

УДК 539.3

## ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КЛИНА С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ

© 2023 г. Е. Д. Пожарская<sup>а,\*</sup>, Д. А. Пожарский<sup>а,\*\*</sup>, Б. В. Соболев<sup>а,\*\*\*</sup>

<sup>а</sup>Донской государственный технический университет,  
Ростов-на-Дону, Россия

\* e-mail: [pozgarskaya.elizaveta@rambler.ru](mailto:pozgarskaya.elizaveta@rambler.ru)

\*\* e-mail: [pozharda@rambler.ru](mailto:pozharda@rambler.ru)

\*\*\* e-mail: [b.sobol@mail.ru](mailto:b.sobol@mail.ru)

Поступила в редакцию 17.01.2023 г.

После доработки 27.01.2023 г.

Принята к публикации 30.01.2023 г.

Рассматриваются периодические контактные задачи для трехмерного упругого клина (двухгранного угла, полупространство и четверть пространства являются частными случаями) при учете сил трения Кулона в неизвестных областях контакта. Одна грань клина жестко закреплена, а другая грань взаимодействует с бесконечной прямолинейной цепочкой одинаковых жестких штампов, ось цепочки параллельна ребру клина. Учитываются силы трения перпендикулярные или параллельные ребру клина. Выведены интегральные уравнения, в которых ряды, порожденные компонентами Черрути вклада сил трения, точно просуммированы. Для решения задач применяется метод нелинейных интегральных уравнений, позволяющий одновременно определить область контакта и контактные давления. Рассчитаны механические характеристики, изучен переход от дискретной к непрерывной области контакта бесконечной длины.

*Ключевые слова:* периодический контакт, упругий клин, интегральные уравнения

DOI: 10.31857/S0572329923600056, EDN: QACECL

**Введение.** Исследования задач периодического контакта актуально в связи с инженерными приложениями [1, 2]. Одним из основных подходов является метод локализации, применяемый для круговых инденторов [3–5]. Изучались двоякопериодические контактные задачи для регулярных поверхностей, слоя и полупространства [6–8]. Учитывался вклад сил трения, износа, сцепления и адгезии при периодическом контакте упругих тел [9–12]. Для нерегулярных поверхностей при наличии угловой линии периодический контакт рассматривался на примере несжимаемого упругого клина без учета сил трения [13]. В случае периодической заданной области контакта применялся асимптотический метод [6, 13], а при неизвестной области – метод быстрого преобразования Фурье с анализом перколяции (слияния областей контакта) [7], а также метод нелинейных граничных интегральных уравнений [8, 13], разработанный Б.А. Галановым [14]. Рассматривались пространственные контактные задачи о взаимодействии клина при учете трения с единичным штампом [15, 16].

В настоящей статье на основе известных фундаментальных решений [15, 16] получены интегральные уравнения линейно-периодических контактных задач для трехмерного упругого клина при учете сил трения. Жесткая заделка одной грани клина обеспечивает корректность интегральных уравнений с символом ядра типа тангенса

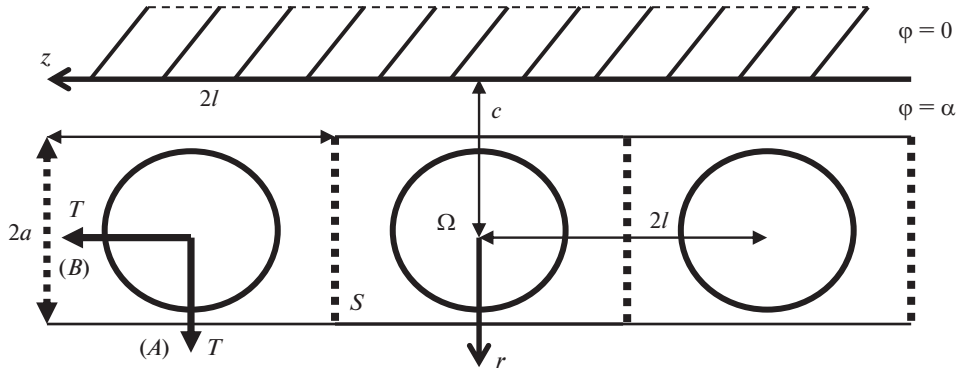


Рис. 1. Схема контакта на грани  $\varphi = \alpha$ .

