ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 5, с. 79–88

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ТОНКОГО КРУГЛОГО ИДЕАЛЬНО ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

И. М. Цветков[a,*]

[a]*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**e-mail: cvetkoviv@yandex.ru*

Поступила в редакцию 30.08.2022 г.
После доработки 11.11.2022 г.
Принята к публикации 17.11.2022 г.

Рассматривается напряженно-деформированное состояние, возникающее при динамическом растяжении однородного круглого слоя из несжимаемого идеально жесткопластического материала, подчиняющегося критерию Мизеса–Генки. Верхнее и нижнее основания свободны от напряжений, на боковой границе задана радиальная скорость. Учитывается возможность утолщения либо утоньшения слоя, что моделирует шейкообразование и дальнейшее развитие шейки. Выявлено два характерных режима растяжения – один связан с достаточно большой скоростью удаления боковой границы слоя от центра, второй с ускорением. Во втором случае проведен анализ с использованием метода асимптотического интегрирования, позволяющий приближенно найти параметры напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: идеальная пластичность, предел текучести, круглый слой, растяжение, шейка, квазистатика, динамика, скорость деформации, напряжение, асимптотические разложения

DOI: 10.31857/S0572329922600682, **EDN:** QWQFKO

Интерес к динамическим задачам пластического течения возникает в самых разных областях [1, 2] – оптимизация быстрых производственных процессов, поведение грунтов при внезапных приложениях нагрузок, безопасность строений подверженных ударам или авариям. Локализация деформаций, шейкообразование – результат неустойчивости пластического течения и часто является предвестником разрушения конструкции.

В [3, 4] проведен анализ задач о динамическом растяжении идеально жесткопластических стержня и бесконечного листа в осесимметричной и плоской постановках соответственно. На основе метода асимптотического интегрирования, в случае когда ускорение торцов достаточно высоко, получены приближенно параметры напряженно-деформированного состояния, в том числе аппроксимация границы области квадратичным трехчленом.

Настоящая работа посвящена задаче об осесимметричном растяжении идеально жесткопластического слоя. С использованием метода асимптотического интегрирования, показано, что при переходе от квазистатики к динамическому деформированию прослеживается два характерных сценария растяжения. Каждый из них связан с достижением некоторой безразмерной функцией времени определенного порядка малости по отношению к малому геометрическому параметру, характеризующую форму слоя. Одна из этих функций представляет собой обратное число Эйлера, другая зависит от ускорения, с которым боковая поверхность удаляется от центра. При реализации режима связанного с достижением ускорения своих критических значений, приближенно вычислены параметры напряженно-деформированного состояния, в частности получена аппроксимация формы границы слоя, позволяющая моделировать шейкообразование.

1. Постановка задачи о динамическом растяжении круглого слоя. Рассмотрим деформирование во времени круглого слоя из однородного несжимаемого идеально жесткопластического материала, подчиняющегося критерию пластичности Мизеса–Генки с плотностью ρ и пределом текучести σ_s. Область Ω_t в $\mathbb{R}^3$, занятая слоем в момент t, симметрична относительно оси z, имеет неизменный во времени объем $|\Omega|$ и в цилиндрической системе координат, связанной с осью симметрии слоя, имеет вид

$$\Omega_t = \{(r,\theta,z)\,|\,0 \le r \le R(t), 0 \le \theta < 2\pi, -h(t,r) \le z \le h(t,r)\} \tag{1.1}$$

$$|\Omega| = 4\pi \int_0^{R(t)} rh(t,r)dr = 2\pi R^2(t)h^*(t) \tag{1.2}$$

Средняя высота слоя h^* определяется в (1.2) таким образом, чтобы объем слоя цилиндрической формы радиуса $R(t)$ и высоты $2h^*(t)$ равнялся $|\Omega|$.

Верхнее и нижнее основания слоя $z = \pm h(r,t)$ свободны от напряжений, а на боковой поверхности $r = R(t)$ задана радиальная скорость:

$$r = R(t){:}\ v_r = V(t),\ V(t) > 0 \tag{1.3}$$

Итак, рассматривается растяжение слоя с заданной кинематикой движения его боковой поверхности. Функции $R(t)$ и $h^*(t)$ являются соответственно монотонно возрастающей и монотонно убывающей. Ограничимся рассмотрением поля вектора скорости следующего вида: $v(x,t) = (v_r(r,z,t), 0, v_z(r,z,t))$. Это порождает тензор скоростей деформации $\underset{\sim}{v}$ с ненулевыми компонентами, где запятая в индексе обозначает дифференцирование по соответствующей переменной

$$v_{rr} = v_{r,r}, \quad v_{\theta\theta} = \frac{v_r}{r}, \quad v_{zz} = v_{z,z}, \quad v_{rz} = \frac{1}{2}(v_{r,z} + v_{z,r}) \tag{1.4}$$

В силу несжимаемости $\mathrm{tr}\underset{\sim}{v} = 0$.

