ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 5, с. 89–97

УДК 539.3

СТАЦИОНАРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ И ИХ РЕШЕНИЕ

© 2023 г. Л. А. Алексеева[a],*, Б. Н. Алипова[b,c],**

[a]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

[b]Университет Кентукки, Лексингтон, США

[c]Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан

**e-mail: alexeeva@math.kz*

***e-mail: alipova.bakhyt@gmail.com*

Поступила в редакцию 07.09.2022 г.
После доработки 15.10.2022 г.
Принята к публикации 17.10.2022 г.

С использованием модели связанной термоупругости, решены краевые задачи динамики термоупругого полупространства в условиях плоской деформации при периодических поверхностных силовых и тепловых воздействиях, связанных с искомыми граничными функциями линейными алгебраическими соотношениями. Для поставленных краевых задач построены тензоры Грина, используя их свойства, получены аналитические решения этих задач. Для их решения использовался метод неполного разделения переменных, преобразование Фурье и свойства фундаментальных решений. Представленный алгоритм дает решение классических четырех краевых задач термоупругости, а также неклассических со связанными тепловыми и силовыми характеристиками на границе полуплоскости.

Ключевые слова: связанная термоупругость, термонапряженное состояние, периодические краевые задачи, линейно-связанные краевые условия, аналитическое решение

DOI: 10.31857/S0572329922600827, **EDN:** QXHRRR

1. Введение. Среди существующих теорий термоупругости наиболее развитыми для приложений являются теория температурных напряжений (несвязанная термоупругость) и теория связанной термоупругости (СТУ), которые наиболее разработаны в трудах Новацкого В. [1, 2]. В этих теориях система дифференциальных уравнений, описывающая динамику термоупругой среды, является смешанной системой гиперболо-параболического типа. В связи со сложностью построения решений такой системы, обычно уравнения упрощают, пренебрегая воздействием упругих деформаций на температурное поле среды (несвязанная термоупругость). Для такой модели, которая получила название теории температурных напряжений (ТТН), вначале определяется температурное поле, решая параболическое уравнение теплопроводности, а затем можно определить перемещения или скорости точек среды, используя классические уравнения динамики упругого тела, в которые градиент температурного поля входит как массовая сила. Отметим, что на основе этой теории проводятся расчеты температурных напряжений при проектировании различных сооружений и конструкций с использованием как аналитических, так и вычислительных разностных и конечно-элементных методов.

В случае связанной термоупругости (СТУ) не только температура влияет на напряженное состояние среды, но и деформации среды меняют ее температурное поле, что характерно для реальных материалов при высокочастотных деформациях. Это делает теорию температурных напряжений непригодной для изучения высокочастотных термодинамических процессов в телах и средах и требует разработки эффективных методов и алгоритмов решения различных краевых задач связанной термоупругости.

В работах Новацкого В. и др. построены частные решения уравнений СТУ, описывающие плоские, цилиндрические и сферические термоупругие волны и ряд краевых задач. В работах Купрадзе В.Д. и других [3], на основе теории потенциала разработан метод граничных интегральных уравнений (МГИУ) для решения краевых задач связанной термоупругости в пространстве преобразования Лапласа по времени. МГИУ для решения плоских краевых задач связанной термоупругости разработан в [4, 5], а также авторами в [6, 7]. Класс аналитически решенных краевых задач связанной термоупругости невелик и разработка эффективных методов их решения весьма актуальна.

В работе [7] авторами построены фундаментальные и обобщенные решения уравнений движения термоупругой полуплоскости со свободной от напряжений и тепловых потоков границей. Здесь разработан единый алгоритм для решения ряда краевых задач (КЗ) динамики термоупругого полупространства при действии произвольных периодических по времени силах и тепловых потоках на его поверхности, в том числе сингулярных из класса обобщенных функций медленного роста. Постановка краевой задачи, при соответствующем выборе коэффициентов в граничных условиях, включает в себя известные четыре краевые задачи термоупругости, когда из четырех характеристик процесса на поверхности: перемещения, напряжения, температура и тепловой поток — заданы две, одна из которых — тепловая. Для таких краевых задач ранее нами доказаны теоремы единственности, в том числе с учетом ударных термоупругих волн [9–10]. Здесь построено решение для широкого класса краевых условий, линейно связывающих эти четыре характеристики процесса на границе.