гиперболического, который обеспечивает сходимость ядерных рядов. В отличие от задач для несжимаемого материала [13] учитываются силы трения Кулона, действующие перпендикулярно или параллельно ребру клина при произвольном коэффициенте Пуассона. В частном случае, когда клин разворачивается в полупространство, интегральное уравнение для перпендикулярных ребру сил трения совпадает с выведенным ранее [8]. В ядрах уравнений выделены главные члены, из которых связанные с трением точно просуммированы, а несвязанные содержат интегрируемые особенности на линиях возможного слияния соседних областей контакта. Изучена возможность перехода от дискретного к непрерывному пространственному линейно-периодическому контакту на грани клина.

**1. Постановка задач.** Рассмотрим упругий клин  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ ,  $|z| < \infty$ , ребро которого совпадает с осью  $z$  цилиндрической системы координат. Грань клина  $\varphi = 0$  жестко заделана. Изучим квазистатические периодические контактные задачи о линейной цепочке одинаковых жестких штампов (период  $2l$ , ось цепочки параллельна ребру клина и удалена от нее на расстояние  $c$ ), внедренных в грань  $\varphi = \alpha$  на величину  $\delta$  и начинающих достаточно медленно двигаться без перекоса перпендикулярно или параллельно ребру клина (задачи А и В соответственно, рис. 1). Учитываем силы трения Кулона коллинеарные направлению движения и направленные против движения. Задача А симметрична по  $z$ . К штампам приложены нормальные силы  $P$  на расстоянии  $H$  от ребра и касательные силы  $T = \mu P$  ( $\mu$  – коэффициент трения Кулона). Предполагается, что неизвестные области контакта априори содержатся в заданных соприкасающихся прямоугольниках со сторонами  $2l$  и  $2a$  (рис. 1,  $a < c$ ). Ближний к началу координат прямоугольник  $S$  содержит область контакта  $\Omega$ , в которой подошва штампа описывается функцией  $f(r, z)$ , периодически продолжающейся по  $z$  вне  $S$  с периодом  $2l$ . Для определенности далее берем

$$f(r, z) = \frac{(r - c)^2}{2R_1} + \frac{z^2}{2R_2} \quad (1.1)$$

где  $R_1 \leq R_2$  для задачи А и  $R_1 \geq R_2$  для задачи В.

Граничные условия контактных задач имеют вид ( $\Omega^*$  – объединенная область контакта)

$$\begin{aligned} \varphi = \alpha: \quad & u_\varphi = -(\delta - f(r, z)), \quad (r, z) \in \Omega^*; \quad \sigma_\varphi = 0, \quad (r, z) \notin \Omega^* \\ (A) \quad & \tau_{r\varphi} = \mu\sigma_\varphi, \quad \tau_{\varphi z} = 0; \quad (B) \quad \tau_{r\varphi} = 0, \quad \tau_{\varphi z} = \mu\sigma_\varphi \\ \varphi = 0: \quad & u_\varphi = u_r = u_z = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

При заданных параметрах упругости  $G$  (модуль сдвига),  $\nu$  (коэффициент Пуассона), величинах  $\alpha$ ,  $a$ ,  $c$ ,  $l$ ,  $\delta$ ,  $\mu$  и функции  $f(r, z)$  требуется определить область контакта  $\Omega$  и контактное давление  $\sigma_\varphi(r, \alpha, z) = -q(r, z)$ ,  $(r, z) \in \Omega$ , затем при использовании интегральных условий равновесия штампов могут быть найдены величины  $P$  и  $H$ .

