = r_0 b_{\max} C^2 - 1 = 0$ (так как $\mathbf{M}(T/2) = 0$ и $\boldsymbol{\varphi}(T/2) = 0$), $H(0) = H(T) = -1 - k_0 m_0^2 C^2 + a(0) m_0 C^2 = 0$, откуда $r_0 = 1/(b_{\max} C^2)$, $a(0) = 1/(u_0 C) + k_0 u_0/C$. Рис. 1 наглядно демонстрирует поведение функций $m(t)$ и $b(t)$ при таком варианте оптимального управления, где t_1 и t_2 – времена наступления равенств $a(t) = a_{cr}$ и $a(t) = -a_{cr}$. Если $t < t_1$, то $m(t) = m_0$. Если $t > t_2$, то $m(t) = -m_0$. Если $t_1 \leq t \leq t_2$, то $m(t) = (1/u_0 + k_0 u_0)/(2k_0 C) - r_0 t/(2k_0)$. Причем $t_1 = (1/u_0 - k_0 u_0)/(r_0 C)$, $t_2 = (1/u_0 + 3k_0 u_0)/(r_0 C)$. Время разворота $T = 2(1/u_0 + k_0 u_0)/(r_0 C)$. Соответственно, $b(t)$ описывается следующим образом: $b(t) = m_0 t$, если $t < t_1$; $b(t) = m_0 t - r_0(t - t_1)^2$, если $t_1 \leq t \leq t_2$; $b(t) = m_0(T - t)$, если $t > t_2$. Величины t_1 , t_2 , T и b_{\max} связаны с константой $m_0 = u_0/C$ и интегральной величиной

$$F = \int_0^T |\mathbf{L}(t)| dt = \int_0^T b(t) dt \quad (2.10)$$

где $\mathbf{L} = J_{SC} \boldsymbol{\omega}$ – кинетический момент (F определяют исключительно кватернион разворота $\Lambda_t = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda_f$ и моменты инерции J_1, J_2, J_3 [18]).

$$b(t_2) = b(t_1) = m_0 t_1, \quad b_{\max} = b(T/2) = m_0(1/u_0 + k_0 u_0)/(r_0 C) - k_0 u_0^2/(r_0 C^2) = 1/(r_0 C^2)$$

Величины t_1, t_2 находятся из условий: $a(t_1) = 1/(u_0 C) + k_0 u_0/C - r_0 t_1 = 2k_0 u_0/C = a_{cr}$ и $a(t_2) = 1/(u_0 C) + k_0 u_0/C - r_0 t_2 = -a_{cr} = -2k_0 u_0/C$. При этом $b(t_1) = (1 - k_0 u_0^2)/(r_0 C^2) = b(t_2) = m_0 t_1$.

Значение (2.10) для варианта оптимального вращения, когда $k_0 < 1/u_0^2$, равно

$$F = m_0(t_1 t_2 + (t_2 - t_1)^2/6) = m_0(1/u_0^2 + 2k_0 - k_0^2 u_0^2/3)/(r_0 C^2)$$

Из последнего уравнения находим значения r_0 и b_{\max} .

$$r_0 = \sqrt{m_0(1/u_0^2 + 2k_0 - k_0^2 u_0^2/3)/F/C}, \quad b_{\max} = \sqrt{F/[m_0(1/u_0^2 + 2k_0 - k_0^2 u_0^2/3)]/C}$$

Временные характеристики маневра t_1, t_2 и T находятся в явном виде

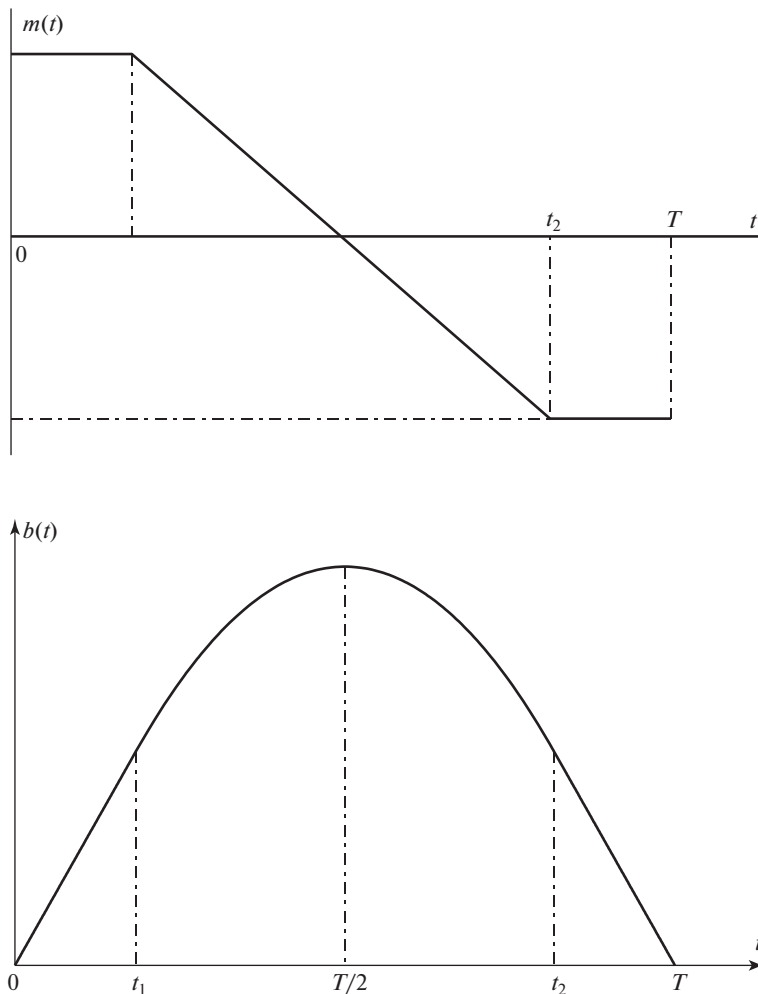


Рис. 1. Вид оптимальных функций $m(t)$ и $b(t)$ в случае $k_0 u_0^2 < 1$.

$$t_1 = (1/u_0 - k_0 u_0) \sqrt{F/[m_0(1/u_0^2 + 2k_0 - k_0^2 u_0^2/3)]}$$

$$t_2 = (1/u_0 + 3k_0 u_0) \sqrt{F/[m_0(1/u_0^2 + 2k_0 - k_0^2 u_0^2/3)]}$$

$$T = 2(1/u_0 + k_0 u_0) \sqrt{F/[m_0(1/u_0^2 + 2k_0 - k_0^2 u_0^2/3)]}$$

Из представленных выражений отчетливо видно, что в случае $k_0 \rightarrow 0$ найденное решение полностью совпадает с управлением максимального быстродействия [8] и $T = 2\sqrt{F/m_0}$.

Если $k_0 u_0^2 \geq 1$, то оптимальным является закон $\mathbf{M} = (a(0) - r_0 t) \mathbf{p} / (2k_0)$, где $a(0) = 2\sqrt{k_0}/C$. Время маневра $T = \sqrt{6FC\sqrt{k_0}}$, а $b_{\max} = m(0)T/4 = \sqrt{3F/(8C\sqrt{k_0})}$. Постоянная $r_0 =$

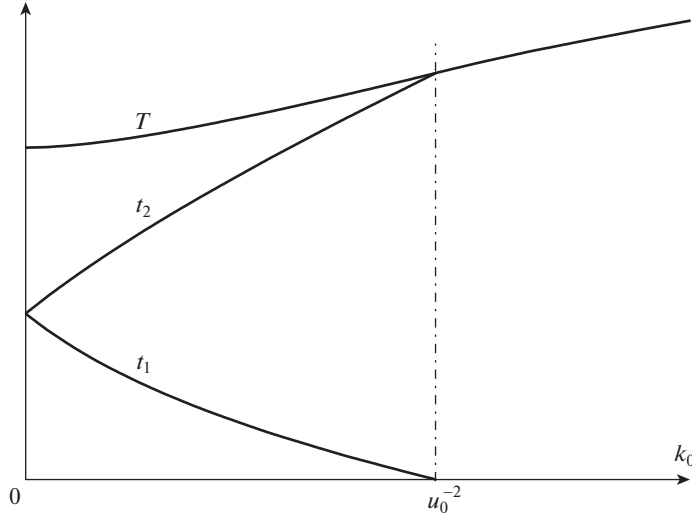


Рис. 2. Зависимость временных характеристик разворота от коэффициента k_0 .