2. Уравнения движения термоупругой среды. Изотропная термоупругая среда характеризуется конечным числом положительных термодинамических параметров [4]: массовой плотностью ρ, упругими постоянными Ламе λ и μ, а также термоупругими константами γ, η и κ. Уравнения движения и температурного поля термоупругой среды в декартовой системе координат описывается системой гиперболо-параболических уравнений вида [1, 2]:

$$(\lambda+\mu)u_{j,ji}+\mu u_{i,jj}-\gamma\theta_{,i}+F_i=\rho\dot{u}_i$$

$$\Delta\theta-\varkappa^{-1}\dot{\theta}-\eta\dot{u}_{j,j}+\varkappa^{-1}Q=0 \tag{2.1}$$

Здесь u_j, σ_{ij} — компоненты вектора смещений и тензора напряжений термоупругой среды, $u_{N+1}=\theta$ — температура: $\theta=T-T_0$, где T_0 — температура свободного состояния среды, при которой определены ее параметры; F_i — компоненты массовой силы, Q — мощность теплового источника. Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование (тензорная свертка) от 1 до N. При плоской деформации $N=2$, в общем случае $N=3$. Тензор термоупругих напряжений σ_{ij} связан с перемещением u и температурой θ законом Дюамеля–Неймана:

$$\sigma_{ij}=(\lambda u_{k,k}-\gamma\theta)\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{2.2}$$

Везде символом после запятой обозначены частные производные по координатам: $u_{i,j}=\partial u_i/\partial x_j$, а точкой над символом — дифференцирование по времени: $\dot{u}=\partial u/\partial t$, δ_{ij} — символ Кронекера. Здесь рассмотрим случай плоской деформации ($N=2$). Далее используем обозначения: $c_1=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$, $c_2=\sqrt{\mu/\rho}$ — это скорости распространения дилатационных и сдвиговых волн в упругой среде той же плотности и с теми же параметрами Ламе, $\tilde{\gamma} = \gamma/\rho$.

3. Постановка стационарных краевых задач для термоупругой полуплоскости. Рассматривается термоупругая полуплоскость $S^- = \{(x_1, x_2) = x \in R^2 : x_1 < 0\}$, $n(x_2) = (1, 0)$ – внешняя нормаль к границе полуплоскости. Обозначим действующие на ее границе $S = \{(0, x_2) : |x_2| < \infty\}$ напряжения $F^S(x,t)$ и тепловые потоки $Q^S(x,t)$, которые имеют вид:

$$F^S(x_2,t) = \sigma_{jl}(x,t)\big|_{x_1=0} e_j = p_j(x_2,t)e_j$$

$$Q^S(x,t) = \varkappa \frac{\partial\theta}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0} = q(x_2,t) \tag{3.1}$$

Массовые силы и внутренние тепловые источники отсутствуют:

$$F_i(x,t) = 0, \quad i = 1,2 \quad Q(x,t) = 0 \tag{3.2}$$

Среди действующих нагрузок и тепловых потоков особенно распространены периодические по времени, которые можно разложить в конечные или бесконечные ряды Фурье:

$$p_j(x_2,t) = \sum_n a_{jn} p_{jn}(x_2) e^{-i\omega_n t}, \quad q(x_2,t) = \sum_n b_n q_n(x_2) e^{-i\omega_n t} \tag{3.3}$$

Период колебания $T_n = 2\pi/\omega_n$ каждой гармоники кратен основному периоду колебания T. При периодических воздействиях решение задачи (перемещения и температура) представимы в виде аналогичного ряда Фурье:

$$u_j(x,t) = \sum_n c_{nj} u_{[n]j}(x) e^{-i\omega_n t}, \quad \theta(x,t) = \sum_n d_n \theta_n(x) e^{-i\omega_n t} \tag{3.4}$$