**2. Интегральные уравнения.** Для трехмерного упругого клина с одной жестко закрепленной гранью функции Грина содержат решения вспомогательных интегральных уравнений Фредгольма второго рода [15, 16]. Используя эти функции для условий (1.2), принцип суперпозиции и периодичность контактных задач, относительно контактного давления получим интегральные уравнения ( $\theta = G/(1 - \nu)$ ,  $n = 1, 2$  для задач А и В соответственно)

$$\iint_{\Omega} q(x, y) K(x, y, r, z) dx dy = 2\pi\theta[\delta - f(r, z)], \quad (r, z) \in \Omega \quad (2.1)$$

$$K(x, y, r, z) = K_0(x, y, r, z) - \mu K_n(x, y, r, z)$$

$$K_n(x, y, r, z) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \text{sh}(\pi u) W(u) K_{iu}(\beta r) \left\{ \theta_n(u, \beta x) + \frac{\Psi_n(u, \beta x)}{\text{ch}(\pi u/2)} \right\} \sum_{k=-\infty}^\infty c_{kn}(\beta, z - y) du d\beta$$

$$W(u) = \frac{2\Delta(u)}{2\kappa \text{ch}(2\alpha u) + 4u^2 \sin^2 \alpha + \kappa^2 + 1}$$

$$\Delta(u) = \kappa \text{sh}(2\alpha u) - u \sin(2\alpha), \quad \kappa = 3 - 4\nu$$

$$\theta_0(u, \beta x) = K_{iu}(\beta x), \quad c_{k0}(\beta, t) = c_{k1}(\beta, t) = \cos(\beta(t + 2lk))$$

$$\theta_1(u, \beta x) = \frac{h_0(u)}{u} K_{iu}(\beta x) - \nu_* \int_0^\infty h(t) \frac{\text{sh}(\pi t) K_{it}'(\beta x) dt}{\text{ch}(\pi t) - \text{ch}(\pi u)}, \quad \nu_* = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}$$

$$\theta_2(u, \beta x) = \frac{h_0(u)}{u} x K_{iu}'(\beta x) + h_1(u) K_{iu}(\beta x) - \int_0^\infty \text{sh}(\pi t) \frac{\nu_* h(t) x K_{it}'(\beta x) - h_0(t) K_{it}(\beta x) dt}{\text{ch}(\pi t) - \text{ch}(\pi u)}$$

$$c_{k2}(\beta, t) = \frac{\sin(\beta(t + 2lk))}{\beta x}, \quad h_0(u) = \frac{2u^2 \sin^2 \alpha}{\Delta(u)}, \quad h(t) = \frac{2\kappa \text{sh}^2(\alpha t)}{\Delta(t)} - \frac{h_0(t)}{1 - 2\nu}$$

$$h_1(u) = -u h_0(u) \left[ 1 + \frac{2(1 - \nu)(1 - 2\nu)}{u^2 \sin^2 \alpha} \right], \quad K_{it}'(\beta x) = \frac{d}{dx} K_{it}(\beta x)$$

Здесь  $K_{iu}(r)$  – цилиндрическая функция Бесселя, а функции  $\Psi_n(u, \beta x)$  при фиксированном значении  $\beta x$  удовлетворяют интегральным уравнениям Фредгольма второго рода ( $0 \leq u < \infty$ )

$$\Psi_n(u, \beta x) = (1 - 2\nu) \int_0^\infty L(u, \tau) \left[ \Psi_n(\tau, \beta x) + \text{ch} \frac{\pi \tau}{2} F_n(\tau, \beta x) \right] d\tau \quad (2.2)$$

$$L(u, \tau) = 2 \text{ch} \frac{\pi u}{2} \text{sh} \frac{\pi \tau}{2} W(\tau) \int_0^\infty \frac{\text{sh}(\pi t) g(t) dt}{[\text{ch}(\pi t) + \text{ch}(\pi u)][\text{ch}(\pi t) + \text{ch}(\pi \tau)]}$$

$$g(t) = -\frac{\text{th}(\alpha t) \sin^2(2\alpha)}{\text{ch}(2\alpha t) + \cos(4\alpha)} +$$

