ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 5, с. 138–146

УДК 539.3

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕД

А. В. Ильяшенко[a,*]

[a] *Московский государственный строительный университет, Москва, Россия*
** e-mail: avi_56@mail.ru*

Поступила в редакцию 20.12.2022 г.
После доработки 09.01.2023 г.
Принята к публикации 12.01.2023 г.

Осуществляется построение фундаментальных решений в R^3 для уравнений гармонических колебаний в теории упругости анизотропных упругих сред. Решения строятся в виде рядов по мультиполям. Доказываются теоремы о сходимости рядов в топологии компактной сходимости в $R^3\backslash 0$. Обсуждаются проблемы построения некоторых сингулярных решений теории колебаний анизотропного тела. Фундаментальное решение уравнений колебаний для изотропной среды получено в замкнутом виде.

Ключевые слова: фундаментальные решения, анизотропия, изотропия, теория колебаний

DOI: 10.31857/S0572329922600852, **EDN:** PYWIFD

Введение. Осуществляется построение в R^3 тензора Грина уравнений теории колебаний анизотропных упругих сред с анизотропией общего вида.

Для изотропной упругой среды в R^3 фундаментальное решение уравнений установившихся упругих колебаний в замкнутом виде получено в [1, 2]. Однако форма построенного решения такова, что при нулевой частоте это решение теряет смысл и не переходит в фундаментальное решение Кельвина, отвечающее уравнениям статики изотропной среды. Заметим, что в скалярном случае в аналогичной ситуации фундаментальное решение уравнения Гельмгольца при $\omega = 0$ совпадает с соответствующим решением классической теории потенциала [3, 4].

При произвольной анизотропии упругой среды фундаментальные решения теории колебаний в замкнутом виде получить не удается. В [5] с помощью преобразования Фурье задача построения фундаментальных решений уравнений теории колебаний и псевдоколебаний анизотропных сред сведена к задаче вычисления несобственных пространственных интегралов, для подсчета которых эффективные вычислительные алгоритмы отсутствуют.

В отличие от теории колебаний, для нестационарной динамической теории упругости задачу построения фундаментальных решений в общем случае анизотропии удается свести к вычислению интегралов по диаметральным окружностям на сфере единичного радиуса [6, 7]. Это выполняется при помощи преобразования Радона [8, 9], возникающего на этапе обращения по Фурье символов фундаментальных решений. В принципе этот метод, известный также как метод разложения на плоские волны, может быть применен и для получения фундаментальных решений теории колебаний. В то же время, метод разложения на плоские волны даже в более простом случае уравнений статики по оценкам [10, 11] требует весьма значительных затрат машинного времени.

Один из альтернативных подходов состоит в разложении символа фундаментального решения в мультиполярный ряд [12–14] и осуществлении обратного преобразования Фурье с использованием мультипликаторов Бохнера [15, 16]. На основе этой методики, известной как разложения по мультполям [12, 17, 18], в настоящей работе, по-видимому, впервые получено фундаментальное решение теории колебаний для анизотропной упругой среды. Показано, что в случае изотропной среды этим методом удается в замкнутом виде получить фундаментальное решение, которое, в отличие от фундаментального решения Купрадзе [1, 2], совпадает в фундаментальным решением Кельвина при нулевой частоте.

В заключение надо отметить, что в случае уравнений нестационарной динамики, соответствующие фундаментальные решения в пространственном случае обычно строят с помощью экспоненциальных отображений [19–21], а в плоском случае для этих целей применяют логарифмические отображения [22–24]. На основе фундаментальных решений уравнений движения могут быть построены соответствующие потенциалы простого слоя (с регулярным ядром) и двойного слоя (с сингулярным ядром на несущей поверхности) [25–29]. С помощью соответствующих сингулярных ядер удается построить точные решения внутренней и внешней динамических задач Лэмба, см. [30–33].