Требуется построить решение уравнений (2.1), удовлетворяющее линейно связанным граничным условиям вида:

$$\alpha_{kj} u_j + \alpha_{k(3)}\theta + \beta_{kj} p_j + \beta_{k(3)} q = f_k(x_2,t), \quad k = 1,2 \tag{3.5}$$

Здесь $f_k(x_2,t)$ – регулярная периодическая по времени функция с тем же периодом T. Предполагается, что комплексные амплитуды гармоник ряда из класса обобщенных функций медленного роста [11]. Также должны выполняться условия затухания решения на бесконечности: при $\|x\| \to \infty$

$$u_i(x,t) \to 0, \quad i = 1,2 \quad \theta(x,t) \to 0 \tag{3.6}$$

Отметим, что граничные условия (3.5) включают в себя постановку четырех классических краевых задач (КЗ) термоупругости соответствующим выбором коэффициентов матриц α, β. В частности, ненулевые компоненты для них будут иметь следующий вид:

КЗ 1: заданы перемещения $u_i(x,t)$ и температура $\theta(x,t)$ на границе, тогда

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1$$

КЗ 2: заданы напряжения $p_j(x,t)$ и тепловой поток $q(x,t)$ на границе:

$$\beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33} = 1$$

КЗ 3: заданы перемещения $u_i(x,t)$ и тепловой поток $q(x,t)$ на границе:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1, \quad \beta_{33} = 1$$

КЗ 4: заданы напряжения $p_j(x,t)$ и температура $\theta(x,t)$ на границе:

$$\beta_{11} = \beta_{22} = 1, \quad \alpha_{33} = 1$$

Очевидно, что варьирование коэффициентов матриц (3.5) дает возможность строить решения многих неклассических краевых задач. Здесь мы рассмотрим общий случай граничных условий вида (3.5).

4. Гармонические колебания. Постановка задач для комплексных амплитуд. В силу линейности уравнений решение краевой задачи можно строить в виде ряда Фурье (3.4), если известно решение периодической краевой задачи для каждой гармоники ряда с краевыми условиями:

$$\alpha_{kj}u_j + \alpha_{k3}\theta + \beta_{kj}p_j + \beta_{k3}q = f_k(x_2)e^{-i\omega t} \quad \text{при} \quad x_1 = 0 \tag{4.1}$$

Предположим здесь, что при $|x_2| \to \infty$

$$f_k(x_2) \sim o(|x_2|^{-1}), \quad k = 1,2,3 \tag{4.2}$$

Решение задачи для каждой гармоники ряда будем искать в аналогичном виде:

$$u(x,t) = u(x_1,x_2)\mathrm{e}^{-i\omega t}, \quad \theta(x,t) = \theta(x_1,x_2)e^{-i\omega t}$$

Требуются определить комплексные амплитуды перемещений и температуры $u(x), \theta(x)$, которые затухают на бесконечности:

$$\text{при} \quad \|x\| \to \infty \quad u_i(x) \to 0 \quad i = 1,2 \quad \theta(\mathrm{x}) \to 0 \tag{4.3}$$

и удовлетворяют определенным условиям излучения, о которых мы скажем ниже. Построим решение этой задачи.

5. Тензор Грина краевой задачи для термоупругой полуплоскости. Для решения этой задачи построим тензор Грина для термоупругой полуплоскости

$$V_i^k(x,t) = V_i^k(x_1,x_2)\exp(-i\omega t)$$

Его комплексная амплитуда $V_i^k(x)$ должна удовлетворять однородным стационарным уравнениям термоупругости:

$$L_{ij}(\partial_1,\partial_2)V_j^k(x_1,x_2) = 0$$

$$L_{3j}(\partial_1,\partial_2)V_j^k(x_1,x_2) = 0 \tag{5.1}$$

$$L_{3j}(\partial_1,\partial_2)V_j^k(x_1,x_2) = 0, \quad i = 1,2 \qquad j,k = 1,2,3,$$