$= \sqrt{8\sqrt{k_0}/(3FC^3)}$, поскольку $b(t) = b_{\max}$, когда $a(t) = 0$, и $H = r_0 b_{\max} C^2 - 1 = 0$. Когда $k_0 u_0^2 \geq 1$ зависимости $a(t)$, $m(t)$ и $b(t)$ имеют следующий аналитический вид:

$$a(t) = 2k_0 m(0)(1 - 2t/T), \quad m(t) = m(0)(1 - 2t/T), \quad b(t) = m(0)t(1 - t/T)$$

где $m(0) = r_0 T / (4k_0) = 1 / (C\sqrt{k_0})$ – модуль момента \mathbf{M} в начальный момент времени $t = 0$. Оптимальный закон вращения можем записать в виде:

$$J_i \omega_i = m(0)t(1 - t/T)p_i, \quad i = \overline{1, 3}$$

Таким образом, поведение функций $b(t)$ и $m(t)$ в оптимальном вращении определяют коэффициент k_0 и характеристики F , m_0 (последние зависят исключительно от параметров разворота Λ_{in} , Λ_f и известных величин u_0 , J_i). Длительность оптимального разворота T монотонно возрастает с увеличением коэффициента k_0 , начиная от $T = 2\sqrt{F/m_0}$ до бесконечности. Зависимость времен t_1 , t_2 и T от коэффициента k_0 демонстрирует рис. 2. Мы видим, что t_1 – монотонно убывающая функция k_0 , а t_2 – монотонно возрастающая функция k_0 ; причем $\lim_{k_0 \rightarrow 0} t_1 = \lim_{k_0 \rightarrow 0} t_2 = T/2$, а для $k_0 = 1/u_0^2$ будет $t_1 = 0$. Параметр r_0 – непрерывная монотонно возрастающая функция коэффициента k_0 ; b_{\max} – непрерывная монотонно убывающая функция k_0 .

В результате, при любых значениях u_0 и $k_0 \neq 0$ оптимальное управление \mathbf{M} следующее

$$\mathbf{M}(t) = \begin{cases} (\rho - r_0 t / (2k_0)) \mathbf{p}, & |(\rho - r_0 t / (2k_0))| < m_0 \\ m_0 \text{sign}(2k_0 \rho - r_0 t) \mathbf{p}, & |(\rho - r_0 t / (2k_0))| \geq m_0 \end{cases} \quad (2.11)$$

где $r_0 = \sqrt{m_0(1/u_0^2 + 2k_0 - k_0^2 u_0^2 / 3) / F / C}$, $\rho = 1 / (2k_0 u_0 C) + u_0 / (2C)$, если $k_0 u_0^2 < 1$;

или $r_0 = \sqrt{8\sqrt{k_0} / (3FC^3)}$, $\rho = 1 / (C\sqrt{k_0})$, если $k_0 u_0^2 \geq 1$.

При оптимальном изменении скорости $\omega(t)$ вращение имеет свойство симметрии (прежде всего, для функций $m(t)$ и $b(t)$) и характеризуется следующими закономерностями:

$$m(0) = -m(T) > 0, \quad b(t) \geq 0, \quad |m(t)| = |m(T-t)|$$

$$\int_0^{T/2} |m(t)| dt = \int_{T/2}^T |m(t)| dt, \quad \int_0^{T/2} b(t) dt = \int_{T/2}^T b(t) dt, \quad b(t) = b(T-t)$$

Выпишем $m(t)$, $b(t)$ для общего случая (его отражает рис. 1):

$$m(t) = m_0(|t - t_2| - |t - t_1|)/(t_2 - t_1), \quad b(t) = \begin{cases} m_0(T/2 - |t - T/2|), & |2t - T| \geq R \\ m_0(t - (t - t_1)^2/R), & |2t - T| < R \end{cases} \quad (2.12)$$

где $R = \sqrt{3(T^2 - 4F/m_0)}$; $T = 2(1/u_0 + k_0 u_0) \sqrt{F/[m_0(1/u_0^2 + 2k_0 - k_0^2 u_0^2/3)]}$ (t_1, t_2 рассчитаны ранее); и $L_{\max} = \sqrt{F/[m_0(1/u_0^2 + 2k_0 - k_0^2 u_0^2/3)]}/C$ – максимальный модуль $|\mathbf{L}(t)|$.

Важным свойством оптимального управления является постоянство пропорции между кинетической энергией вращения E и квадрата модуля кинетического момента КА.

$$E = b^2(p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3)/2, \quad E/|\mathbf{L}|^2 = (p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3)/2 = \text{const}$$

так как $b^2 = |\mathbf{L}|^2$ (это видно из (2.7)) и $p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3 = \text{const} = p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3$, где p_{10}, p_{20}, p_{30} – составляющие вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$.

Найдем (1.6) для оптимального управления (2.11) в зависимости от коэффициента k_0 и характеристики u_0 . Если $k_0 u_0^2 \geq 1$, то участки с постоянным модулем момента \mathbf{M} отсутствуют и $G = 4\sqrt{2FC\sqrt{k_0}/3}$, потому что $G = T + k_0 C^2 m^2(0)T/3$, где длительность маневра $T = \sqrt{6FC\sqrt{k_0}}$ и $m(0) = 1/(C\sqrt{k_0})$. В случае $k_0 u_0^2 < 1$ управление с двумя участками вращения, когда модуль управляющего момента постоянный и максимально возможный, является оптимальным, и поэтому $G = T + k_0 u_0^2(T + 4t_1)/3$ – расчетное значение показателя (1.6). Если $k_0 \rightarrow 0$, то $t_1 \rightarrow t_2$ и получаем релейное управление с одной точкой переключения в качестве оптимального, $G = 2(1 + k_0 u_0^2)\sqrt{FC/u_0}$, так как в этом случае $|\mathbf{M}| = m_0$, $G = (1 + k_0 u_0^2)T$, $T = 2\sqrt{F/m_0}$.

У (2.11) наблюдаются следующие уникальные закономерности:

$$\Lambda \circ \mathbf{M}(T-t) \circ \tilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \mathbf{M}(t) \circ \tilde{\Lambda}, \quad \Lambda \circ \mathbf{L}(T-t) \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda \circ \mathbf{L}(t) \circ \tilde{\Lambda}$$

$$\max_{t < T/2} m(t) = -\min_{t > T/2} m(t) = m(0), \quad L_{\max} = \max_{0 < t < T} \sqrt{J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2} = |\mathbf{L}(T/2)|$$

Из (2.7) следует, что \mathbf{p} есть орт кинетического момента \mathbf{L} . Оптимальные функции $\omega_i(t)$, $\varphi_i(t)$, $p_i(t)$ соответствуют требованиям (2.6), (2.7), где $p_i(t)$ – решение системы (2.5). Оптимальное управление определяется выражением (2.11), направление кинетического момента \mathbf{L} остается постоянным относительно инерциального базиса \mathbf{I} , векторы \mathbf{M} и \mathbf{L} коллинеарны в любое время $t \in [0, T]$. Управление (2.11) является действительно оптимальным, поскольку оно – единственное решение системы уравнений (1.1), (2.2), (2.4), (2.5). В нашем случае $\omega(0) = \omega(T) = 0$, поэтому найденное решение (2.11) реализуемо при любых Λ_{in}, Λ_j и J_1, J_2, J_3 (для любых u_0 и $k_0 \neq 0$ существует решение системы (1.1), (2.1), (2.2), (2.4)).