1. Основные операторы. Рассматривается однородная анизотропная упругая среда в R^3, уравнения установившихся колебаний которой имеют вид

$$\mathbf{A}_\omega(\partial_\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv [\mathbf{A}_0(\partial_\mathbf{x}) - \rho\omega^2\mathbf{I}]\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

$\mathbf{u}$ – поле перемещений, ρ – плотность среды, ω – частота колебаний, $\mathbf{I}$ – единичная диагональная матрица, $\mathbf{g}$ – поле объемных сил. В уравнениях (1.1) $\mathbf{A_0}$ – матричный дифференциальный оператор уравнений равновесия (статики):

$$\mathbf{A}_0(\partial_\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) \equiv -\mathrm{div}_\mathbf{x}\mathbf{C}\cdot\cdot\nabla_\mathbf{x}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \tag{1.2}$$

Четырехвалентный тензор упругости $\mathbf{C}$ в (1.2) предполагается строго эллиптичным и симметричным, если его рассматривать как линейный оператор действующий в пространстве двухвалентных тензоров, что обеспечивается симметрией по крайним парам индексов: $C^{ijkl} = C^{klij}$.

Преобразование Фурье

$$f\hat{\ }(\xi) = \int_{R^3} f(\mathbf{x})\exp(2\pi i\xi\cdot\mathbf{x})dx, \quad \xi \in R^3$$

примененное к оператору $\mathbf{A}_\omega$, дает соответствующий символ

$$\mathbf{A}\hat{\ }_\omega(\xi) \equiv \mathbf{A}\hat{\ }_0(\xi) - \rho\omega^2\mathbf{I} = (2\pi)^2\xi\cdot\mathbf{C}\cdot\xi - \rho\omega^2\mathbf{I} \tag{1.3}$$

По определению фундаментального решения имеем

$$\mathbf{A}_\omega(\partial_\mathbf{x})\mathbf{E}_\omega(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})\mathbf{I} \tag{1.4}$$

Преобразование Фурье формулы (1.4) позволяет получить следующее выражение для символа фундаментального решения

$$\mathbf{E}\hat{\ }_\omega(\xi) = \mathbf{A}\hat{\ }_\omega^{-1}(\xi) \tag{1.5}$$

Выражения (1.3), (1.5) показывают, что символы $\mathbf{A_0}\hat{\ }$, $\mathbf{E_0}\hat{\ }$, отвечающие уравнениям статики, положительно однородны по ξ степени 2 и –2 соответственно.

2. Свойства символов. Спектральное разложение символов $\mathbf{A_0}\hat{\ }$, $\mathbf{E_0}\hat{\ }$ дает

$$\mathbf{A}\hat{}_0(\xi) = \mathbf{Q}(\xi')\cdot\mathbf{D}_0(\xi)\cdot\mathbf{Q}^t(\xi')$$
$$\mathbf{E}\hat{}_0(\xi) = \mathbf{Q}(\xi')\cdot\mathbf{D}_0^{-1}(\xi)\cdot\mathbf{Q}^t(\xi'), \quad \xi' = \xi/|\xi| \tag{2.1}$$

где $\mathbf{Q}$ – матрица поворотов, а $\mathbf{D}_0$ – диагональная матрица, на главной диагонали которой находятся собственные числа $\lambda_i(\xi)$, $i = 1, 2, 3$ символа $\mathbf{A}\hat{}_0$. Формулы (1.3), (1.4) показывают, что спектральное разложение символов $\mathbf{A}_\omega\hat{}$, $\mathbf{E}_\omega\hat{}$ осуществляется по формулам аналогичным (2.1):

$$\mathbf{A}\hat{}_\omega(\xi) = \mathbf{Q}(\xi')\cdot\mathbf{D}_\omega(\xi)\cdot\mathbf{Q}^t(\xi'), \quad \mathbf{E}\hat{}_\omega(\xi) = \mathbf{Q}(\xi')\cdot\mathbf{D}_\omega^{-1}(\xi)\cdot\mathbf{Q}^t(\xi')$$
$$\mathbf{D}_\omega(\xi) = \mathbf{D}_0(\xi) - \rho\omega^2\mathbf{I}, \quad \xi' = \xi/|\xi| \tag{2.2}$$

Существенно, что тензоры поворота $\mathbf{Q}$ в (2.1) и (2.2) одинаковы. Это легко доказать для символов $\mathbf{A}\hat{}_0$ и $\mathbf{A}_\omega\hat{}$, а затем перейти к $\mathbf{E}_0\hat{}$, $\mathbf{E}_\omega\hat{}$ по (1.5).