где дифференциальные операторы, как следует из (2.1), имеют вид:

$$L_{ij}(\partial_1,\partial_2) = (\lambda+\mu)\partial_i\partial_j + \left(\mu\Delta - \rho\omega^2\right)\delta_{ij} - \gamma\delta_{j3}\partial_i$$

$$L_{3j}(\partial_1,\partial_2) = \left(\Delta + i\omega\varkappa^{-1}\right)\delta_{j3} + i\omega\eta\left(1-\delta_{j3}\right)\partial_j \tag{5.2}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа. Обозначим Σ_{ij}^m — тензор напряжений, порождаемый тензором V, который определяется законом Дюамеля—Неймана:

$$\Sigma_{ij}^m(x_1,x_2) = \lambda V_{k,k}^m\delta_{ij} - \gamma V_3^m\delta_{ij} + \mu\left(V_{i,j}^m + V_{j,i}^m\right), \quad j = 1,\ 2 \tag{5.3}$$

Соответствующие ему напряжения в точке x на площадке с нормалью $n(x)$ вычисляются по формуле:

$$\Gamma_i^m(x_1,x_2,n) = \Sigma_{ij}^m n_j = D_{ik}(n,\partial_1,\partial_2)V_k^m$$

$$D_{ik}(n,\partial_1,\partial_2) = \lambda n_i\delta_{jk}\partial_j - \gamma n_i\delta_{3k} + \mu n_j\delta_{ki}\partial_j + \mu n_k\partial_i$$

Соответствующий тепловой поток на площадке

$$\Gamma_3^m(n, x_1, x_2) = \varkappa n_k \delta_{j3} \partial_k V_j^m$$

На свободной поверхности $n = (1, 0)$ этот тензор порождает термоупругие напряжения и тепловой поток с амплитудами:

$$\Sigma_{i1}^m(n, 0, x_2) = \left(\lambda V_k^m{}_{,k} - \gamma V_3^m\right)\delta_{i1} + \mu\left(V_i^m{}_{,1} + V_1^m{}_{,i}\right) = \Gamma_i^m(n, 0, x_2) \tag{5.4}$$

$$\varkappa \frac{\partial V_3^m}{\partial x_1} = \Gamma_3^m(n, x_1, x_2) \tag{5.5}$$

Тензор Грина, согласно (3.5), будет удовлетворять следующим условиям на поверхности полуплоскости:

$$\alpha_{kj} V_j^m(0, x_2) + \alpha_{k3} V_3^m(0, x_2) + \beta_{kj}\Gamma_j^m(x_2) + \beta_{k3}\Gamma_3^m(x_2) = \delta_k^m \delta(x_2)$$

$$B_{kj}(n, \partial_1, \partial_2) V_j^m = \delta_\kappa^m \delta(x_2)$$

$$\left(\alpha_{kj} + \alpha_{k3}\delta_{3\mathrm{j}} + \beta_{kl} D_{lj}(n, \partial_1, \partial_2) + \beta_{k3}\delta_{j3}\partial_1\right) V_j^m = \delta_\kappa^m \delta(x_2)$$

$$k, j, m = 1, 2, 3 \tag{5.6}$$

Здесь $B_{kj}(n, \partial_1, \partial_2) = \alpha_{kj} + \alpha_{k3}\delta_{3j} + \beta_{kl} D_{lj}(n, \partial_1, \partial_2) + \beta_{k3}\delta_{j3}\partial_1$. Тензор Грина также должен удовлетворять условиям затухания на бесконечности:

$$V_i^m(x) \to 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \to \infty \tag{5.7}$$

и определенным условиям излучения, описывающим волны, исходящие от границы полуплоскости, которые приведем далее.