3. Доказательство единственности оптимального решения. Введем орт \mathbf{q} , коллинеарный моменту \mathbf{M} , причем направления векторов \mathbf{q} и φ совпадают в начальный момент

времени $t = 0$. Далее определим скалярный множитель f , удовлетворяющий двум условиям: $\boldsymbol{\varphi} = f\mathbf{q}$ и $f(0) > 0$. В окрестности точки $t = 0$ справедливы соотношения $\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}$ и $\mathbf{L} = \chi\mathbf{q}$, где χ – скалярный множитель. Сначала оптимальный управляющий момент \mathbf{M} , рассчитанный по выражению (2.4) при условии $\boldsymbol{\varphi} = f(t)\mathbf{q}$, подставляем в (1.1) с учетом зависимости $\mathbf{L} = \chi\mathbf{q}$ и получаем

$$\mathbf{q}\dot{\chi} + \dot{\mathbf{q}}\chi + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}\chi = m(t)\mathbf{q} \quad (3.1)$$

Векторы $\dot{\mathbf{q}}\chi + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}\chi$ и \mathbf{q} ортогональны, либо сумма $\dot{\mathbf{q}}\chi + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}\chi$ есть нулевой вектор ($|\mathbf{q}| = 1$, а значит в любом случае $\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0$). Уравнение (3.1) удовлетворяется, только если $\dot{\mathbf{q}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$ и $\dot{\chi} = m(t)$. Далее векторы $\boldsymbol{\varphi} = f(t)\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\omega} = J_{SC}^{-1}\chi\mathbf{q}$ подставим в (2.9). Правая часть уравнения (2.9) будет следующей

$$\chi\mathbf{q} \times (J_{SC}^{-1}f\mathbf{q}) - fJ_{SC}((J_{SC}^{-1}\chi\mathbf{q}) \times (J_{SC}^{-1}\mathbf{q})) - \mathbf{r} = -f(\chi J_{SC}^{-1}\mathbf{q}) \times \mathbf{q} - \mathbf{r} = -f\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} - r_0\mathbf{p}$$

В силу уравнения (3.1) справедливо соотношение $\dot{\mathbf{q}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$ (оптимальное вращение подчиняется уравнениям (1.1), (2.9) одновременно). В результате получим левую часть уравнения (2.9)

$$\dot{f}\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}}f = \dot{f}\mathbf{q} - f\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$$

После подстановки левой и правой частей в (2.9) получаем уравнение $\dot{f}\mathbf{q} = -r_0\mathbf{p}$, из которого $\dot{f} = -r_0$ и $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}$ (так как $f(0) > 0$, $f(T) < 0$, откуда $\dot{f} < 0$). Приходим к следующему заключению: если в какой-то момент времени t векторы $\boldsymbol{\varphi}$ и \mathbf{L} коллинеарны, то они остаются коллинеарными внутри всего интервала времени $0 < t < T$. Т.е. чтобы векторы $\boldsymbol{\varphi}$ и \mathbf{L} оставались коллинеарными от $t = 0$ до $t = T$ достаточно, чтобы \mathbf{L} оказался коллинеарным вектору $\boldsymbol{\varphi}$ хотя бы в один момент времени. Условия $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ и $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ гарантируют существование как минимум двух таких моментов времени, когда \mathbf{L} и $\boldsymbol{\varphi}$ коллинеарны ($\mathbf{L} = h\boldsymbol{\varphi}$ при $t \rightarrow 0$, и $\mathbf{L} = -h(T-t)\boldsymbol{\varphi}$ при $t \rightarrow T$). Можем утверждать, что в процессе оптимального движения закономерность $\mathbf{L} \parallel \mathbf{p}$ сохраняется на всем отрезке времени $t \in [0, T]$, и оптимальное вращение обязательно удовлетворяет (2.6), (2.7). Доказано, что зависимости (2.6), (2.7) – единственное решение системы (1.1), (2.2), (2.4), (2.5), поскольку $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$, $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ (напоминаем, $r_i = r_0p_i$).

Таким образом, оптимизация свелась к определению таких вектора \mathbf{p}_0 и длительности T , чтобы в ходе вращения КА согласно уравнениям (1.2), (2.5), (2.7) удовлетворились условия $\Lambda(T) = \Lambda_f$, $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$. Уравнения (2.5) с учетом (2.7) принимают вид:

$$\dot{p}_1 = \frac{J_2 - J_3}{J_2J_3} b(t)p_2p_3, \quad \dot{p}_2 = \frac{J_3 - J_1}{J_1J_3} b(t)p_1p_3, \quad \dot{p}_3 = \frac{J_1 - J_2}{J_1J_2} b(t)p_1p_2 \quad (3.2)$$

Найти общее решение указанной системы практически не представляется возможным. Сложность заключается в нахождении $\mathbf{p}(0)$, $\mathbf{p}(T)$, связанных выражением

$$\Lambda_{in} \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_{in} = \Lambda_f \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_f$$

($\mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_t \circ \mathbf{p}(0) \circ \Lambda_t$, здесь $\Lambda_t = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda_f$ – кватернион разворота).

4. Проектирование программы оптимального разворота. Решение задачи оптимального разворота описывается уравнениями (2.6), (2.7), (3.2); управляющие функции M_i и скорости вращения ω_i изменяются в соответствии с (2.7), (2.11). Вектор \mathbf{p}_0 и характеристика F находятся из решения двухточечной краевой задачи разворота. Программу вращения КА полностью определяют F , m_0 . Программное значение \mathbf{M} связано с кватернионом Λ по выражению

$$\mathbf{M} = m(t)\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{in} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda$$

в котором

$$m(t) = \begin{cases} m_0(|t - t_2| - |t - t_1|)/(t_2 - t_1), & k_0 u_0^2 < 1 \\ (1 - 2t/T)/(C\sqrt{k_0}), & k_0 u_0^2 \geq 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

где $m_0 = u_0 \sqrt{p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3}$.

Характеристики F , m_0 и \mathbf{p}_0 определяются исключительно значениями u_0 , Λ_{in} , Λ_f и J_1 , J_2 , J_3 , а времена T , t_1 , t_2 зависят от k_0 . В момент времени $t = T/2$ момент \mathbf{M} меняет свое направление на противоположное, модуль $|\mathbf{L}|$ максимален ($|\mathbf{L}(T/2)| = L_{\text{max}}$), а пройденный "путь" $s(t)$ составляет половину интеграла (2.10).

$$s(T/2) = F/2, \quad s(t) = \int_0^t |\mathbf{L}(t)| dt, \quad \text{sign} m(t) = -\text{sign}(2s(t) - F)$$

Необходимо отметить, что при любой форме ограничения на \mathbf{M} (произвольной области возможных управлений U), если коэффициент k_0 удовлетворяет неравенству $k_0 C^2 R_0^2 > 1$ (где R_0 – радиус сферы, вписанной в область U), то управление

$$\mathbf{M} = (1 - 2t/T) \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda / (C\sqrt{k_0})$$

оптимально по критерию (1.6); в этом случае $|\mathbf{M}(t)| \leq R_0$ в любое $t \in [0, T]$.

4.1. *Некоторые частные случаи оптимального управления разворотом.* Управляющие функции формируются согласно (2.11), для чего надо в каждый момент времени t иметь p_1, p_2, p_3 (их изменение описывает (3.2)). Аналитическое решение системы (1.2), (2.7), (3.2) существует применительно динамически симметричных и сферически-симметричных тел.