Приведем также следующее легко проверяемое тождество

$$(\mathbf{E}\hat{}_0)^n = \mathbf{Q}\cdot(\mathbf{D}_0)^{-n}\cdot\mathbf{Q}^t \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. а) Символ $\mathbf{E}_\omega\hat{}$ вещественно аналитичен по ξ и ω всюду в $R^3\times R^1\backslash\mathrm{Con}_d$, где Con_d – характеристический конус оператора $\mathbf{A}(\partial_\mathbf{x},\partial_t)$; б) в точках $\xi,\omega\notin\mathrm{Con}_d$ имеет место разложение в ряд Тейлора

$$\mathbf{E}\hat{}_\omega(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}(\mathbf{E}\hat{}_0(\xi))^n\rho^{n-1}\omega^{2(n-1)} \tag{2.4}$$

в) ряд в правой части (2.4) абсолютно сходится в топологии компактной сходимости в $R^3\cdot R^1\backslash\mathrm{Con}_d$; г) для любых $\omega\neq 0$ $\mathbf{E}\hat{}_\omega(\xi)\to 1/\rho\omega^2\mathbf{I}$ при $\xi\to 0$; д) при любых ω ряд в правой части (2.4) сходится в слабой топологии S‘, где S‘ – пространство медленно растущих тензорных распределений в R^3.

Замечание 2.1. В общем случае анизотропии Con_d состоит из трех конусов с общей вершиной в нуле, причем в некоторых частных случаях эти конусы могут иметь и другие точки соприкосновения. Например, в изотропном случае два из трех конусов вообще совпадают [2].

Доказательство. Утверждение а) вытекает из вещественной аналитичности символа $\mathbf{A}_\omega\hat{}$ всюду в $R^3\cdot R^1$, причем в $R^3\cdot R^1$ детерминант $\mathbf{A}_\omega\hat{}$ обращается в нуль лишь в точках характеристического конуса. В силу (1.5) точки характеристического конуса образуют полярное множество символа $\mathbf{E}_\omega\hat{}$.

Для доказательства б) заметим, что с учетом формул (1.3), (1.5) символ $\mathbf{E}_\omega\hat{}(\xi)$ является резольвентой символа$\mathbf{A}_\omega\hat{}(\xi)$ в нормированной алгебре симметричных тензоров второго ранга в R^3. Далее рассмотрим разложение символа $\mathbf{E}_\omega\hat{}(\xi)$, очевидно вещественно аналитичного по ω при любых $\xi,\omega\notin\mathrm{Con}_d$, в ряд Тейлора по степеням ω:

$$\mathbf{E}\hat{}_\omega(\xi) \equiv (\mathbf{A}\hat{}_0(\xi) - \rho\omega^2\mathbf{I})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{A}\hat{}_0(\xi)^{-n}\rho^{n-1}\omega^{2(n-1)} \tag{2.5}$$

При получении (2.5) использовалась формула дифференцирования резольвенты по параметру [12] с необходимым изменением знаков:

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda) = n!\,R^{n+1}(\lambda) \tag{2.6}$$

где $R(\lambda) = \mathbf{E}_\omega\hat{}(\xi)$, $\lambda = \rho\omega^2$, так что $R(0) = \mathbf{E}_0\hat{}(\xi)$. Но ряд в правой части (2.5) как раз представляет собой искомое разложение (2.4).

Доказательство в) вытекает из вещественной аналитичности символа $\mathbf{E}_\omega\hat{}$ в $R^3 \cdot R^1 \backslash \mathrm{Con}_d$, обеспечивающей абсолютную и, следовательно, равномерную сходимость на компактных подмножествах из $R^3 \cdot R^1 \backslash \mathrm{Con}_d$.

Для доказательства утверждения г) заметим, что $\forall \omega\ \mathbf{A}_\omega\ \hat{}\ (\xi) \to \rho\omega^2 \mathbf{I}$ при $\xi \to 0$. Отсюда и из общей теории нормированных алгебр следует, что при любых $\xi, \omega \notin \mathrm{Con}_d$ и $\omega \neq 0$ символ $\mathbf{E}_\omega\ \hat{}\ (\xi)$ как резольвента $\mathbf{A}_\omega\ \hat{}\ (\xi)$ сходится к $1/\rho\omega^2\mathbf{I}$.