6. Построение тензора Грина краевой задачи. Для построения тензора Грина используем преобразование Фурье по горизонтальной координате ($\mathrm{x}_2 \leftrightarrow \xi$) в уравнениях (5.3)–(5.4). Поскольку при преобразовании Фурье производных $\partial/\partial \mathrm{x}_2 \leftrightarrow -\mathrm{i}\xi$ [12], в результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для трансформант Фурье амплитуд колебаний:

$$\begin{gathered}
\left[(\lambda + 2\mu)\frac{d^2}{dx_1^2} - \mu\xi^2 + \rho\omega^2\right]\bar{V}_1^k + i\xi(\lambda + 9\mu)\frac{d\bar{V}_2^k}{dx_1} - \gamma\frac{d\bar{V}_3^k}{dx_1} = 0 \\
i(\lambda + \mu)\frac{d}{dx_1}\xi^2\bar{V}_1^k + \left[-(\lambda + 2\mu)\xi^2 + \mu\frac{d^2}{dx_1^2} + \rho\omega^2\right]\bar{V}_2^k - i\gamma\xi\bar{V}_3^k = 0 \\
i\eta\omega\frac{d}{dx_1}\bar{V}_1^k + \eta\omega\xi\bar{V}_2^k + \left(\frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{i\omega}{\varkappa} - \xi^2\right)\bar{V}_3^k = 0
\end{gathered} \tag{6.1}$$

Граничные условия (5.6) примут вид: при $x_1 = 0$

$$B_{lk}(\partial_1, -i\xi)\bar{V}_k^m(x_1, \xi) = \delta_l^m \qquad l, m, j = 1, 2, 3 \tag{6.2}$$

где $\bar{V}_j^m(x_1, \xi)$ – трансформанта Фурье по x_2 тензора $V_j^m(x_1, x_2)$ при фиксированном m. Для регулярных $f(x_1, x_2)$ они связаны соотношениями:

$$\bar{f}(x_1, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\exp(ix_2\xi)dx_2$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x_1, \xi)\exp(-ix_2\xi)d\xi \tag{6.3}$$

Как известно, частные решения однородной системы (6.1) можно искать в виде:

$$\bar{V}^m(x_1,\xi) = v^m(k)\exp(kx_1) \tag{6.4}$$

где k – корень характеристического уравнения этой системы. Подставляя (6.4) в (6.1), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных $v^m(k)$:

$$\begin{bmatrix} c_1^2k^2+\omega^2-c_2^2\xi^2 & i(c_1^2-c_2^2)\xi k & -\tilde{\gamma}k \\ i(c_1^2-c_2^2)\xi k & \omega^2-c_1^2\xi^2+c_2^2k^2 & -i\tilde{\gamma}\xi \\ i\omega\eta\mathrm{k} & \eta\omega\xi & k^2-\xi^2+i\omega\varkappa^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1^m(k) \\ v_2^m(k) \\ v_3^m(k) \end{bmatrix} = 0 \tag{6.5}$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид алгебраического уравнения для детерминанта матрицы системы (6.5):

$$\det(\xi) = \det[L_{kj}(k,-i\xi)] = 0 \tag{6.6}$$

приводится к виду:

$$c_2^2\left(\zeta^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}\right)\left\{\left(\zeta^2-\frac{\omega^2}{c_1^2}\right)\left(\zeta^2-\frac{i\omega}{\varkappa}\right)-\zeta^2\frac{i\omega\varepsilon}{\varkappa}\right\}=0$$

$$\zeta^2 = \xi^2-k^2 \Rightarrow k^2 = \xi^2-\zeta^2$$

Здесь $\varepsilon = \gamma\eta\varkappa/(\lambda+2\mu)$. Отсюда получаем два действительных корня характеристического уравнения

$$k_1(\xi,\omega) = \pm\sqrt{\xi^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}} \tag{6.7}$$

Затем вычисляем четыре комплексных корня биквадратного уравнения:

$$\left(\zeta^2-\frac{\omega^2}{c_1^2}\right)\left(\zeta^2-\frac{i\omega}{\varkappa}\right)-\frac{i\omega\varepsilon}{\varkappa}\zeta^2 = 0$$