Представим симметричный тензор напряжений $\underset{\sim}{\sigma}(\mathbf{x},t)$ как сумму шаровой и девиаторной частей: $\underset{\sim}{\sigma} = -p\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{s}$, где p – давление, $\underset{\sim}{I}$ – единичный тензор второго ранга, $\mathrm{tr}\underset{\sim}{s} = 0$. Определим интенсивности скоростей деформаций v_u и напряжений σ_u:

$$v_u = \sqrt{\underset{\sim}{v} : \underset{\sim}{v}}, \quad \sigma_u = \sqrt{\underset{\sim}{s} : \underset{\sim}{s}} \tag{1.5}$$

Векторные определяющие соотношения идеально жесткопластической среды

$$v_u\underset{\sim}{s} = \sigma_u\underset{\sim}{v} \tag{1.6}$$

тензорно линейны, следовательно ненулевыми у девиатора $\underset{\sim}{s}$ будут те же компоненты, что и у тензора $\underset{\sim}{v}$. Выражая $s_{\theta\theta} = -s_{rr} - s_{zz}$, оставим у девиатора независимыми компоненты s_{rr}, s_{rz}, s_{zz}. Тогда определяющее соотношение $\sigma_u = \sigma_s$, являющееся условием пластичности Мизеса–Генки, запишется следующим образом:

$$s_{rr}^2 + s_{zz}^2 + s_{rr}s_{zz} + s_{rz}^2 = \tau_s^2 \tag{1.7}$$

Исключая интенсивности σ_u и v_u, из соотношений (1.6) можно образовать независимые пропорции $s_{rr}v_{zz} = s_{zz}v_{rr}$, $s_{rz}v_{rr} = s_{rr}v_{rz}$, которые с учетом связей (1.4) преобразуются к виду:

$$s_{rr}v_{z,z} = s_{zz}v_{r,r}, \quad s_{rr}(v_{r,z} + v_{z,r}) = 2s_{rz}v_{r,r} \tag{1.8}$$

Выпишем условие несжимаемости, а также два уравнения движения в осесимметричном случае:

$$v_{r,r} + \frac{v_r}{r} + v_{z,z} = 0 \tag{1.9}$$

$$-p_{,r} + s_{rr,r} + s_{rz,z} + \frac{1}{r}(2s_{rr} + s_{zz}) = \rho(v_{r,t} + v_r v_{r,r} + v_z v_{r,z}) \tag{1.10}$$

$$-p_{,z} + s_{rz,r} + s_{zz,z} + \frac{s_{rz}}{r} = \rho(v_{z,t} + v_r v_{z,r} + v_z v_{z,z}) \tag{1.11}$$

Нелинейная система шести уравнений (1.7)–(1.11) замкнута относительно шести функций v_r, v_z, p, s_{rr}, s_{rz}, s_{zz} зависящих от r, z и t в области Ω_t с заранее неизвестной частью границы $z = \pm h(r,t)$, которая характеризуется нормалью $\mathbf{n}$:

$$n_r = -\frac{\partial h/\partial r}{\sqrt{1 + (\partial h/\partial r)^2}}, \quad n_z = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + (\partial h/\partial r)^2}}$$

На этих частях границы выполнены условия равенства нулю двух компонент вектора напряжений:

$$z = \pm h(r,t)\colon (p - s_{rr})\frac{\partial h}{\partial r} \pm s_{rz} = 0, \quad -s_{rz}\frac{\partial h}{\partial r} \pm (-p + s_{zz}) = 0 \tag{1.12}$$

Также, выполняется кинематическое граничное условие на боковой границе слоя (1.3).

Для строгой постановки начально краевой задачи, рассматриваемой при $t > 0$, необходимо задать функцию $h(r,0) \equiv h_0(r)$, $0 \le r < r_0$, удовлетворяющую интегральному условию

$$\frac{|\Omega|}{4\pi} = \int_0^{r_0} r h_0(r) dr$$

Из симметричности области Ω вытекает, что функции s_{rz}, v_z антисимметричны по z.

2. Квазистатический режим растяжения. Квазистатическая постановка задачи о растяжении идеально жесткопластического слоя отличается от динамической тем, что в правых частях уравнений (1.10), (1.11) стоят нули, т.е. время t становится параметром, входящим в решения неявно через V, h и R. Уравнения (1.10) и (1.11) превращаются в уравнения равновесия.