В силу (2.5) доказательство утверждения д) достаточно провести для произвольной тензорной функции $\mathbf{g} \in C^\infty$, имеющей компактный носитель, содержащийся в какой-либо окрестности нуля в ξ-пространстве, где сосредоточены особенности вида $|\xi|^{-2n}$ членов ряда (2.5) при условии, что $\omega \neq 0$ (при $\omega = 0$ доказательство тривиально, поскольку ряд в правой части (2.5) редуцируется к одному члену). Но в силу предыдущего утверждения ряд (2.5) в ε-окрестности нуля в ξ-пространстве можно заменить на $1/\rho\omega^2\mathbf{I}$ с ошибкой $O(\varepsilon)$, что обеспечивает доказательство утверждения д).

3. Построение фундаментального решения $\mathbf{E}_\omega$. *Теорема 3.1.* а) Фундаментальное решение $\mathbf{E}_\omega$ вещественно аналитично по $\mathbf{x}$ и ω всюду в $R^3 \backslash 0 \cdot R^1$; б) имеет место разложение

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n(\mathbf{x})\rho^{n-1}\omega^{2(n-1)}, \quad (\mathbf{x}, \omega) \in R^3 \backslash 0 \times R^1 \tag{3.1}$$

сходится в топологии компактной сходимости в $R^3 \backslash 0 \cdot R^1$.

Доказательство. Утверждение а) вытекает из известных результатов об аналитичности решений дифференциальных операторов с аналитическими коэффициентами [13].

Применяя почленное обратное преобразование Фурье к ряду (2.4) и используя топологический изоморфизм пространства S‘ на себя при обратном преобразовании Фурье, получаем доказательство утверждения б).

Для доказательства утверждения в) заметим, что тензорные функции $\mathbf{E}_n$ в (3.1) положительно однородны по $|\mathbf{x}|$ степени $2n - 3$ [7], так что особенность при $\mathbf{x} = 0$ имеет лишь $\mathbf{E}_1 \equiv \mathbf{E}_0$. Надо отметить, что при обратном преобразовании Фурье символов $(\mathbf{E}\ \hat{}_0)^n$ появляются множители Бохнера γ, зависящие от n и еще одного параметра, так что

$$|\gamma| = O\left(\frac{\pi^{2n}}{(n-1)!\,\Gamma(-1/2+n)}\right), \quad n \to \infty$$

Ниже выражения для множителей Бохнера будут выписаны явно. Таким образом, при любых $\mathbf{x} \neq 0$ и ω имеем

$$|\mathbf{E}_n(\mathbf{x})\rho^{n-1}\omega^{2(n-1)}| = O\left(\frac{a^n}{(n-1)!\,\Gamma(-1/2+n)}\right) \tag{3.2}$$
$$n \to \infty, \quad a > 0$$

Но ряд, члены которого удовлетворяют асимптотической оценке (3.2) абсолютно сходится. Отсюда вытекает равномерная сходимость ряда (3.1) на компактных подмножествах из $R^3 \backslash 0 \cdot R^1$. В заключение остается отметить, что обратное преобразование Фурье расширило область сходимости ряда (3.2) по сравнению с исходным рядом (2.4), поскольку характеристический конус в (3.1) свелся к единственной точке — нулю в x-пространстве.

Для построения ядер $\mathbf{E}_n$, присутствующих в (3.1), разложим символы $(\mathbf{E}\hat{\ }_0)^n$ в ряд по мультиполям

$$(\mathbf{E}\hat{\ }_0(\xi))^n = \xi^{-2n+2} \sum_{k=0,2,4,\ldots} \sum_{m=1}^{2k+1} (\mathbf{E}_0)^n_{km} Y^k_m(\xi'), \quad \xi' = \xi/|\xi| \tag{3.3}$$

где Y^k_m – поверхностные сферические гармоники степени k индекса m. Матричные коэффициенты $(\mathbf{E}_0)^n_{km}$ в (3.3) определяются интегрированием по сфере единичного радиуса в R^3:

$$(\mathbf{E}_0)^n_{km} = \int_S (\mathbf{E}\hat{\ }_0(\xi'))^n Y^k_m(\xi')d\xi'$$

Присутствие в разложении (3.3) гармоник лишь четных степеней обусловлено положительной однородностью по $|\xi|$ символов $(\mathbf{E}\hat{\ }_0)^n$.