квадраты которых имеют вид:

$$k_2^2 = \xi^2-\frac{1}{2}\left[\frac{\omega^2}{c_1^2}+\frac{i\omega(1+\varepsilon)}{\varkappa}+\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}+\frac{i\omega(1+\varepsilon)}{\varkappa}\right)^2-\frac{4i\omega^3}{\varkappa c_1^2}}\right] \tag{6.8}$$

$$k_3^2 = \xi^2-\frac{1}{2}\left[\frac{\omega^2}{c_1^2}+\frac{i\omega(1+\varepsilon)}{\varkappa}-\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}+\frac{i\omega(1+\varepsilon)}{\varkappa}\right)^2-\frac{4i\omega^3}{\varkappa c_1^2}}\right] \tag{6.9}$$

В силу однородности система уравнений имеет ненулевые решения лишь при $k = k_j$. При этом при выборе корней необходимо, чтобы

$$\operatorname{Re}k_j(\xi,\omega) > 0, \quad \operatorname{Im}k_j \le 0, \quad j = 1,2,3 \tag{6.10}$$

Первое условие обеспечивает затухание решения по глубине при $x_1 \to -\infty$. Второе условие описывает волны, движущиеся от границы, волновой вектор которых должен по оси X_1 иметь отрицательную составляющую. Условия (6.10) являются условиями излучения для поставленной краевой задачи.

Рассмотрим решения линейной однородной системы уравнений (6.6) при $k = k_j$:

$$\begin{bmatrix} c_1^2k_j^2+\omega^2-c_2^2\xi^2 & i(c_1^2-c_2^2)\xi k_j & -\tilde{\gamma}k_j \\ i(c_1^2-c_2^2)\xi k_j & \omega^2-c_1^2\xi^2+c_2^2k_j^2 & -i\tilde{\gamma}\xi \\ i\omega\eta k_j & \eta\omega\xi & k_j^2-\xi^2+i\omega\varkappa^{-1} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} v_1^m(k_j) \\ v_2^m(k_j) \\ v_3^m(k_j) \end{bmatrix}=0$$

В силу линейной зависимости уравнений, достаточно рассмотреть два первых уравнения, полагая $v_3^m(k_j)=1$:

$$\begin{bmatrix} c_1^2k_j^2+\omega^2-c_2^2\xi^2 & i(c_1^2-c_2^2)\xi k_j \\ i(c_1^2-c_2^2)\xi k_j & \omega^2-c_1^2\xi^2+c_2^2k_j^2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} v_1^m(k_j) \\ v_2^m(k_j) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tilde{\gamma}k_j \\ \mathrm{i}\tilde{\gamma}\xi \end{bmatrix}$$

Ее решение, согласно правилу Крамера, имеет вид:

$$v_1^m\left(k_j(\xi,\omega)\right)=v_{1(j)}^m(\xi,\omega)=\frac{\Delta_{j1}(\xi,\omega)}{\Delta_j(\xi,\omega)}$$

$$v_2^{\mathrm{m}}\left(k_j(\xi,\omega)\right)=v_{2(j)}^m(\xi,\omega)=\frac{\Delta_{j2}(\xi,\omega)}{\Delta_j(\xi,\omega)}$$

$$\Delta_j(\xi,\omega)=\det\begin{bmatrix} c_1^2k_j^2+\omega^2-c_2^2\xi^2 & i(c_1^2-c_2^2)\xi k_j \\ i(c_1^2-c_2^2)\xi k_j & \omega^2-c_1^2\xi^2+c_2^2k_j^2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{j1}(\xi,\omega)=\det\begin{bmatrix} \tilde{\gamma}k_j & i(c_1^2-c_2^2)\xi k_j \\ i\tilde{\gamma}\xi & \omega^2-c_1^2\xi^2+ck_j^2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{j2}(\xi,\omega)=\det\begin{bmatrix} c_1^2k_j^2+\omega^2-c_2^2\xi^2 & \tilde{\gamma}k_j \\ i(c_1^2-c_2^2)\xi k_j & i\tilde{\gamma}\xi \end{bmatrix}$$