Аналитическое решение квазистатической задачи несложно получить, если в начальный момент времени слой имел цилиндрическую форму, т.е. $h_0^* = \text{const}$. Будем обозначать параметры этого решения верхним индексом “qs”. Имеем:

$$v_r^{qs} = \frac{Vr}{R}, \quad v_z^{qs} = -2\frac{Vz}{R} \tag{2.1}$$

$$s_{rz}^{qs} = 0, \quad s_{rr}^{qs} = s_{\theta\theta}^{qs} = \frac{\tau_s}{\sqrt{3}}, \quad s_{zz}^{qs} = p^{qs} = -\frac{2\tau_s}{\sqrt{3}} \tag{2.2}$$

Напряженное состояние (2.2) однородно и не зависит от заданной скорости V.

Интегрируя задачу Коши

$$\frac{dr}{dt} = v_r^{qs}(r), \quad \frac{dz}{dt} = v_z^{qs}(z); \quad r|_{t=0} = r_0, \quad z|_{t=0} = z_0$$

найдем лагранжев закон движения частиц (при интегрировании полагаем, что V и R постоянны):

$$r^{qs} = r_0 \exp\left(\frac{Vt}{R}\right), \quad z^{qs} = z_0 \exp\left(-2\frac{Vt}{R}\right)$$

Траектории частиц – семейство гипербол $r^2 z = r_0^2 z_0$. Независимость r^{qs} от z_0 и z^{qs} от r_0 свидетельствует о том, что Ω_t представляет собой вытягивающийся со временем цилиндр.

Кинематика (2.1) обеспечивает отсутствие жестких зон в Ω_t, так как согласно (1.4) и (1.5) $v_u^{qs} = \sqrt{6}\frac{V}{R} > 0$ во всех точках слоя.

Исследуем далее вопрос о том, при каких соотношениях безразмерных параметров системы (или на каких временах) выписанное выше квазистатическое приближение является главным и им можно ограничиться в технологических расчетах, а когда инерционные эффекты, вызванные слагаемыми в правых частях уравнений (1.10) и (1.11), начинают играть соизмеримую роль в распределении напряжений и движении точек слоя.

3. Асимптотическое разложение. Обратимся к динамическим уравнениям (1.10), (1.11) и образуем три явно зависящих от времени безразмерных параметра:

$$\alpha(t) = \frac{h^*(t)}{R(t)} \ll 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{\rho V^2(t)}{\tau_s}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\rho \dot{V}(t) h^*(t)}{\tau_s} \tag{3.1}$$

Первый из них – малый геометрический параметр, второй – обратное число Эйлера. На разных интервалах процесса растяжения порядок малости α по отношению к ε_1 и ε_2 может меняться. От этого зависит вклад инерционных слагаемых в уравнениях движения.

Представим разложения шести неизвестных функций в виде регулярных асимтотических рядов по целым степеням малого асимптотического параметра α (в [3, 4] аналогичные по структуре разложения использовались при анализе растяжения осесимметричного стержня и бесконечного листа, в [5] разложения использовались в анализе задачи Прандтля):

$$\begin{gathered}
v_r(r,z,t) = V(t)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t) v_\xi^{\{n\}}(\xi,\zeta,\tau) \\
v_z(r,z,t) = V(t)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t) v_\zeta^{\{n\}}(\xi,\zeta,\tau) \\
s_{(rr;rz;zz)}(r,z,t) = \tau_s\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t) s_{(\xi\xi;\xi\zeta;\zeta\zeta)}^{\{n\}}(\xi,\zeta,\tau) \\
p(r,z,t) = \tau_s\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(t) p^{\{n\}}(\xi,\zeta,\tau)
\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\xi = \frac{\alpha(t) r}{h^*(t)} = \frac{r}{R(t)}, \quad \zeta = \frac{z}{h^*(t)}, \quad \tau = \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}}\frac{t}{h^*(t)} \tag{3.3}$$

Безразмерные коэффициенты рядов (3.2) (с верхними индексами) зависят от новых безразмерных координат ξ, ζ и безразмерного времени τ. Область слоя Ω_t (1.1) в любой момент времени описывается неравенствами

$$\Omega_\tau = \{(\xi,\theta,\zeta)\,|\,0 \le \xi \le 1,\ 0 \le \theta < 2\pi,\ -\eta(\xi,\tau) \le \zeta \le \eta(\xi,\tau)\} \tag{3.4}$$

$$\eta(\xi,\tau) = \frac{h(r,t)}{h^*(t)}, \quad \int_0^1 \xi\eta(\xi,\tau)d\xi = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial h}{\partial r} = \alpha\frac{\partial\eta}{\partial\xi} \tag{3.5}$$

Отметим что порядок малости по α безразмерных производных $\partial h/\partial r$ и $\partial\eta/\partial\xi$ разный. Так как функция $\tau(t)$ монотонно возрастает, якобиан замены переменных $\partial(\xi,\zeta,\tau)/\partial(r,z,t)$ отличен от нуля, т.е. она невырождена.