$$+ \{\sin^2 \alpha (g_0(t)[2g_1(t) - tg_2(t)] - g_3(t)[2g_2(t) + tg_1(t)] -$$

$$- 2(1 - \nu) \sin \alpha (g_0(t)[\sin(3\alpha) - \text{ch}(2\alpha t) \sin \alpha] - g_3(t) \text{sh}(2\alpha t) \cos \alpha)\} / g_4(t)$$

$$g_0(t) = \kappa \text{sh}(2\alpha t) \cos(2\alpha) - t \sin(2\alpha), \quad g_1(t) = -\text{ch}(2\alpha t) + \cos(2\alpha) + \sin^2(2\alpha)$$

$$g_2(t) = \text{th}(\alpha t) \sin(2\alpha)(1 + \cos(2\alpha)), \quad g_3(t) = (\kappa \text{ch}(2\alpha t) - 1) \sin(2\alpha)$$

$$g_4(t) = [g_0^2(t) + g_3^2(t)](\text{sh}^2(\alpha t) + \cos^2(2\alpha))$$

$$F_0(\tau, \beta x) = \theta_0(\tau, \beta x), \quad F_1(\tau, \beta x) = \theta_1(\tau, \beta x) + \frac{\tau K_{i\tau}(\beta x)}{2(1 - \nu)(1 - 2\nu)W(\tau)}$$

$$F_2(\tau, \beta x) = \theta_2(\tau, \beta x) + \frac{4(1 - \nu)^2 \tau K_{i\tau}(\beta x) + \tau x K'_{i\tau}(\beta x)}{2(1 - \nu)(1 - 2\nu)W(\tau)}$$

Для сходимости ряда в ядре  $K_0(x, y, r, z)$  важно, что его символ  $W(u)$  типа тангенса гиперболического. Интегральное уравнение (2.1) для задачи А при  $\alpha = \pi$  совпадает с выведенным ранее для полупространства [8]. При  $\nu = 0.5$  ядра интегральных уравнений (2.1) приводятся к форме

$$K(x, y, r, z) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \text{sh}(\pi u) W_n(u) K_{iu}(\beta x) K_{iu}(\beta r) \sum_{k=-\infty}^\infty c_{k1}(\beta, z - y) du d\beta \quad (2.3)$$

$$W_1(u) = W_*(u) - \mu f_*(u) \left(1 - x \frac{d}{dx}\right), \quad W_2(u) = W_*(u) + \mu f_*(u) x \frac{d}{dz}$$

$$W_*(u) = \frac{\text{sh}(2\alpha u) - u \sin(2\alpha)}{2(\text{ch}^2(\alpha u) + u^2 \sin^2 \alpha)}, \quad f_*(u) = \frac{u \sin^2 \alpha}{\text{ch}^2(\alpha u) + u^2 \sin^2 \alpha}$$

где  $n = 1, 2$  для задач А и В соответственно. При  $\mu=0$  формулы (2.3) дают известное ядро [13].

Для упрощения ядра уравнения (2.1) воспользуемся представлением [17]

$$\sum_{k=-\infty}^\infty \exp(i\beta(z - y + 2lk)) = 2\pi \exp(i\beta(z - y)) \sum_{k=-\infty}^\infty \delta(2\beta l - 2\pi k) \quad (2.4)$$

где  $\delta(x)$  –  $\delta$ -функция Дирака, отделяя в нем действительную и мнимую часть. При вычислении интегралов с  $\delta$ -функцией (2.4) требуются значения пределов

$$\frac{2}{\pi} \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^\infty \text{sh}(\pi u) W(u) K_{iu}(\beta x) K_{iu}(\beta r) du = \int_0^\infty \frac{W(u)}{u} \cos\left(u \ln \frac{r}{x}\right) du \quad (2.5)$$

$$\frac{2}{\pi} \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{W(u) h(t) \text{sh}(\pi u) \text{sh}(\pi t)}{\text{ch}(\pi t) - \text{ch}(\pi u)} K_{iu}(\beta x) K_{iu}(\beta r) dt du = - \int_0^\infty \frac{W(u) h(u)}{u} \sin\left(u \ln \frac{r}{x}\right) du$$

возникающих в ядре (2.1) при  $k = 0$ ; также используем предел, получаемый почленным дифференцированием по  $x$  второй формулы (2.5).