В результате получим три линейно-независимых решения:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{1(j)}^m &= \frac{\Delta_{j1}(\xi,\omega)}{\Delta_j(\xi,\omega)}\exp(x_1k_j(\xi,\omega)) \\ \bar{V}_{2(j)}^m &= \frac{\Delta_{j2}(\xi,\omega)}{\Delta_j(\xi,\omega)}\exp(x_1k_j(\xi,\omega)) \\ \bar{V}_{3(j)}^m &= \exp(x_1k_j(\xi,\omega)), \quad j=1,2,3 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Следовательно, решение уравнений (6.1), удовлетворяющее, условиям излучения на бесконечности, имеет вид:

$$\bar{V}_{k(j)}^m(x_1,\xi,\omega)=\sum_{\mathrm{j}=1}^{3}A_j^{[m]}v_{k(j)}^m(\xi,\omega)\exp(ik_jx_1), \quad k=1,2,3 \tag{6.12}$$

Здесь $A_j^{[m]}$ – произвольные величины (по индексу в квадратных скобках нет тензорной свертки). Для их определения имеем три граничных условия на свободной поверхности (6.2). Подставляя в них (6.12), получим линейную систему из трех уравнений для определения $A_j^{[m]}$ при фиксированном m:

$$\sum_{j=1}^{3}A_j^{[m]}\sum_{k=1}^{3}B_{lk}\left(k_j,-i\xi\right)v_{k(j)}^m(\xi,\omega)=\delta_l^m, \quad l,m=1,2,3$$

Обозначим

$$b_{lj}^m(\xi,\omega) = \sum_{k=1}^{3} B_{lk}(k_j, -i\xi)\, v_{k(j)}^m(\xi,\omega) \tag{6.13}$$

Тогда система уравнений (6.13) и ее решение имеют следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{3} b_{lj}^m(\xi,\omega)\, A_j^{[m]} = \delta_l^m, \quad l, j = 1,2,3 \tag{6.14}$$

$$A_j^{[m]}(\xi,\omega) = \frac{\det[a_{lj}^{[m]}]}{\det[b_{lj}^{[m]}(\xi,\omega)]}$$

Матрицы $[a_{lj}^{[m]}]$ получаем из матрицы $[b_{lj}^{[m]}(\xi,\omega)]$ заменой j-го столбца на $(\delta_1^m, \delta_2^m, \delta_3^m)^{\mathrm{T}}$. Такую процедуру следует сделать для каждого $m = 1, 2, 3$.

Таким образом, для вычисления трансформанты тензора Грина $\bar{V}_j^m$ поставленной краевой задачи все искомые функции найдены. Переходя к его оригиналу, получим искомый тензор Грина для термоупругого полупространства:

$$V_k^m(x_1, x_2, \omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{3} \int_{-\infty}^{\infty} A_j^{[m]}(\xi,\omega)\, v_{k(j)}^m(\xi,\omega) \exp\left(ik_j(\xi,\omega)\, x_1 - i\xi x_2\right) d\xi \tag{6.15}$$

7. Решение краевых задач для термоупругой полуплоскости. Свойство тензора Грина позволяет построить решение задач стационарных колебаний при произвольных $f_k(x_2)$ в краевых условиях (4.1), удовлетворяющих условиям (4.2). Оно имеет вид тензорно-функциональной свертки

$$u_i(x_1, x_2) = V_i^k(x_1, x_2) \underset{x_2}{*} F_k^S(x_2) + V_i^3(x_1, x_2) \underset{x_2}{*} Q^S(x_2)$$

$$\theta(x_1, x_2) = V_3^k(x_1, x_2) \underset{x_2}{*} F_k^S(x_2) + V_3^3(x_1, x_2) \underset{x_2}{*} Q^S(x_2), \quad i, k = 1,2 \tag{7.1}$$

Здесь берется тензорная свертка по повторяющимся индексам и неполная свертка по x_2, которая имеет следующее интегральное представление:

$$f(x_1, x_2) \underset{x_2}{*} g(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2 - y)\, g(y)\, dy \tag{7.2}$$

При сингулярных воздействиях на дневной поверхности свертки берутся согласно определению свертки в пространстве обобщенных функций [13].