Имеет место замена дифференциальных операторов:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R(t)}\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{\alpha(t)}{h^*(t)}\frac{\partial}{\partial\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{h^*(t)}\frac{\partial}{\partial\zeta} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{V\xi}{R}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{2V\zeta}{R}\frac{\partial}{\partial\zeta} + \left(\sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}}\frac{1}{h^*} + \frac{2V\tau}{R}\right)\frac{\partial}{\partial\tau} \tag{3.7}$$

Из определения малого параметра (3.1) и средней высоты слоя (1.2) следуют кинетические соотношения:

$$\dot\alpha = -\frac{3\alpha V}{R}, \quad \dot h^* = -2\frac{h^* V}{R} \tag{3.8}$$

Подставим ряды (3.2) в пять уравнений (1.7)–(1.11) и граничные условия (1.3), (1.12). С учетом формул (3.5)–(3.8) получим систему, состоящую из уравнений движения (1.10), (1.11)

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\left(-\alpha p^{\{n\}}_{,\xi} + \alpha s^{\{n\}}_{\xi\xi,\xi} + s^{\{n\}}_{\xi\zeta,\zeta} + \frac{1}{\xi}(2\alpha s^{\{n\}}_{\xi\xi} + \alpha s^{\{n\}}_{\zeta\zeta})\right) = \\ = \varepsilon_1\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}(-3nv^{\{n\}}_{\xi} - \xi v^{\{n\}}_{\xi,\xi} + 2\zeta v^{\{n\}}_{\xi,\zeta} + 2\tau v^{\{n\}}_{\xi,\tau}) + \\ + \sqrt{\varepsilon_1}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v^{\{n\}}_{\xi,\tau} + \varepsilon_1\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n}v^{\{j\}}_{\xi}v^{\{n-j\}}_{\xi,\xi} + \varepsilon_1\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n}v^{\{j\}}_{\zeta}v^{\{n-j\}}_{\xi,\zeta} + \varepsilon_2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v^{\{n\}}_{\xi}\end{gathered} \tag{3.9}$$

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(-p^{\{n\}}_{,\zeta} + \alpha s^{\{n\}}_{\xi\zeta,\xi} + s^{\{n\}}_{\zeta\zeta,\zeta} + \frac{\alpha}{\xi}s^{\{n\}}_{\xi\zeta}) = \\ = \varepsilon_1\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}(-3nv^{\{n\}}_{\zeta} - \xi v^{\{n\}}_{\zeta,\xi} + 2\zeta v^{\{n\}}_{\zeta,\zeta} + 2\tau v^{\{n\}}_{\zeta,\tau}) + \\ + \sqrt{\varepsilon_1}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v^{\{n\}}_{\zeta,\tau} + \varepsilon_1\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n}v^{\{j\}}_{\xi}v^{\{n-j\}}_{\zeta,\xi} + \varepsilon_1\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\sum_{j=0}^{n}v^{\{j\}}_{\zeta}v^{\{n-j\}}_{\zeta,\zeta} + \varepsilon_2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v^{\{n\}}_{\zeta}\end{gathered} \tag{3.10}$$

условия несжимаемости (1.9), которое в силу линейности, может быть записано в виде рекуррентной цепочки (коэффициенты с отрицательными индексами далее всюду считаются равными нулю)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(v^{\{n-1\}}_{\xi,\xi} + \frac{1}{\xi}v^{\{n-1\}}_{\xi} + v^{\{n\}}_{\zeta,\zeta}\right)\alpha^n = 0 \Leftrightarrow v^{\{n-1\}}_{\xi,\xi} + \frac{1}{\xi}v^{\{n-1\}}_{\xi} + v^{\{n\}}_{\zeta,\zeta} = 0, \quad n \ge 0 \tag{3.11}$$

критерия Мизеса–Генки (1.7)

$$\begin{gathered}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n s^{\{n\}}_{\xi\xi}\right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n s^{\{n\}}_{\zeta\zeta}\right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n s^{\{n\}}_{\xi\xi}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n s^{\{n\}}_{\zeta\zeta}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n s^{\{n\}}_{\xi\zeta}\right)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow (s^{\{0\}}_{\xi\xi})^2 + (s^{\{0\}}_{\zeta\zeta})^2 + s^{\{0\}}_{\xi\xi}s^{\{0\}}_{\zeta\zeta} + (s^{\{0\}}_{\xi\zeta})^2 = 1,\end{gathered} \tag{3.12}$$

$$\sum_{j=0}^{n}(s_{\xi\xi}^{\{j\}}s_{\xi\xi}^{\{n-j\}} + s_{\zeta\zeta}^{\{j\}}s_{\zeta\zeta}^{\{n-j\}} + s_{\xi\xi}^{\{j\}}s_{\zeta\zeta}^{\{n-j\}} + s_{\xi\zeta}^{\{j\}}s_{\xi\zeta}^{\{n-j\}}) = 0, \quad n \ge 1$$