Пределы (2.5) связаны с соответствующей плоской задачей. Если удержать в ядре уравнения (2.1) задачи А лишь слагаемое при  $k = 0$  (единичный штамп) для полосовой области контакта вдоль ребра клина, применить преобразование Фурье по  $z$  и совершить предельный переход  $\beta \rightarrow 0$  при учете формул (2.5), приходим к известному ядру интегрального уравнения плоской задачи с трением для клина [15]

$$K(x, r) = \int_0^\infty \frac{W(u)[u - \mu h_0(u)]}{u^2} \cos\left(u \ln \frac{r}{x}\right) du - \mu \nu_* \int_0^\infty \frac{W(u) h(u)}{u} \sin\left(u \ln \frac{r}{x}\right) du \quad (2.6)$$

Выделим главные члены ядра уравнения (2.1). Для функции  $K_0(x, y, r, z)$  возьмем интегралы и ряд [15, 18, 19] ( $C$  – постоянная Эйлера)

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ut) - \exp(-u)}{u} du = -\ln|t|, \quad \int_0^\infty \text{ch}(\pi u) K_{iu}(tx) K_{iu}(tr) du = \frac{\pi}{2} K_0(t|r - x|)$$

$$\frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} K_0(\pi_k |r-x|) \cos(\pi_k(z-y)) = \frac{1}{R} + \frac{1}{l} \left( C + \ln \frac{|r-x|}{4l} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{R_k^+} + \frac{1}{R_k^-} - \frac{1}{kl} \right]$$

$$R = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y)^2}, \quad R_k^{\pm} = \sqrt{(r-x)^2 + (z-y \pm 2kl)^2}, \quad \pi_k = \pi k/l$$

а для зависящих от  $\mu$  слагаемых ядра выделим интегралы и ряды [15, 18, 19]

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{U(t, u) K_{iu}(\beta x) K_{iu}(\beta r)}{\operatorname{ch}(\pi t) - \operatorname{ch}(\pi u)} \cos(\beta(z-y)) d\beta dt du &= -\frac{r-x}{R^2} \\ \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{U(t, u) K_{iu}'(\beta x) K_{iu}(\beta r)}{\operatorname{ch}(\pi t) - \operatorname{ch}(\pi u)} \sin(\beta(z-y)) \frac{d\beta}{\beta} dt du &= -\frac{z-y}{R^2} \\ U(t, u) &= \operatorname{ch}(\pi t) \operatorname{ch}(\pi u) - 1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r-x}{(R_k^+)^2} = \frac{\pi \operatorname{sh}(\pi(r-x)/l)}{2l [\operatorname{ch}(\pi(r-x)/l) - \cos(\pi(z-y)/l)]}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z-y+2lk}{(R_k^+)^2} = \frac{\pi \sin(\pi(z-y)/l)}{2l [\operatorname{ch}(\pi(r-x)/l) - \cos(\pi(z-y)/l)]}$$

Ряды (2.7) позволяют точно просуммировать члены, порожденные решением задачи Черрути для полупространства.