В случае сферически-симметричного твердого тела ($J_1 = J_2 = J_3$) зависимости известны [19]:

$$p_i(t) = \text{const} = p_{i0} = v_i / \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}, \quad M_i(t) = m(t)p_{i0}, \quad \omega_i(t) = b(t)p_{i0}/J_i$$

где временные функции $b(t)$ и $m(t)$ определяются параметрами $m_0 = u_0 \sqrt{J_1}$, $F = 2J_1 \arccos v_0$ и k_0 (о чем было сказано в разделе 2); v_0, v_1, v_2, v_3 – элементы кватерниона $\Lambda_t = \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda_f$. Траекторию вращения $\Lambda(t)$ представим в аналитической форме

$$\Lambda(t) = \Lambda_{\text{in}} \circ e^{\mathbf{p}_0 s(t)/(2J_1)}, \quad s(t) = \int_0^t b(t) dt$$

При динамической симметрии твердого тела ($J_2 = J_3$) задача оптимального управления (1.1)–(1.6) может быть доведена до аналитического решения (для конкретности дальнейшего изложения осью симметрии считается ось OX). При таком распределении масс оптимальное движение есть одновременное вращение тела (например, КА) вокруг направления, задаваемого вектором \mathbf{p} , неподвижного в инерциальной системе координат, и вокруг оси OX , которая образует с \mathbf{p} постоянный угол ϑ . Угловые скорости вокруг \mathbf{p} и оси OX изменяются пропорционально с постоянным коэффициентом пропорциональности, в силу чего имеем [8, 11]

$$\Lambda_f = \Lambda_{\text{in}} \circ e^{\mathbf{p}_0 \beta/2} \circ e^{\mathbf{e}_1 \alpha/2}$$

где \mathbf{e}_1 – орт оси симметрии; α, β – углы поворота твердого тела вокруг оси OX и вокруг \mathbf{p} ($|\alpha| \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$). Запишем $\mathbf{p}(t)$ в аналитической форме [8, 11]:

$$p_1 = p_{10} = \cos \vartheta, \quad p_2 = p_{20} \cos \kappa + p_{30} \sin \kappa, \quad p_3 = -p_{20} \sin \kappa + p_{30} \cos \kappa, \quad (4.2)$$

$$\kappa = \frac{J - J_1}{J} \int_0^t \omega_1(t) dt$$

где $p_{10} = p_1(0)$; $J = J_2 = J_3$; продольная скорость $\omega_1(t)$ определяется из (2.7) при том, что $p_1 = \text{const} = p_{10}$. Значения α , β и p_{10} находятся по кватернионам Λ_{in} и Λ_f из системы [8, 11]:

$$\alpha = \frac{J - J_1}{J_1} p_{10} \beta, \quad \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_0, \quad \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_1 \quad (4.3)$$

$$p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_2, \quad -p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_3$$

причем $-\pi \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$ (здесь v_0, v_1, v_2, v_3 – элементы кватерниона $\Lambda_f = \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda_f$).

Скорости вращения ω , рассчитываются по уравнениям (2.7) и (4.2). Оптимальные функции $b(t)$ и $m(t)$ определены программами (2.12), (4.1) и зависят от параметров T, m_0, F , которые рассчитываются однозначно по заданным $\Lambda_{\text{in}}, \Lambda_f, u_0, k_0$ и J_1, J_2, J_3 . Искомые оптимальные управления $M_f(t)$ запишем в следующем аналитическом виде:

$$M_1 = m(t)p_{10}, \quad M_2 = m(t)\sqrt{1 - p_{10}^2} \sin(\kappa + \gamma), \quad M_3 = m(t)\sqrt{1 - p_{10}^2} \cos(\kappa + \gamma)$$

где $\gamma = \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2})$, если $p_{30} \geq 0$, или $\gamma = \pi - \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2})$; вариант $|p_{10}| = 1$ означает плоское вращение вокруг оси OX , поэтому мы его не рассматриваем.

Оптимальную траекторию $\Lambda(t)$ представим в следующей аналитической форме

$$\Lambda(t) = \Lambda_{\text{in}} \circ e^{p_0 \sigma / 2} \circ e^{\mu e_1 / 2}$$

где $\sigma = J_2^{-1} \int_0^t b(t) dt$; $\mu = p_{10} \sigma (J_2 - J_1) / J_1$.

Параметры p_0, r_0, m_0, T для динамически симметричного тела находятся намного проще (также упрощается определение величины (2.10) и показателя G); $F = J_2 \beta$, так как $|\mathbf{L}| = J_2 \beta$, где β – скорость вращения вокруг \mathbf{L} (уточним, $\beta \geq 0, \dot{\beta} \geq 0$). Величины $r_0, T, b_{\text{max}}, G$ зависят от β . Чтобы (1.6) было минимальным необходимо, чтобы угол β был минимально возможным, для чего потребуем $\beta \leq \pi$ (именно поэтому (4.3) включает условие $0 \leq \beta \leq \pi$). Заметим, что в более ранних работах [11, 14] также выписаны предварительные выражения общего решения задачи оптимального разворота, но для других функционалов качества, и доведено до конца решение для частного случая динамической симметрии твердого тела. При этом авторами статьи [11] было доказано, что решение системы (4.3) существует при любых Λ_f и любых $J_1, J_2 = J_3$.

Для несимметричного тела ($J_1 \neq J_2 \neq J_3$) решение системы (1.2), (2.5), (2.7) находится исключительно численными методами (например, методом последовательных приближений [29], или как описано в предыдущей работе [8]). Расчет искомого орта p_0 осуществляется решением краевой задачи $p(0) = p_0, p(T) = \tilde{\Lambda}_f \circ p_0 \circ \Lambda_f$ для системы дифференциальных уравнений (3.2). Ранее она решалась методом итераций (см. способ [30] и систему [31]). Известно [18], что p_0 не зависит от поведения $b(t)$, которая входит в (3.2), и мы находим p_0 в предположении, что $b(t) = \text{const}$; это обстоятельство значительно упрощает алгоритм поиска требуемого p_0 . Когда $b(t) = \text{const}$, решение $p(t)$ уравнений (3.2) соответствует вращению по инерции, поскольку уравнения (3.2) выполняются совместно с (1.1), (2.7), из которых следует $\mathbf{M} = 0$.

4.2. *Разработка алгоритмов терминального управления.* В частном случае, когда $k_0 u_0^2 \geq 1$, появляется возможность в текущий момент t уточнять управляющую функцию $\mathbf{M}(t)$,

используя измерения параметров движения (информацию о фактических угловом положении и скорости). В процессе поиска оптимального вращения было выяснено, что в интервале $t < T/2$ оптимальное движение удовлетворяет условию $\mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{L}(t) \geq 0$, КА раскручивается с увеличивающейся скоростью вращения. Для времен $t > T/2$ должно быть $\mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{L}(t) \leq 0$, КА замедляет вращение, угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ уменьшается до нуля ($\mathbf{M}(t) = 0$, когда $t = T/2$). На этапе раскрутки направление момента \mathbf{M} задает вектор $\mathbf{L}_{\text{des}} = \mathbf{p}\sqrt{3F/(8C\sqrt{k_0})}$ (величина F априорно известна и определяется заданными J_1, J_2, J_3 и Λ_f), в идеальном исполнении направления \mathbf{L}_{des} и \mathbf{L} совпадают; желаемый кинетический момент \mathbf{L}_{des} определяется через Λ следующим образом

$$\mathbf{L}_{\text{des}} = \sqrt{3F/(8C\sqrt{k_0})}\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda$$

На участке гашения угловой скорости \mathbf{M} направляется строго противоположно имеющемуся кинетическому моменту \mathbf{L} . Управляющую функцию запишем в форме синтеза:

$$\mathbf{M} = |m(t)|(\mathbf{L}_{\text{req}} - \mathbf{L})/|\mathbf{L}_{\text{req}} - \mathbf{L}|$$

где $\mathbf{L}_{\text{req}} = (1 + \text{sign}m(t))\sqrt{3F/(8C\sqrt{k_0})}\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda/2$ (очевидно, при гашении угловой скорости наведение осуществляется в точку $\mathbf{L} = 0$; и $\mathbf{L}_{\text{req}} = 0$, когда $m(t) < 0$).