Обратное преобразование Фурье, примененное к $(\mathbf{E}\hat{\ }_0)^n$, дает [7]:

$$\begin{gathered}\mathbf{E}_n(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{2n-3} \sum_{k=0,2,4,\ldots}^{\infty} \gamma_{nk} \sum_{m=1}^{2k+1} (\mathbf{E}_0)^n_{km} Y^k_m(\mathbf{x}') \\ \gamma_{nk} = (-1)^{k/2} \pi^{2n-3/2} \Gamma\left(\frac{(3+k)}{2} - n\right) / \Gamma\left(\frac{k}{2} + n\right)\end{gathered} \tag{3.4}$$

В этой формуле γ_{nk} – множители Бохнера, определяющие действие преобразования Фурье на положительно однородные обобщенные функции медленного роста.

Из формул (3.1), (3.4) немедленно вытекает

Следствие. а) $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{x}) \to \mathbf{E}_0(\mathbf{x})$ *при* $\omega \to 0$ равномерно по $\mathbf{x}$ *на любых компактных подмножествах из* $R^3\backslash 0$; б) *при любых* ω *имеем* $|\mathbf{E}_\omega(\mathbf{x})| = O(|\mathbf{x}|^{-1})$, $|\mathbf{x}| \to 0$.

В некоторых случаях ряд (3.1) удается просуммировать с получением аналитических выражений. В следующих разделах приводятся примеры построения в замкнутом виде фундаментальных решений для скалярного уравнения Гельмгольца и уравнений теории колебаний изотропной упругой среды.

4. Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца. В качестве демонстрации возможностей метода рассмотрим построение фундаментального решения E_ω скалярного уравнения Гельмгольца в R^3:

$$(-\Delta - \omega^2)E_\omega(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \tag{4.1}$$

Применяя формулы разложения (2.4), (2.5) к символу фундаментального решения уравнения (4.1), получим

$$E_\omega(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi|\xi|)^{-2n} \omega^{2(n-1)} \tag{4.2}$$

Характеристический конус в этом случае определяется уравнением $(2\pi|\xi|)^2 = \omega^2$.

Обратное преобразование Фурье выражения (4.2) с использованием формул (3.1), (3.4) дает

$$\begin{aligned}E_\omega(\mathbf{x}) &= \pi^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} |\mathbf{x}|^{2n-3} \Gamma(3/2 - n)/\Gamma(n) \omega^{2(n-1)} \\ &= (4|\mathbf{x}|)^{-1} \pi^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,\Gamma(-1/2+n)} \left(\frac{\omega|\mathbf{x}|}{2}\right)^{2(m-1)}\end{aligned} \tag{4.3}$$

При получении (4.3) использовалось соотношение

$$\frac{\Gamma(3/2-n)}{\Gamma(n)} = \frac{(-1)^{n-1}\pi}{(n-1)!\,\Gamma(-1/2+n)}$$

Но последний ряд в правой части (4.3) с точностью до множителя совпадает с тейлоровским разложением функции Неймана $N_{1/2}$, так что (4.3) дает формулу для фундаментального решения уравнения Гельмгольца, выраженного через функцию Неймана [6]:

$$E_\omega(\mathbf{x}) = 1/4\omega^{1/2}(2\pi|\mathbf{x}|)^{-1/2}N_{1/2}(\omega|\mathbf{x}|) \tag{4.4}$$

В ряде исследований по теории колебаний [1, 2, 15–18] фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в R^3 записывается в виде

$$E_\omega(\mathbf{x}) = (4\pi|\mathbf{x}|)^{-1}\exp(\pm i\omega|\mathbf{x}|) \tag{4.5}$$

Нетрудно видеть, что действительная часть фундаментального решения (4.5) совпадает с (4.4) и с построенным фундаментальным решением (4.3).