В результате представим ядра уравнения (2.1) в форме

$$\begin{aligned} K_0(x, y, r, z) &= \frac{1}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{R_k^+} + \frac{1}{R_k^-} - \frac{1}{kl} \right] + \frac{C}{l} + \frac{1}{l} \ln \frac{|r-x|}{4l |\ln(r/x)|} + \\ &+ \frac{1}{l} \int_0^{\infty} \left\{ [W(u) - 1] \cos \left( u \ln \frac{r}{x} \right) + \exp(-u) \right\} \frac{du}{u} + \\ &+ \frac{4}{\pi l} \int_0^{\infty} \operatorname{sh}(\pi u) \left\{ [W(u) - \operatorname{cth}(\pi u)] \Sigma_0(u, u) + \frac{W(u) \Sigma_0(u)}{\operatorname{ch}(\pi u/2)} \right\} du \\ K_1(x, y, r, z) &= \frac{\pi v_* \operatorname{sh}(\pi(r-x)/l)}{2l [\operatorname{ch}(\pi(r-x)/l) - \cos(\pi(z-y)/l)]} + \\ &+ \frac{v_*}{l} \int_0^{\infty} [W(u) h(u) - 1] \sin \left( u \ln \frac{r}{x} \right) \frac{du}{u} + \\ &+ \frac{4}{\pi l} \int_0^{\infty} \operatorname{sh}(\pi u) W(u) \left[ \frac{h_0(u)}{u} \Sigma_1(u, u) + \frac{\Sigma_1(u)}{\operatorname{ch}(\pi u/2)} \right] du - \\ &- \frac{4v_*}{\pi l} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{W(u) h(t) \operatorname{sh}(\pi u) \operatorname{sh}(\pi t) - U(t, u) \Sigma_1(t, u)}{\operatorname{ch}(\pi t) - \operatorname{ch}(\pi u)} dt du \\ K_2(x, y, r, z) &= \frac{\pi v_* \sin(\pi(z-y)/l)}{2l [\operatorname{ch}(\pi(r-x)/l) - \cos(\pi(z-y)/l)]} - \\ &- \frac{z-y}{lx} \int_0^{\infty} \left\{ v_* [W(u) h(u) - 1] \cos \left( u \ln \frac{r}{x} \right) + \frac{W(u) h_0(u)}{u} \sin \left( u \ln \frac{r}{x} \right) \right\} du + \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4}{\pi l} \int_0^\infty \text{sh}(\pi u) W(u) \left[ \frac{h_0(u)}{u} \Sigma(u, u) + h_1(u) \Sigma_2(u, u) + \frac{\Sigma_2(u)}{\text{ch}(\pi u/2)} \right] du - \\
 & - \frac{4v_*}{\pi l} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{W(u) h(t) \text{sh}(\pi u) \text{sh}(\pi t) - U(t, u)}{\text{ch}(\pi t) - \text{ch}(\pi u)} \Sigma(t, u) dt du + \\
 & + \frac{4}{\pi l} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{W(u) h_0(t) \text{sh}(\pi u) \text{sh}(\pi t)}{\text{ch}(\pi t) - \text{ch}(\pi u)} \Sigma_2(t, u) dt du \\
 \Sigma_n(t, u) & = \sum_{k=1}^\infty K_{it}(\pi_k x) K_{iu}(\pi_k r) s_{kn}(z - y), \quad s_{k0}(t) = s_{k1}(t) = \cos(\pi_k t) \\
 \Sigma_n(u) & = \sum_{k=1}^\infty \Psi_n(u, \pi_k x) K_{iu}(\pi_k r) s_{kn}(z - y), \quad s_{k2}(t) = \frac{\sin(\pi_k t)}{\pi_k x} \\
 \Sigma(t, u) & = x \sum_{k=1}^\infty K'_{it}(\pi_k x) K_{iu}(\pi_k r) s_{k2}(z - y)
 \end{aligned}$$

В формулах (2.8) улучшена сходимость всех интегралов с учетом асимптотического поведения символов в бесконечности. Ядра (2.8) содержат слагаемые, входящие в ядра известных интегральных уравнений пространственных и плоских контактных задач с трением для одного штампа; в пределе при  $l \rightarrow \infty$  они стремятся к известным ядрам для одного штампа. Логарифмический член ядра  $K_0(x, y, r, z)$  обладает устранимой особенностью при  $r \rightarrow x$  [8, 13].