Если $k_0 u_0^2 \geq 1$, то (2.3) – необходимое условие оптимальности, и $m(t) = (1 - 2t/T)/(C\sqrt{k_0})$, где $T = \sqrt{6FC\sqrt{k_0}}$ – время завершения разворота (оно используется как параметр).

При оптимальном управлении момент \mathbf{M} меняет свое направление на обратное в момент t , когда $s(t) = F/2$ для монотонно-возрастающей функции $s(t)$, в тот же момент происходит смена знака у $m(t)$. Скалярное произведение \mathbf{M} и \mathbf{L} и разность $2s(t) - F$ должны иметь разный знак (для оптимального вращения). На этом свойстве оптимального вращения выработан критерий, по которому осуществляется переход с раскрутки на остановку вращения.

Для улучшения точности переориентации необходимо вычислять $m(t)$ в каждый момент времени t на основе фактических (т.е. измеренных в ходе вращения КА) кинематических параметров $\omega_f(t)$ и $\Lambda(t)$. Закон управления определим на основе $\omega_f(t)$, $\Lambda(t)$ и остатка “пути” s_{rem} , который требуется “пройти” для завершения разворота из текущего $\Lambda(t)$ в предписанное конечное Λ_f положение. Оставшийся “путь” s_{rem} определяется непрерывным интегрированием

$$s_{\text{rem}} = F - \int_0^t |J_{SC}\boldsymbol{\omega}(t)|dt$$

Найдем условия, при которых выполняются конечные условия разворота (1.5). Для этого определим “путь” $s(t)$, пройденный при линейном изменении функции $m(t)$.

$$s(t) = \int_0^t |J_{SC}\boldsymbol{\omega}(t)|dt = m(0)\int_0^t t(1 - t/T)dt = (t^2/2 - t^3/(3\sqrt{6FC\sqrt{k_0}}))/(C\sqrt{k_0})$$

На момент завершения разворота $s(T) = F = m(0)T^2/6$, в момент $t = T/2$ априорная величина составляет $s(T/2) = m(0)T^2/12$. Функцию $m(t)$ сформируем на основании предположения, что $\dot{m} = \text{const}$ на отрезке времени $[t, T]$ (т.е. до конца маневра). Когда $s(t) = F$, угловая скорость должна обнулиться $\boldsymbol{\omega} = 0$ (к этому моменту станет $\Lambda(t) = \Lambda_f$, согласно неизменности (2.10)). Поскольку $\Lambda(T) = \Lambda_f$, то $s(T) = F$, а значит имеет место равенство

$$s(t) + \int_t^T |J_{SC}\boldsymbol{\omega}(t)| dt = F$$

Это первое условие, которое необходимо выполнить. Во-вторых, у оптимального вращения $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ и, следовательно,

$$|J_{SC}\boldsymbol{\omega}(t)| + \int_t^T m(t) dt = 0$$

До начала разворота величина F и длительность маневра T определены. Выпишем уравнения, которые позволят нам найти $m(t)$, исходя из фактически складывающейся ситуации.

$$(T-t)^3 \dot{m}/6 + (T-t)^2 m/2 + (T-t)|\mathbf{L}| = F - s(t) = s_{\text{rem}}, \quad (T-t)^2 \dot{m}/2 + (T-t)m + |\mathbf{L}| = 0$$

Получили линейную систему уравнений с двумя неизвестными m и \dot{m} . Решение ее так

$$m(t) = 6 \left(F - \int_0^t |J_{SC}\boldsymbol{\omega}(t)| dt \right) / (T-t)^2 - 4|J_{SC}\boldsymbol{\omega}(t)| / (T-t) \quad (4.4)$$

причем $\dot{m} = 6|\mathbf{L}(t)| / (T-t)^2 - 12s_{\text{rem}}(t) / (T-t)^3$, $T = \sqrt{6FC\sqrt{k_0}}$ ($m < 0$ при оптимальной остановке вращения); $T-t = t_{\text{rem}}$ – оставшееся для управления время, за которое необходимо закончить переориентацию. Знак управляющего момента \mathbf{M} меняется, когда $s_{\text{rem}}(t) = 2|\mathbf{L}(t)|(T-t)/3$. Если $s_{\text{rem}}(t) = |\mathbf{L}(t)|(T-t)/2$, то $m(t) = \text{const}$ до конца разворота.

Оптимальный закон терминального управления запишем так:

$$\mathbf{M}(t) = \begin{cases} m(t)(\mathbf{L}_{\text{des}} - \mathbf{L})/|\mathbf{L}_{\text{des}} - \mathbf{L}|, & \text{если } m(t) > 0 \text{ \& \& } |\mathbf{L}| < |\mathbf{L}_{\text{des}}| \\ m(t)\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda, & \text{если } m(t) > 0 \text{ \& \& } |\mathbf{L}| > |\mathbf{L}_{\text{des}}| \\ m(t)\mathbf{L}/|\mathbf{L}|, & \text{если } m(t) \leq 0 \text{ \& \& } |\mathbf{L} - \mathbf{L}_{\text{des}}| = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

где $m(t)$ определяется по формуле (4.4) (F – постоянный параметр); орт $\mathbf{p}^* = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{in}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{in}} \circ \Lambda$ задает желаемое направление кинетического момента при оптимальном навещении (оно берется в качестве “прицельного”), которого надо достигнуть.

Алгоритм расчета $m(t)$ использует продолжительность t_{rem} , так как она определяет насколько быстро следует увеличивать (или уменьшать) модуль кинетического момента, чтобы разворот оказался оптимальным. На заключительной стадии разворота за время t_{rem} необходимо полностью остановить вращение (до нуля снизить угловую скорость).

Для этапа торможения формула (4.4) интерпретируется следующим образом. Обозначим $m(\mathbf{L}) = |J_{SC}\boldsymbol{\omega}(t)| / (t-T)$, $m(s_{\text{rem}}) = 2(s(t) - F) / (T-t)^2$ (во время остановки вращения $m(t) < 0$), причем $T = \sqrt{6FC\sqrt{k_0}}$. Тогда если $|m(s_{\text{rem}})| > |m(\mathbf{L})|$, то остановку вращения выполняют медленнее, но если $|m(\mathbf{L})| > |m(s_{\text{rem}})|$, то торможение необходимо форсировать, чтобы успеть полностью ликвидировать угловую скорость к моменту, когда $s(t) = F$ (и $\Lambda = \Lambda_f$); если у нас $|m(s_{\text{rem}})| = |m(\mathbf{L})|$, то $m(t) = m(\mathbf{L}) = m(s_{\text{rem}})$ и $\dot{m} = 0$. Следовательно, оптимальным считаем $m(t) = 4m(\mathbf{L}) - 3m(s_{\text{rem}})$. Величины $m(s_{\text{rem}})$ и $m(\mathbf{L})$ определяются независимо из следующих требований: обеспечения терминального условия $s(t) = F$ (т.е. $s_{\text{rem}}(T) = 0$ и $\Lambda = \Lambda_f$) и необходимости полностью затормозить вращение к оптимальному сроку T (чтобы $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$).

В случае динамически симметричного тела (когда $J_2 = J_3$, OX – ось симметрии) величина s_{rem} определяется непосредственно (без интегрирования модуля кинетическо-

го момента) по текущему положению $\Lambda(t)$ сравнением его с требуемым Λ_f . Запишем следующие соотношения:

$$s_{\text{rem}} = \int_0^T |\mathbf{L}(t)| dt = J_2 \theta, \quad \sin \vartheta = \sqrt{J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2} / |\mathbf{L}|, \quad \sin \frac{\theta}{2} \sin \vartheta = \sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2}$$

где θ – угол поворота вокруг \mathbf{L} при вращении из положения $\Lambda(t)$ в положение Λ_f ($0 \leq \theta \leq \pi$); ϑ – угол отклонения оси OX от \mathbf{L} ; $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ – элементы кватерниона доворота $\tilde{\Lambda}(t) \circ \Lambda_f$. Откуда

$$s_{\text{rem}}(t) = 2J_2 \arcsin(|J_{SC} \boldsymbol{\omega}(t)| \sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2} / \sqrt{J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2})$$

Предложенное уточнение $m(t)$ значительно снижает погрешность переориентации и увеличивает надежность выполнения терминальных условий $\Lambda(T) = \Lambda_f, \boldsymbol{\omega}(T) = 0$ (направление момента \mathbf{M} по-прежнему определяется кватернионом Λ или векторной функцией $\mathbf{p}(t)$). Терминальное управление, основанное на текущих значениях фазовых переменных Λ и $\boldsymbol{\omega}$, и применение закона (4.4), (4.5) для формирования необходимого управляющего момента \mathbf{M} улучшает характеристики алгоритма управления. В случае осевой симметрии КА описанное решение отличается от [11], так как все управляющие переменные $M_i(t)$ – непрерывные функции времени.