5. Фундаментальное решение теории упругих колебаний для изотропной среды. Рассмотрим однородную изотропную упругую среду, тензор упругости которой имеет вид

$$C^{ijmn} = \lambda\delta^{ij}\delta^{mn} + \mu(\delta^{im}\delta^{jn} + \delta^{in}\delta^{jm}) \tag{5.1}$$

где λ, μ – константы Ламе.

С учетом (5.1) символ оператора уравнений теории упругих колебаний может быть представлен в виде

$$\mathbf{A}\hat{}_\omega(\boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^2(\mu|\boldsymbol{\xi}|\mathbf{I} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\xi}\otimes\boldsymbol{\xi}) - \rho\omega^2\mathbf{I} \tag{5.2}$$

Используя (1.4), (5.2) получим символ фундаментального решения уравнений статики (равновесия) изотропной среды

$$\mathbf{E}\hat{}_0(\xi) = (2\pi)^{-2}(\mu(\lambda+2\mu))^{-1}[(\lambda+2\mu)|\xi|^{-1}\mathbf{I} - (\lambda+\mu)|\xi|^{-4}\xi\otimes\xi] \tag{5.3}$$

Непосредственно из (5.3) вытекает тождество, легко доказываемое по индукции

$$(\mathbf{E}\hat{}_0(\xi))^n = (2\pi)^{-2n}[\mu^{-n}|\xi|^{-2n}\mathbf{I} - (\mu^{-n} - (\lambda+2\mu)^{-n})|\xi|^{-2n-2}\xi\otimes\xi] \tag{5.4}$$

С учетом (2.4), (5.4) получаем представление символа фундаментального решения теории упругих колебаний изотропной среды в виде ряда Тейлора

$$\mathbf{E}\hat{}_\omega(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}(2\pi)^{-2n}(\mu^{-n}|\xi|^{-2n}\mathbf{I} - (\mu^{-n} - (\lambda+2\mu)^{-n})|\xi|^{-2n-2}\xi\otimes\xi)\rho^{n-1}\omega^{2(n-1)} \tag{5.5}$$

Обратное преобразование Фурье, примененное к (5.5) с использованием формул (4.2)–(4.5), дает искомое фундаментальное решение в виде

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{x}) = (4\pi\mu)^{-1}\left\{|\mathbf{x}|^{-1}\cos(\alpha\omega|\mathbf{x}|)\mathbf{I} - 2^{-1}\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}\left(|\mathbf{x}|\left(\cos(\alpha\omega|\mathbf{x}|) - \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\cos(\beta\omega|\mathbf{x}|)\right)\right)\right\}$$
$$\alpha = (\rho/\mu)^{1/2} \qquad \beta = (\rho/(\lambda+2\mu))^{1/2} \tag{5.6}$$

Нетрудно видеть, что при $\omega\to 0$ фундаментальное решение (5.6) переходит в фундаментальное решение Кельвина [14]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (4\pi\mu)^{-1}\left\{|\mathbf{x}|^{-1}\mathbf{I} - \frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}|\mathbf{x}|\right\} \tag{5.7}$$

Отметим, что в отличие от фундаментального решения Купрадзе [2, 7], теряющего смысл при $\omega = 0$, фундаментальное решение (5.6) остается справедливым при любых действительных значениях частоты.

Заключение. Фундаментальное решение (тензор Грина) уравнений установившихся колебаний для анизотропной упругой среды с анизотропией общего вида построен в виде мультиполярных рядов по пространственным координатам. Показано, что в частном случая изотропной среды, ряды удается просуммировать, и тензор Грина теории колебаний для безграничной упругой среды представим в замкнутом виде (5.6).