Свертка этого тензора с распределенными или сосредоточенными источниками различного типа позволяет исследовать процессы распространения термоупругих волн при различных динамических воздействиях в термоупругом полупространстве.

8. Заключение. Формулы (7.1) позволяют моделировать динамику термоупругого полупространства при плоской деформации для широкого класса силовых и тепловых воздействий на его поверхности. Операторный метод решения краевых задач, который здесь использовался, значительно упрощает процесс алгоритмизации и программирования краевых задач для проведения компьютерных экспериментов.

Разработанный алгоритм дает решение и нестационарных краевых задач термоупругой полуплоскости. В этом случае построенное решение является преобразованием Фурье по времени нестационарной краевой задачи с нулевыми начальными условиями и произвольными нестационарными возмущениями на границе полупространства (допускающими такое преобразование). Обратное преобразование Фурье по времени построенного решения дает решение нестационарной задачи.

Полученные решения позволяют исследовать термонапряженное состояние массива при действии источников сейсмических волн естественного и искусственного происхождения как на поверхности, так и внутри массива. При внутренних источниках возмущений нужно сначала решить задачу Коши для термоупругого пространства, используя тензор Грина уравнений связанной термоупругости [10]. А затем искать решение исходной задачи в виде суммы этого решения с построенным в этой статье, при заданных граничных условиях с учетом добавки от решения задачи Коши.

Для моделирования сейсмических процессов при землетрясениях, наземных и подземных взрывах полезно использовать аппарат теории обобщенных функций, с использованием моделей импульсных и сосредоточенных источников в телах и средах, представленных в [13]. Поэтому разработанные в этих двух статьях алгоритмы решения должны найти инженерные приложения в задачах геофизики и сейсмостойкого строительства при проектировании наземных и подземных сооружений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
2. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
3. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 664 с.
4. *Dargush G.E., Banerdjee P.K.* Boundary element methods in three-dimensional thermoelasticity // Int. J. Solid Struct. 1990. V. 26. № 2. P. 199–216. https://doi.org/10.1016/0020-7683(90)90052-W
5. *Sah J., Tasaka N.* Boundary element analysis of linear coupled thermoelasticity problems by using Laplace transformation // Proc 1st. Japan-U.S. Symp. on BEM. Oxford, New York: Pergamon Press, 1988. P. 535–544.
6. *Алексеева Л.А., Купесова Б.Н.* Метод обобщенных функций в краевых задачах связанной термоэластодинамики // Прикл. мат. мех. 2001. Т. 65. № 2. С. 334–345.
7. *Alexeyeva L.A., Alipova B.N.* Fundamental and generalized solutions of the equations of motion of a thermoelastic half-plane with a free boundary // Computat. Math. Math. Phys. 2019. V. 59. № 5. P. 782–790.
8. *Alexeyeva L.A., Dadayeva A.N.* Shock thermoelastic waves as generalized solutions of thermoelasticity equations // ISAAC 9-th Congress: Abstracts. Krakow, Poland, 2013. P. 19–20.
9. *Алексеева Л.А., Дадаева А.Н.* О единственности решений краевых задач термоупругости с учетом термоударных волн // Вест. КазНТУ им. К. Сатпаева. Сер.: Мат. мех. инф. 2013. № 28. С. 11–18.
10. *Alexeyeva L.A., Alipova B.N., Dadayeva A.N.* Shock waves as generalized solutions of thermoelastodynamics equations. On the uniqueness of boundary value problems solutions // Am. Inst. Phys. Conf. Proc. 2017. V. 1798. P. 020003-1-020003-8. https://doi.org/10.1063/1.4972595
11. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
12. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
13. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.