5. Данные математического моделирования. Для примера рассмотрим разворот на 180° в положение, соответствующее кватерниону Λ_f с элементами $\lambda_0 = 0; \lambda_1 = 0.707107; \lambda_2 = 0.59; \lambda_3 = 0.39$. В исходном положении направления одноименных осей инерциального I и связанного базисов совпадают, и $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$. Численное решение задачи управляемого разворота в постановке (1.1)–(1.6) приведем для случая, когда $k_0 = 4$ с/Вт, а характеристики КА приняты следующими: $J_1 = 77544$ кг · м², $J_2 = 228466$ кг · м², $J_3 = 175683$ кг · м², $u_0 = 0.25$ Н/√кг.

При решении двухточечной краевой задачи разворота в (2.7) полагаем $b(t) = \text{const}$ (и $|\mathbf{L}| = \text{const}$), так как характер поведения функции $b(t)$ не влияет на искомое значение \mathbf{p}_0 [18]. Поиск \mathbf{p}_0 начнем с решения той же задачи для динамически симметричного тела с моментами инерции J_1 и J , где J – момент инерции относительно поперечной оси, равный среднему значению между J_2 и J_3 (исследователи нередко применяют принцип осреднения [32]). Допустимым является значение $J = (J_2 + J_3)/2$, хотя чаще используют следующую величину [8]

$$J = \frac{J_2 J_3}{J_2 + J_3 - J_1} (\sqrt{(1 - J_1/J_2)(1 - J_1/J_3)} + 1)$$

Предположив, что КА – динамически симметричное тело, решаем систему (4.3). Найденные \mathbf{p}_0 и β принимаем за начальное приближение к истинным значениям, соответствующим оптимальному решению. Они уточняются до тех пор, пока не будут удовлетворять системе (1.2), (2.7), (3.2) с учетом $b(t) = \text{const}$ (что соответствует $\mathbf{M} = 0$) при условиях $\Lambda(0) = \Lambda_{in}, \Lambda(t_{pr}) = \Lambda_f$, предъявляемых к вращению КА. Полагаем $b(t) = J\beta/T$. Зная \mathbf{p}_0 и угол β , начальные скорости $\boldsymbol{\omega}_{st}$ рассчитываются по выражениям:

$$\boldsymbol{\omega}_{1st} = \frac{J\beta}{J_1 T} p_{10}, \quad \boldsymbol{\omega}_{2st} = \frac{J\beta}{J_2 T} p_{20}, \quad \boldsymbol{\omega}_{3st} = \frac{J\beta}{J_3 T} p_{30} \quad (5.1)$$

(при нахождении \mathbf{p}_0 время T принималось равным $T = 200$ с). Прогноз движения осуществляем путем интегрирования системы уравнений (1.2), (2.7), (3.2) и $b(t) = J\beta/T$ с начальными условиями $\Lambda(0) = \Lambda_{in}, \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_{st}, \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$. Мерой отдаленности \mathbf{p}_0 и β от истинного решения служит оценка $\varepsilon = \text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{pr} \circ \Lambda_f)$, где Λ_{pr} – наиболее близкое к Λ_f

положение, полученное по результатам моделирования движения КА вокруг центра масс, соответствующего вращению твердого тела по инерции ($M_i = 0$). Значение \mathbf{p}_0 уточняем до тех пор, пока $\varepsilon < \varepsilon_{th}$ (ε_{th} – некоторая близкая к 1 пороговая величина, которая отражает точность найденного решения). Как только условие $\varepsilon \geq \varepsilon_{th}$ будет достигнуто (прогнозируемая ошибка станет удовлетворять заданной точности), истинные значения \mathbf{p}_0 и β (для удовлетворения граничным условиям $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$, $\Lambda(t_{pr}) = \Lambda_f$) считаются найденными, и краевая задача решена. Вектор \mathbf{p}_0 уточняли с помощью следующего рекуррентного правила:

$$\Lambda_t^{(k+1)} = \Lambda_t^{(k)} \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}$$

где $\Lambda_t^{(k)}$ – принимаемый в (4.3) кватернион разворота на k -м приближении. На каждом k -м шаге итераций обновляются элементы кватерниона разворота $\Lambda_t^{(k)}$ (правые части системы (4.3)), из (4.3) мы находим \mathbf{p}_0 , β и угловую скорость ω_{st} (согласно (5.1)) для моделирования неуправляемого вращения, и в результате получаем прогноз Λ_{pr} . Если $\varepsilon < \varepsilon_{th}$, то рассчитывается новый кватернион разворота $\Lambda_t^{(k+1)}$ для следующего $(k+1)$ -го приближения, и процесс уточнения \mathbf{p}_0 возобновляется. В правых частях системы (4.3) для начального приближения взяты элементы кватерниона $\Lambda_t^{(0)} = \tilde{\Lambda}_{in} \circ \Lambda_f$. Итерационный процесс останавливается, когда $\varepsilon \geq \varepsilon_{th}$.

Описанная схема аналогична методу решения уравнения вида $x = g(x)$ для скалярной функции $g(x)$ скалярного (одномерного) аргумента x . В нашем случае аргумент – кватернион Λ_t , а функция – кватернионное произведение $\Lambda_t \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}$ (Λ_f – постоянный кватернион, а Λ_{pr} зависит от аргумента Λ_t через систему (4.3), (5.1) и модель движения, описываемую уравнениями (1.2), (2.7), (3.2) с учетом $b(t) = \text{const} = J\beta/T$). Изменяя Λ_t , получим новый вектор \mathbf{p}_0 (как решение системы (4.3) с новыми правыми частями), и новые начальные скорости ω_{ist} и прогнозируемое значение Λ_{pr} , что приведет к изменению функции $\Lambda_t \circ \tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}$. Как только $\text{sqal}(\tilde{\Lambda}_{pr} \circ \Lambda_f) \geq \varepsilon_{th}$, поиск новых приближений прекращается, и решение \mathbf{p}_0 считается найденным. Поскольку $|\text{vect}(\tilde{\Lambda}_f \circ \Lambda_{pr}^{(k)})| < |\text{vect}\Lambda_t^{(k)}|$ для всех k , то можно констатировать, что процесс приближения \mathbf{p}_0 к истинному решению сходится. Аналогичный способ расчета \mathbf{p}_0 применялся в решении двухточечной краевой задачи разворота для максимального быстрогодействия [8].