В заключение надо отметить, что фундаментальные решения теории колебаний находят применение при решении задач квазистационарной динамики [33–38], а так же для построения решений некоторых волновых задач теории упругости [39–42], где с помощью преобразования Фурье по временной переменной, задача сводится к решению соответствующих задач теории колебаний в спектральной области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Купрадзе В.Д.* Граничные задачи теории установившихся упругих колебаний // УМН. 1953. Т. 8. № 3. С. 21–74.
2. *Kupradze V.D.* Dynamical problems in elasticity. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1963.
3. *Burchuladze T.* Non-stationary problems of generalized elastothermodiffusion for inhomogeneous media // Georgian Math. J. 1994. V. 1. P. 587–598.
4. *Colton D., Kress R.* Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. N.Y.: Springer, 1998.
5. *McLean W.* Strongly elliptic systems and boundary integral operators. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
6. *Constanda Ch., Doty D., Hamill W.* Boundary integral equation methods and numerical solutions: thin plates on an elastic foundation. N.Y.: Springer, 2016.
7. *Kupradze V.D., Basheleishvili, M.O., Burchuladze T.V.* Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, 25. Amsterdam, N. Y.: North-Holland Publ. Co. 1979.
8. *John F.* Plane waves and spherical means applied to partial differential equations. Interscience tracts in pure and applied mathematics. V. 2. N.Y.: Interscience Publ., 1955.
9. *Grosser M. et al.* Geometric theory of generalized functions with applications to general relativity. Berlin: Kluwer Acad. Publ., 2001.
10. *Wilson R.B., Cruse T.A.* Efficient implementation of anisotropic three dimensional boundary-integral equation stress analysis // Int. J. Num. Meth. Eng. 1978. V. 12. № 9. P. 1383–1397. https://doi.org/10.1002/nme.1620120907
11. *Deb A., Henry D.P., Jr., Wilson R.B.* Alternate BEM formulation for 2- and 3D anisotropic thermoelasticity // Int. J. Solids Struct. 1991. V. 27. № 13. P. 1721–1738. https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90071-M
12. *Kuznetzov S.V.* Closed form analytical solution for dispersion of Lamb waves in FG plates // Wave Motion. 2019. V. 84. P. 1–7. https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2018.09.018
13. *Kuznetsov S.V.* Fundamental and singular solutions of Lamé equations of media with arbitrary anisotropy // Quart. Appl. Math. 2005. V. 63. № 3. P. 455–467. https://doi.org/10.1090/S0033-569X-05-00969-X
14. *Gegelia T., Buchukuri T.* Some dynamic problems of the theory of electroelasticity // Mem. Differential Equations Math. Phys. 1997. V. 10. P. 1–53.
15. *Bourbaki N.* Théories spectrales. Ch. 1, 2. Berlin: Springer. 2019.
16. *Marti J.-A.* Nonlinear algebraic analysis of delta shock wave solutions to Burgers' equation // Pacific J. Math. 2003. V. 210. P. 165–187.
17. *Gegelia T., Chichinadze R.* Boundary value problems of mechanics of continuum media for a sphere // Mem. Differential Equations Math. Phys. 1996. V. 7. P. 1–222.
18. *Sanchez-Palencia E.* Non homogeneous media and vibration theory. Lecture notes in physics. V. 127. Berlin: Springer, 1980.
19. *Fairweather G., Karageorghis A., Martin P.A.* The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems // Eng. Anal. Bound. Elem. 2003. V. 27. № 7. P. 759–769. https://doi.org/10.1016/S0955-7997(03)00017-1