условия соосности девиатора напряжений и тензора скоростей деформаций (1.8)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v_{\zeta,\zeta}^{\{n\}}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n s_{\zeta\zeta}^{\{n\}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1} v_{\xi,\xi}^{\{n\}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=0}^{n} s_{\xi\xi}^{\{j\}} v_{\zeta,\zeta}^{\{n-j\}} = \sum_{j=0}^{n-1} s_{\zeta\zeta}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-1-j\}}, \quad n \ge 0$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n s_{\xi\xi}^{\{n\}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n v_{\xi,\zeta}^{\{n\}} + \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1} v_{\zeta,\xi}^{\{n\}}\right) = 2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n s_{\xi\zeta}^{\{n\}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1} v_{\xi,\xi}^{\{n\}}\right) \Leftrightarrow \tag{3.13}$$

$$\sum_{j=0}^{n} s_{\xi\xi}^{\{j\}} v_{\xi,\zeta}^{\{n-j\}} + \sum_{j=0}^{n-1} s_{\xi\xi}^{\{j\}} v_{\zeta,\xi}^{\{n-1-j\}} = 2\sum_{j=0}^{n-1} s_{\xi\zeta}^{\{j\}} v_{\xi,\xi}^{\{n-1-j\}}, \quad n \ge 0$$

Граничные условия (1.3) имеют вид:

$$\xi = 1: v_{\xi}^{\{0\}} = 1, \quad v_{\xi}^{\{n\}} = 0, \quad n \ge 1 \tag{3.14}$$

Условия того, что верхнее и нижнее основания свободны от напряжений (1.12) следующие:

$$\zeta = \pm\eta(\xi,\tau): \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1}(p^{\{n\}} - s_{\xi\xi}^{\{n\}})\frac{\partial\eta}{\partial\xi} \pm \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n s_{\xi\zeta}^{\{n\}} = 0$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+1} s_{\xi\zeta}^{\{n\}}\frac{\partial\eta}{\partial\xi} \pm \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(-p^{\{n\}} + s_{\zeta\zeta}^{\{n\}}) = 0 \tag{3.15}$$

Безразмерные параметры $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ входят только в уравнения (3.9) и (3.10). На тех или иных временных интервалах порядок их малости по сравнению с $\alpha(t)$ может меняться. От этого зависит учет или неучет слагаемых в правых частях уравнений в процессе приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра.

4. Метод асимптотического интегрирования. Воспользуемся методом асимптотического интегрирования [3–6] задачи (3.9)–(3.15), заключающемся в последовательном решении замкнутых систем уравнений относительно $v_{\xi}^{\{n\}}$, $v_{\zeta}^{\{n\}}$, $s_{\xi\xi}^{\{n\}}$, $s_{\xi\zeta}^{\{n\}}$, $s_{\zeta\zeta}^{\{n\}}$, $p^{\{n\}}$, где $n \ge 0$, в области Ω_τ с заранее неизвестной частью границы $\zeta = \pm\eta(\xi,\tau)$.

Обратимся к уравнению (3.11) при $n = 0$: $v_{\zeta,\zeta}^{\{0\}} = 0$. Отсюда следует, что $v_{\zeta}^{\{0\}} = v_{\zeta}^{\{0\}}(\xi,\tau)$, а с учетом требования антисимметричности по ζ получим $v_{\zeta}^{\{0\}} = 0$.

Из рекуррентной цепочки (3.11) при $n = 1$ и из второго условия (3.13) при $n = 0$ имеем

$$v_{\xi,\xi}^{\{0\}} + \frac{v_{\xi}^{\{0\}}}{\xi} + v_{\zeta,\zeta}^{\{1\}} = 0, \quad s_{\xi\xi}^{\{0\}} v_{\xi,\zeta}^{\{0\}} = 0 \tag{4.1}$$

Перепишем первое уравнение (4.1) следующим образом и запишем следствие второго уравнения

$$\frac{1}{\xi}(\xi v_{\xi}^{\{0\}})_{,\xi} = -v_{\zeta,\zeta}^{\{1\}}, \quad v_{\xi}^{\{0\}} = v_{\xi}^{\{0\}}(\xi,\tau)$$

Таким образом, видно, что $v_{\zeta,\zeta}^{\{1\}}$ является функцией от ξ, τ. Обозначим $v_{\zeta,\zeta}^{\{1\}} = a(\xi,\tau)$, тогда, с учетом нечетности $v_{\zeta}^{\{1\}}$ по ζ, общий вид $v_{\xi}^{\{0\}}$ и $v_{\zeta}^{\{1\}}$ следующий

$$v_\xi^{\{0\}} = -\frac{1}{\xi}\left(\int\limits_0^\xi a(u,\tau)udu - b(\tau)\right), \quad v_\zeta^{\{1\}} = a(\xi,\tau)\zeta \tag{4.2}$$