После решения краевой задачи разворота из положения $\Lambda(0) = \Lambda_{in}$ в положение $\Lambda(T) = \Lambda_f$ были получены $\mathbf{p}_0 = \{0.485305; 0.126171; 0.865194\}$ и (2.10), $F = 401.63 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$. Соответственно, $m_0 = 92.1 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Значения k_0 и u_0 соответствуют условию $k_0 u_0^2 < 1$. Поэтому оптимальное вращение включает два участка, внутри которых $|\mathbf{M}| = \text{const}$. Реализующееся управление имеет три интервала изменения момента \mathbf{M} – вначале интенсивная раскрутка КА (когда $m(t) = \text{const} = m_0$), участок с квадратичным изменением модуля кинетического момента в середине разворота ($m(t)$ – линейная функция времени, уменьшающаяся с $m(t) = m_0$ до $m(t) = -m_0$), и интенсивное торможение в конце (когда $m(t) = \text{const} = -m_0$). Точкам переключения соответствуют $t_1 = 40.7 \text{ с}$ и $t_2 = 95.0 \text{ с}$. Время оптимального разворота $T = 135.7 \text{ с}$, константа $r_0 = 27.14 \text{ с}$. Максимальная энергия вращения за время разворота $E_{\text{max}} = 92 \text{ Дж}$, кинетический момент достигает максимальной величины $L_{\text{max}} = 5000 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$ при $t = 67.85 \text{ с}$.

Данные математического моделирования движения КА во время оптимального разворота приведены на рис. 3–6. На рис. 3 даны графики изменения угловых скоростей в связанной системе координат $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ по времени (скорости ω_i даны в

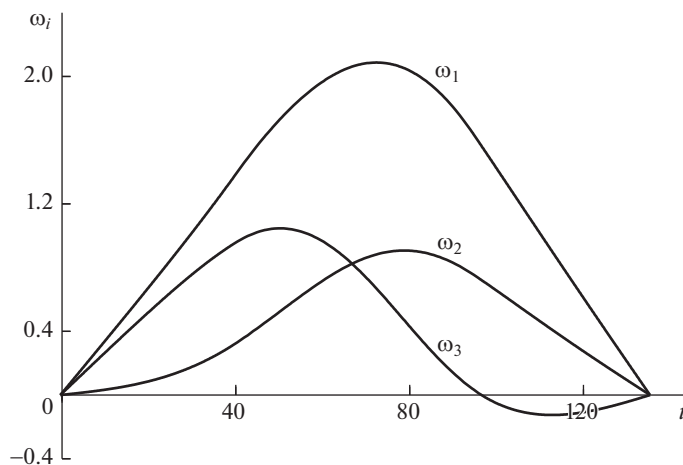


Рис. 3. Изменение угловых скоростей во время разворота.

град./с). Рис. 4 иллюстрирует изменение компонент кватерниона $\Lambda(t)$, отражающего текущую ориентацию КА в процессе совершаемого маневра: $\lambda_0(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$. Значение показателя (1.6), характеризующего экономичность программы управления $\mathbf{M}(t)$, оказалось равным $G = 160.6$ с. Характер поведения составляющих $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ орта \mathbf{p} показан на рис. 5 (значения p_i , как и λ_j , — безразмерные величины), причем проекция p_1 изменяется незначительно. Изменение модуля кинетического момента КА во время оптимального разворота иллюстрирует рис. 6. Свидетельством того, что OX — продольная ось КА, является то обстоятельство, что угловая скорость ω_1 знакопостоянна, и характер ее изменения повторяет поведение модуля кинетического момента (в отличие от ω_2 и ω_3). При оптимальном управлении переменные p_i и λ_j — гладкие функции времени; ω_i — гладкие функции времени (за исключением моментов времени $t = 0$ и $t = T$).

Необходимо заметить, что чем больше коэффициент k_0 , тем больше время разворота T и меньше энергия E_{\max} , максимальный момент $|\mathbf{M}(0)|$ и максимальный модуль кинетического момента L_{\max} . Значение коэффициента k_0 в минимизируемом функционале (1.6) выбрано из условия $E_{\max} < 100$ Дж и $L_{\max} \leq 5000$ Н · м · с (и желательно, чтобы время разворота $T \approx 135$ с).

Заключение. Исследуется задача оптимального управления разворотом твердого тела (в частности, КА) из исходного положения в предписанное конечное положение. Для оптимизации выбраный показатель качества объединяет в заданной пропорции энергетические затраты и время, затраченные на переориентацию КА. Проблемы экономичности управления движением актуальны и в настоящее время, в силу чего рассмотренная задача остается практически важной. Обнаружены ключевые свойства вращения и тип траектории, соответствующей критерию (1.6). Доказано, что постоянной величиной является отношение квадрата модуля кинетического момента к кинетической энергии вращения КА.

Чтобы решить поставленную задачу мы использовали кватернионные модели и принцип максимума. Для сформулированной оптимизационной задачи выписаны функция Гамильтона—Понтрягина, сопряженная система уравнений и аналитические выражения для оптимального управления. На основе необходимых условий опти-

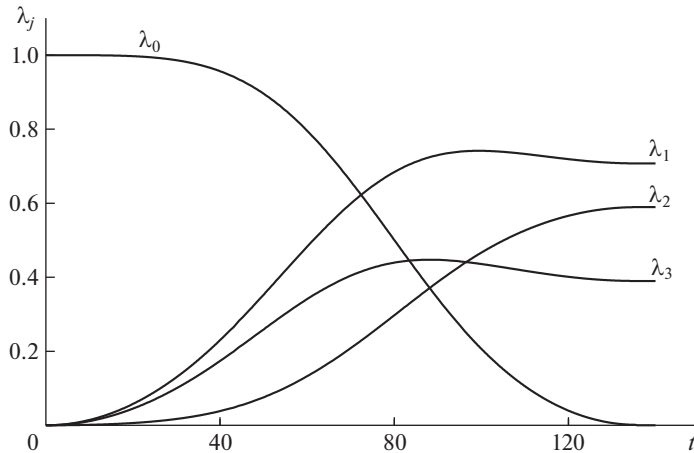


Рис. 4. Изменение компонент кватерниона ориентации $\Lambda(t)$ во время разворота.

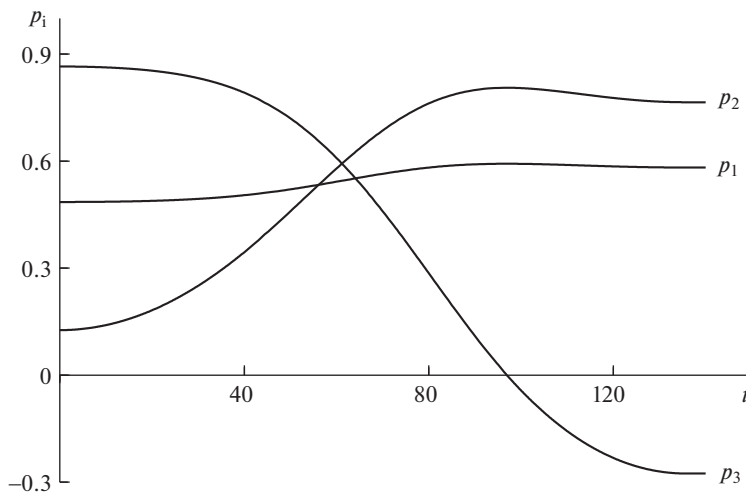


Рис. 5. Вид функций $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ во время оптимального разворота.

мальности определена структура оптимального управления; даны соотношения для определения пространственного движения КА. В статье доказана единственность оптимального решения.

Главное отличие представленного решения — использование нового функционала качества. Введение в минимизируемый показатель времени, затраченного на разворот (со своим коэффициентом пропорциональности), определяет максимальную величину кинетического момента и продолжительность маневра. Другое принципиальное отличие заключается в том, что из-за ограниченности управления во время оптимального разворота не исключено наличие участков вращения с постоянным модулем управляющего момента. В статье определены и подробно описаны все возможные варианты реализующегося оптимального управления, найдено условие (критерий), поз-

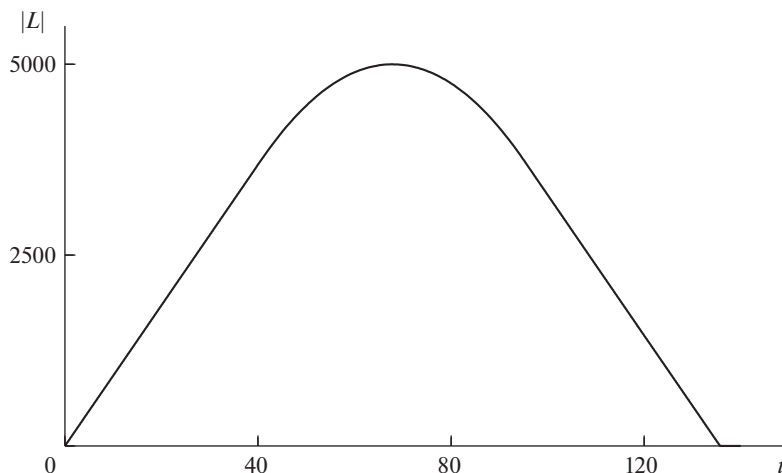


Рис. 6. Изменение модуля кинетического момента при оптимальном управлении.