20. *Iovane G., Nasedkin A.V., Passarella F.* Fundamental solutions in antiplane elastodynamic problem for anisotropic medium under moving oscillating source // Eur. J. Mech. A/Solids. 2004. V. 23. № 6. P. 935–943.
https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.09.002
21. *Iovane G., Nasedkin A.V., Passarella F.* Moving oscillating loads in 2D anisotropic elastic medium: plane waves and fundamental solutions // Wave Motion. 2005. V. 43. № 1. P. 51–66.
https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2005.06.002
22. *Kleiman R.E., Roach G.F.* On modified Green functions in exterior problems for the Helmholtz equations // R. Soc. Lond. 1982. V. 383. № 1785. P. 313–332.
https://doi.org/10.1098/rspa.1982.0133
23. *Kleinman R.E., Roach G.F.* Boundary integral equation for the three-dimension Helmholtz equations // SIAM Rev. 1974. V. 16. № 2. P. 214–236. https://www.jstor.org/stable/2028461
24. *Kuznetsov S.V.* Surface waves of non-Rayleigh type // Quart. Appl. Math. 2003. V. 61. P. 575–583.
https://doi.org/10.1090/qam/1999838
25. *Yang S.A.* Evaluation of the Helmholtz boundary integral equation and its normal and tangential derivatives in two dimensions // J. Sound Vibr. 2007. V. 301. № 3–5. P. 864–877.
https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.10.023
26. *Wang C.Y., Achenbach J.D.* Elastodynamic fundamental solutions for anisotropic solids // Geophys. Int. J. 1994. V. 118. № 2. P. 384–92.
https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1994.tb03970.x
27. *Tonon F., Pan E., Amadei B.* Green's functions and boundary element method formulation for 3D anisotropic media // Comput. Struct. 2001. V. 79. № 5. P. 469–482.
https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00163-2
28. *Kuznetsov S.V.* On the operator of the theory of cracks // C. R. Acad. Sci. Paris. 1996. V. 323. P. 427–432.
29. *Ilyashenko A.V. et al.* Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // Arch. Appl. Mech. 2018. V. 88. P. 1385–1394.
https://doi.org/10.1007/s00419-018-1377-7
30. *Kravtsov A.V. et al.* Finite element models in Lamb's problem // Mech. Solids. 2011. V. 46. P. 952–959.
https://doi.org/10.3103/S002565441106015X
31. *Kuznetsov S.V., Terentjeva E.O.* Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source // Acoust. Phys. 2015. V. 61. № 3. P. 356–367.
https://doi.org/10.1134/S1063771015030112
32. *Norris A.N.* Dynamic Green's functions in anisotropic piezoelectric, thermoelastic and poroelectric solids // R. Soc. Lond. 1994. V. 447. № 1929. P. 175–188. https://
https://doi.org/10.1098/rspa.1994.0134
33. *Tverdokhlebov A., Rose J.* On Green's functions for elastic waves in anisotropic media // J. Acoust. Soc. Am. 1988. V. 83. № 1. P. 118–121.
https://doi.org/10.1121/1.396437
34. *Telles J.C.F., Brebbia C.A.* Boundary element solution for half-plane problems // Int. J. Solids Struct. 1981. V. 17. № 12. P. 1149–1158.
https://doi.org/10.1016/0020-7683(81)90094-9
35. *Spyrakos C.C., Ahtes H.* Time domain boundary element method approaches in elastodynamics: a comparative study // Comp. Struct. 1986. V. 24. № 4. P. 529–535.
https://doi.org/10.1016/0045-7949(86)90191-4
36. *Singh K.M., Tanaka M.* Elementary analytical integrals required in subtraction of singularity method for evaluation of weakly singular boundary integrals // Eng. Anal. Bound. Elem. 2007. V. 31. № 3. P. 241–247.
https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2006.05.003
37. *Saez A., Dominguez J.* Far field dynamic Green's functions for BEM in transversely isotropic solids // Wave Motion. 2000. V. 32. № 1. P. 113–123.
https://doi.org/10.1016/S0165-2125(00)00032-9
38. *Koegl M.* Free vibration analysis of anisotropic solids with the boundary element method // Eng. Anal. Bound. Elem. 2003. V. 27. № 2. P. 107–114.
https://doi.org/10.1016/S0955-7997(02)00088-7

39. *Hayir A., Bakirtas I.* A note on a plate having a circular cavity excited by plane harmonic SH waves // J. Sound Vibr. 2004. V. 271. № 1–2. P. 241–255. https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00751-X
40. *Dumir P.C., Mehta A.K.* Boundary element solution for elastic orthotropic half-plan problem // Comp. Struct. 1978. V. 26. № 3. P. 431–438. https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90043-5
41. *Kuznetsov S.V.* Seismic waves and seismic barriers // Acoust. Phys. 2011. V. 57. № 3. P. 420–436. https://doi.org/10.1134/S1063771011030109
42. *Djeran-Maigre I. et al*. Velocities, dispersion, and energy of SH-waves in anisotropic laminated plates // Acoust. Phys. 2014. V. 60. P. 200–207. https://doi.org/10.1134/S106377101402002X