где $a(\xi,\tau)$ и $b(\tau)$ произвольные функции, удовлетворяющие граничному условию (3.14)

$$-\int\limits_0^1 a(u,\tau)udu + b(\tau) = 1$$

Из физических соображений $\lim\limits_{\xi\to 0} v_\xi^{\{0\}} = 0$, откуда необходимо вытекает $b(\tau) \equiv 0$. Потребуем чтобы решение (4.2) совпало с квазистатическим для чего достаточно положить $a(\xi,\tau)$ константой, таким образом

$$v_\xi^{\{0\}} = \xi, \quad v_\zeta^{\{1\}} = -2\zeta \tag{4.3}$$

Линейные зависимости (4.3) имеют место для любых соотношений порядков малости по α параметров $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$. Рассмотрев первое уравнение в (3.12) и уравнения (3.13) при $n =$ 1, выведем незамкнутую систему уравнений относительно $s_{\xi\xi}^{\{0\}}$, $s_{\xi\zeta}^{\{0\}}$, $s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}$, $v_\xi^{\{1\}}$:

$$(s_{\xi\xi}^{\{0\}})^2 + (s_{\zeta\zeta}^{\{0\}})^2 + s_{\xi\xi}^{\{0\}}s_{\zeta\zeta}^{\{0\}} + (s_{\xi\zeta}^{\{0\}})^2 = 1, \quad -2s_{\xi\xi}^{\{0\}} = s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}, \quad s_{\xi\xi}^{\{0\}}v_{\xi,\zeta}^{\{1\}} = 2s_{\xi\zeta}^{\{0\}} \tag{4.4}$$

Для замыкания системы (4.4) необходимо рассмотреть конкретный режим растяжения. Из (3.9) и (3.10) следует, что на временных интервалах, где одновременно $\varepsilon_1\alpha^2 = o(1)$ и $\varepsilon_2 = o(1)$, после приравнивания нулю коэффициентов при α^0 в (3.9), с учетом (4.3), придем к следующей системе уравнений:

$$(s_{\xi\xi}^{\{0\}})^2 + (s_{\zeta\zeta}^{\{0\}})^2 + s_{\xi\xi}^{\{0\}}s_{\zeta\zeta}^{\{0\}} + (s_{\xi\zeta}^{\{0\}})^2 = 1, \quad -2s_{\xi\xi}^{\{0\}} = s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}, \quad s_{\xi\zeta,\zeta}^{\{0\}} = 0$$

Из последнего уравнения имеем, что $s_{\xi\zeta}^{\{0\}} = s_{\xi\zeta}^{\{0\}}(\xi,\tau)$, а с учетом требования нечетности $s_{\xi\zeta}^{\{0\}}$ по ζ получаем

$$s_{\xi\zeta}^{\{0\}} = 0, \quad s_{\xi\xi}^{\{0\}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad s_{\zeta\zeta}^{\{0\}} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

Таким образом пришли к напряженному состоянию, соответствующему квазистатическому растяжению слоя цилиндрической формы. Также, приравнивая коэффициенты при α^0, из (3.10) следует, что $-p_{,\zeta}^{\{0\}} + s_{\zeta\zeta,\zeta}^{\{0\}} = 0$.

Итак, динамические эффекты начинают играть роль и вносить вклад в напряженно-деформированное состояние, сопоставимый с квазистатикой, если выполняется хотя бы одно из требований: а) параметр ε_1 становится порядка α^n, $n \ge -2$; б) параметр ε_2 становится порядка α^m, $m \ge 0$.

Остановимся в данной работе на случае, когда $\varepsilon_2 = O(1)$ и $\varepsilon_1 = o(\alpha^{-2})$. Рассмотрев коэффициенты при α^0 в (3.9) и (3.10) и, добавив полученные уравнения к (4.4), имеем замкнутую систему относительно $s_{\xi\xi}^{\{0\}}$, $s_{\xi\zeta}^{\{0\}}$, $s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}$, $v_\xi^{\{1\}}$:

$$s_{\xi\zeta,\zeta}^{\{0\}} = \varepsilon_2\xi, \quad -p_{,\zeta}^{\{0\}} + s_{\zeta\zeta,\zeta}^{\{0\}} = 0 \tag{4.5}$$

Первое уравнение (4.5) замыкает систему, а третье служит для определения давления $p^{\{0\}}$.