воляющее определить тип оптимального управления, зная коэффициент k_0 минимизируемого функционала и размер области допустимых управлений. В зависимости от коэффициента k_0 оптимальным может быть один из двух вариантов управления: а) вращение с переменным модулем управляющего момента на протяжении всего маневра; б) управление с участками вращения с постоянным максимально возможным модулем управляющего момента (раскрутка вначале разворота и торможение в конце разворота), причем модуль кинетического момента меняется по квадратичному закону между раскруткой и торможением. Проведены аналитические исследования длительности участков вращения с постоянным максимально возможным модулем управляющего момента и длительности всего разворота в зависимости от коэффициента k_0 минимизируемого функционала и выписаны формулы (в аналитическом виде) для вычисления времени разворота T , длительности участков вращения с постоянным максимально возможным модулем управляющего момента и максимального модуля кинетического момента. Описана реализация программного разворота. Предложено терминальное управление, использующее измерения фазовых переменных.

Полученные результаты отличаются от решения работы [11], где найдено оптимальное релейное управление вместо непрерывного управления, полученного в нашем случае. Кроме того, мы решили задачу в форме синтеза, в явном виде построена зависимость управляющих переменных от фазовых координат. Представлены выражения для расчета основных характеристик поворотного маневра. Описывается вычислительный алгоритм решения краевой задачи для произвольного распределения масс твердого тела. Приведен пример математического моделирования, демонстрирующий поведение параметров движения. В частном случае динамически симметричного тела решение задачи оптимального управления доведено до конца: в аналитическом виде получена система уравнений, позволяющая напрямую найти решение двухточечной краевой задачи и рассчитать ключевые константы закона управления (например, разработанным ранее устройством [33]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sinitin L.I., Kramlikh A.V.* Synthesis of the optimal control law for the reorientation of a nanosatellite using the procedure of analytical construction of optimal regulators // J. Phys.: Conf. Ser.

2021. V. 1745. P. 012053.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012053>
4. *Велищанский М.А., Крищенко А.П., Ткачев С.Б.* Синтез алгоритмов переориентации космического аппарата на основе концепции обратной задачи динамики // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 5. С. 156–163.
 3. *Junkins J.L., Turner J.D.* Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. Elsevier, 1986. 515 p.
 4. *Решмин С.А.* Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в желаемое угловое положение // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 5. С. 30–41.
<https://doi.org/10.1134/S106423071805012X>
 5. *Scrivener S., Thompson R.* Survey of Time-optimal Attitude Maneuvers // J. Guid. Contr. Dyn. 1994. V. 17. № 2. P. 225–233.
 6. *Zhou H., Wang D., Wu B., Ek Poh.* Time-optimal reorientation for rigid satellite with reaction wheels // Int. J. Contr. 2012. V. 85. № 10. P. 1–12.
<https://doi.org/10.1134/S106423071805012X>
 7. *Решмин С.А.* Пороговая абсолютная величина релейного управления при наискорейшем приведении спутника в гравитационно-устойчивое положение // Док. Ак. наук. 2018. Т. 480. № 6. С. 671–675.
<https://doi.org/10.1134/S1028335818060101>
 8. *Левский М.В.* Применение принципа максимума Л.С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 6. С. 144–157.
<https://doi.org/10.1134/S1064230708060117>
 9. *Shen H., Tsiotras P.* Time-optimal Control of Axi-symmetric Rigid Spacecraft with two Controls // AIAA J. Guid. Contr. Dyn. 1999. V. 22. № 5. P. 682–694.
<https://doi.org/10.2514/2.4436>
 10. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое решение задачи оптимального по быстродействию разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 2. С. 131–147.
<https://doi.org/10.7868/S0002338818020117>
 11. *Бранец В.Н., Черток М.Б., Казначеев Ю.В.* Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352–360.
 12. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
 13. *Айпанов Ш.А., Жакытов А.Т.* Метод разделения переменных и его применение для задачи оптимального разворота космического аппарата // Космич. исслед. 2020. Т. 58. № 1. С. 73–84.
<https://doi.org/10.31857/S002342062001001X>
 14. *Стрелкова Н.А.* Об оптимальной переориентации твердого тела // Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы. Пермь: ПГУ, 1990. С. 115–133.
 15. *Левский М.В.* Кинематически оптимальное управление переориентацией космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 1. С. 119–136.
<https://doi.org/10.1134/S1064230714050116>
 16. *Зеленукина О.В., Челноков Ю.Н.* Построение оптимальных законов изменения вектора кинетического момента динамически симметричного твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 4. С. 31–49.
<https://doi.org/10.3103/S0025654411040030>
 17. *Бирюков В.Г., Челноков Ю.Н.* Построение оптимальных законов изменения вектора кинетического момента твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 5. С. 3–21.
<https://doi.org/10.3103/S002565441405001X>
 18. *Левский М.В.* Синтез оптимального управления терминальной ориентацией космического аппарата с использованием метода кватернионов // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 7–24.
<https://doi.org/10.3103/S0025654409020022>
 19. *Levskii M.V.* About Method for Solving the Optimal Control Problems of Spacecraft Spatial Orientation // Probl. Nonlin. Anal. Eng. Syst. 2015. V. 21. № 2. P. 61–75.
 20. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 6. С. 129–145.
<https://doi.org/10.1134/S1064230707020189>

21. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое квазиоптимальное решение задачи поворота осесимметричного твердого тела с комбинированным функционалом // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 3. С. 39–49.
<https://doi.org/10.31857/S0002338820030105>
22. Сапунков Я.Г., Молоденков А.В. Аналитическое решение задачи оптимального в смысле комбинированного функционала разворота осесимметричного космического аппарата // Автоматика и телемеханика. 2021. № 7. С. 86–106.
<https://doi.org/10.31857/S0005231021070059>
23. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3. С. 170–180.
<https://doi.org/10.7868/S0002338815030142>
24. Левский М.В. Использование универсальных переменных в задачах оптимального управления ориентацией космических аппаратов // Мехатрон. автомат. управл. 2014. № 1. С. 53–59.
25. Quang M. Lam. Robust and adaptive reconfigurable control for satellite attitude control subject to under-actuated control condition of reaction wheel assembly // Math. Eng. Sci. Aerosp. 2018. V. 9. № 1. P. 47–63.
26. Levskii M.V. Special aspects in attitude control of a spacecraft, equipped with inertial actuators // J. Comp. Sci. Appl. Inform. Technol. 2017. V. 2. № 4. P. 1–9.
27. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
28. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974. 488 с.
29. Любушин А.А. О применении модификаций метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления // ЖВМиМФ. 1982. Т. 22. № 1. С. 30–35.
30. Левский М.В. Способ управления разворотом космического аппарата и система для его реализации. Патент на изобретение РФ № 2114771 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 1998. № 19. С. 234–236.
31. Левский М.В. Система управления пространственным разворотом космического аппарата. Патент на изобретение РФ № 2006431 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 1994. № 2. С. 49–50.
32. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
33. Левский М.В. Устройство формирования параметров регулярной прецессии твердого тела. Патент на изобретение РФ № 2146638 // Бюллетень “Изобретения. Заявки и патенты”. 2000. № 8. С. 148.