Решение системы (4.5) следующее:

$$s_{\xi\zeta}^{\{0\}} = \varepsilon_2\xi\zeta, \quad s_{\xi\xi}^{\{0\}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\varepsilon_2^2\xi^2\zeta^2}, \quad s_{\zeta\zeta}^{\{0\}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\varepsilon_2^2\xi^2\zeta^2}$$
$$v_\xi^{\{1\}} = -2\sqrt{3}\frac{\sqrt{1-\varepsilon_2^2\xi^2\zeta^2}}{\varepsilon_2\xi} + f(\xi,\tau) \tag{4.6}$$

где функция $f(\xi,\tau)$ определяется из последующих по α приближений. Заметим, что если формально устремить $\varepsilon_2 \to 0$, то компоненты девиатора (4.6) будут стремиться к квазистатическому решению.

Вид функции $v_\xi^{\{1\}}$ позволяет сделать следующие выводы:

1. Точно однородным граничным условиям на боковой границе слоя $\xi = 1$ удовлетворить не удается.

2. Когда $|\xi| \to 0$, т.е. при стремлении к центру слоя, $|v_\xi^{\{1\}}| \to \infty$. Это говорит о потере асимптотичности в смысле Пуанкаре вблизи точки $\xi = 0$ ряда (3.2) для радиальной скорости v_ξ.

Из этих выводов следует, что использование асимптотических рядов (3.2) вблизи боковой поверхности $\xi = 1$ слоя, т.е. в зоне краевого эффекта и в центре $\xi = 0$, где происходит перестройка течения, неправомерно. По своей геометрии область неприменимости асимптотического разложения напоминает задачу Прандтля [5].

5. Уравнение для определения формы границы слоя. Обратимся к граничным условиям (3.15) на неизвестной границе слоя $\zeta = \pm\eta(\xi,\tau)$. Порядок малости по α производной $\dfrac{\partial\eta}{\partial\xi}$ заранее неизвестен. Предположим сначала, что $\dfrac{\partial\eta}{\partial\xi} \sim 1$, т.е. $\dfrac{\partial h}{\partial r} \sim \alpha$. Тогда в главном по α приближении

$$\zeta = \pm\eta(\xi,\tau)\colon\ p^{\{0\}} - s_{\zeta\zeta}^{\{0\}} = 0, \quad s_{\xi\zeta}^{\{0\}} = 0$$

Но согласно (4.6) компонента $s_{\xi\zeta}^{\{0\}}$ равна нулю только при $\xi = 0$ или при $\eta = 0$. Ни одно из этих уравнений форму границу описывать не может, что говорит о неправомерности предположения $\dfrac{\partial\eta}{\partial\xi} \sim 1$.

Пусть $\dfrac{\partial\eta}{\partial\xi} \sim \dfrac{1}{\alpha}$, т.е. $\dfrac{\partial h}{\partial r} \sim 1$. Тогда, в главном по α приближении, условия (3.15) имеют вид

$$\zeta = \pm\eta(\xi,\tau)\colon -\alpha s_{\xi\zeta}^{\{0\}}\frac{\partial\eta}{\partial\xi} \pm (-p^{\{0\}} + s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}) = 0, \quad \alpha\frac{\partial\eta}{\partial\xi}(p^{\{0\}} - s_{\xi\xi}^{\{0\}}) \pm s_{\xi\zeta}^{\{0\}} = 0 \tag{5.1}$$

Будем работать только с верхней частью границы $\zeta = \pm\eta(\xi,\tau)$ – т.к. нижнее основание получается отражением относительно плоскости $\zeta = 0$, то в уравнениях (5.1) оставим знак “+”. Исключая $p^{\{0\}}$ из равенств (5.1) и подставляя из (4.6) компоненты девиатора напряжений, получаем нелинейное уравнение первого порядка для определения функции $\eta(\xi,\tau)$:

$$\sqrt{3}\alpha\sqrt{1-\varepsilon_2^2\xi^2\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \varepsilon_2\xi\eta\left(1-\alpha^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)^2\right) \tag{5.2}$$

Необходимо учесть также интегральное условие нормировки (3.5). Частную производную можно заменить на обыкновенную, т.к. время в уравнение входит как параметр через известную функцию ε_2 (3.1).

Для приближенного интегрирования уравнения заметим, что если положить $\varepsilon_2 = 0$, то с учетом (3.5) получим $\eta \equiv 1$, что соответствует слою цилиндрической формы в квазистатическом решении. Представим функцию $\eta(\xi,\tau)$ в виде ряда по ε_2:

$$\eta(\xi,\tau) = 1 + \varepsilon_2\eta_1 + \varepsilon_2^2\eta_2 + \ldots, \qquad \varepsilon_2 < 1$$

и подставим в (5.2) и интегральное условие (3.5). В линейном приближении по ε_2 для η_1 будем иметь уравнение $\dfrac{d\eta_1}{d\xi} = \dfrac{\xi}{\sqrt{3}\alpha}$, откуда после интегрирования и нормировки следует параболическая зависимость

$$\eta = 1 + \frac{\varepsilon_2}{2\sqrt{3}\alpha}\left(\xi^2 - \frac{1}{2}\right) \tag{5.3}$$

моделирующая утоньшение слоя в центре и утолщение вблизи его боковой поверхности, т.е. шейкообразование при динамическом растяжении.

Найдем последний из неопределенных коэффициентов главного по α приближения (3.2) – давление $p^{\{0\}}$. Из второго уравнения (4.5) следует, что $-p^{\{0\}} + s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}$ не зависит от ζ, а из первого граничного условия (5.1) то, что эта же комбинация на границе равна $\alpha s_{\xi\zeta}^{\{0\}}\dfrac{\partial\eta}{\partial\xi}$. Следовательно всюду в области Ω_τ:

$$p^{\{0\}} = s_{\zeta\zeta}^{\{0\}} - \alpha s_{\xi\zeta}^{\{0\}}\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\bigg|_{\zeta=\eta} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\varepsilon_2^2\xi^2\zeta^2} - \alpha\varepsilon_2\xi\eta\frac{\partial\eta}{\partial\xi} \tag{5.4}$$

куда из (4.6) подставлены компоненты $s_{\zeta\zeta}^{\{0\}}$, $s_{\xi\zeta}^{\{0\}}$ девиатора напряжений. В (5.4) входит функция удовлетворяющая дифференциальному уравнению (5.2). В качестве приближенного решения может быть использована аппроксимация квадратичным трехчленом (5.3).

Вернемся к размерным переменным зависящим от r, z, t:

$$v_r = \frac{Vr}{R} - \frac{2\sqrt{3}V\tau_s}{\rho\dot{V}r}\sqrt{1-\frac{\rho^2\dot{V}^2r^2z^2}{\tau_s^2R^2}} + Vf(r,t)\frac{h^*}{R} + O((h^*/R)^2)$$

$$v_z = -\frac{2Vz}{R} + O((h^*/R)^2) \tag{5.5}$$

$$s_{rr} = \frac{\tau_s}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{\rho^2\dot{V}^2r^2z^2}{\tau_s^2R^2}} + O(h^*/R), \qquad s_{zz} = -\frac{2\tau_s}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{\rho^2\dot{V}^2r^2z^2}{\tau_s^2R^2}} + O(h^*/R)$$

$$s_{rz} = \frac{\rho\dot{V}rz}{R} + O(h^*/R)$$

Аппроксимация границы $h(r,t)$ квадратичным трехчленом:

$$h(r,t) = h^*\left(1 + \frac{\rho\dot{V}R}{2\sqrt{3}\tau_s}\left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{2}\right)\right), \qquad \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\rho\dot{V}h^*r}{\sqrt{3}\tau_sR} \tag{5.6}$$

Используя эту аппроксимацию можем выписать давление p, где h и $\partial h/\partial r$ следует взять из (5.6):

$$p = -\frac{2\tau_s}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{\rho^2\dot{V}^2r^2z^2}{\tau_s^2R^2}} - \frac{\rho\dot{V}r}{R}h\frac{\partial h}{\partial r} + O(h^*/R)$$

Заметим, что в отличие от квазистатики, все исследуемые компоненты тензора напряжений отличны от нуля, в частности, осевое напряжение σ_{zz} имеет вид $\sigma_{zz} \approx \frac{\rho \dot{V} r}{R} h \frac{\partial h}{\partial r}$.

6. Заключение. Таким образом, найдены условия, связывающие безразмерные параметры задачи, при которых необходим учет динамических эффектов. Показано, что переход от квазистатики к динамическому режиму растяжения круглого слоя, характеризующийся достижением ускорения $\dot{V}$ своих критических значений, влечет за собой образование и рост шейки в его центральной части. Параметры напряженно-деформированного состояния и других инерционных эффектов точно или приближенно найдены выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001.
2. *Ильюшин А.А.* Труды. Т. 4. Моделирование динамических процессов в твердых телах и инженерные приложения. М.: Физматлит, 2009.
3. *Георгиевский Д.В.* Динамические режимы растяжения стержня из идеально жесткопластического материала // Прикладная механика и техническая физика. 2021. 62. № 5. С. 119–130.
https://doi.org/10.15372/PMTF20210513
4. *Цветков И.М.* Динамическое растяжение листа из идеально жесткопластического материала. // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2022. № 6. С. 51–60.
5. *Georgievskii D.V., Müller W.H., Abali B.E.* Thin-layer inertial effects in plasticity and dynamics in the Prandtl problem // ZAMM. 2019. V. 99. № 12. P. 1–11.
https://doi.org/10.1002/zamm.201900184
6. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с. = *Nayfeh A.H.* Introduction To Perturbation Techniques. N.Y.: Wiley, 1981.