**3. Численный метод.** Для решения контактных задач используем метод, развитый Галановым [14], который позволяет определить область контакта и давления в этой области одновременно. В данном методе интегрирование в уравнении (2.1), (1.1) распространяется на прямоугольник  $S$ , содержащий область  $\Omega$  (рис. 1). В условиях отсутствия контакта и обращения в нуль давления в дополнительной области  $S \setminus \Omega$  приходим к системе интегрального уравнения и интегрального неравенства

$$\begin{aligned}
 \int_S q(N) K(N, M) dN & = d(M), \quad q(M) \geq 0, \quad M \in \Omega \\
 \int_S q(N) K(N, M) dN & > d(M), \quad q(M) = 0, \quad M \in S \setminus \Omega \\
 N = x, y, \quad M = r, z, \quad d(M) & = 2\pi\theta [\delta - f(M)]
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

После введения нелинейных операторов

$$p^+(M) = \sup\{p(M), 0\}, \quad p^-(M) = \inf\{p(M), 0\}$$

и представления искомого давления в форме

$$q = q(M) = q^+(M) + q^-(M)$$

система (3.1) сводится к решению нелинейного операторного уравнения типа Гаммерштейна

$$\Theta p = 0 \quad (M \in \Omega), \quad \Theta p \equiv p^- + Kp^+ - d \tag{3.2}$$

где  $p = p(M)$ ,  $p^\pm = p^\pm(M)$ ,  $d = d(M)$ ,

$$Kp^+ = \int_S p^+(N) K(N, M) dN \tag{3.3}$$

Интегральное неравенство (3.1) удовлетворяется автоматически. Можно доказать эквивалентность системы (3.1) и уравнения (3.2) [14, 15].

Для численного решения уравнения (3.2) применяется модифицированный метод Ньютона, который базируется на построении последовательных приближений по формулам

$$p_{n+1} = p_n - (F' p_n)^{-1} \Theta p_n, \quad p_n = p_n(M), \quad n = 0, 1, \dots, \quad p_0 = d$$

где  $F$  – дифференцируемый оператор, аппроксимирующий оператор  $\Theta$  по равномерной метрике [14, 15].

В отличие от задач для одного штампа [14, 15] первое ядро (2.8) в прямоугольнике  $S$  имеет не только классическую особенность  $R^{-1}$ , но и дополнительные интегрируемые особенности  $(R_1^\pm)^{-1}$  в точках  $r = x$ ,  $z - y = \pm 2l$  на сторонах  $S$ , обозначенных точками на рис. 1. При расчете значений ядра в интегралах типа (3.3) особенности сглаживались по формуле ( $k = 0; 1$ )

$$(r - x)^2 + (z - y \pm 2kl)^2 \rightarrow (r - x)^2 + (z - y \pm 2kl)^2 + \frac{h_1 h_2}{16}$$

где  $h_1$  и  $h_2$  – шаги сетки соответственно по осям  $r$  и  $z$ .

Введем безразмерные обозначения (штрихи далее опускаем)

$$r' = \frac{r - c}{l}, \quad x' = \frac{x - c}{l}, \quad z' = \frac{z}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad A = \frac{l}{2R_1}, \quad B = \frac{l}{2R_2}, \quad \lambda = \frac{c}{l}$$

$$q'(r', z') = \frac{q(r, z)}{2\pi\theta}, \quad \varepsilon = \frac{a}{l}, \quad \delta' = \frac{\delta}{l}, \quad P' = \frac{P}{2\pi\theta l^2}, \quad S' \leftrightarrow S, \quad \Omega' \leftrightarrow \Omega$$

Параметр  $\lambda$  характеризует относительную удаленность цепочки штампов от ребра клина.

В табл. 1 и 2 приведены соответственно зависимости  $P(\delta)$  ( $\lambda = 2$ ,  $\nu = 0.5$ ,  $\mu = 0.2$ ,  $\varepsilon = 1$ ) и  $P(\lambda)$  ( $\delta = 1$ ,  $\nu = 0.5$ ,  $\mu = \pm 0.2$ ,  $\varepsilon = 1$ ) для разных углов клина  $\alpha$ , рассчитанные при  $A = 1$  и  $B = 0.2$  для задачи А и  $A = 0.2$  и  $B = 1$  для задачи В. Значения вдавливающей силы  $P$  растут при увеличении угла клина и осадки штампов и снижаются при отдалении цепочки от ребра клина. Для упругой четверти пространства соответствующие значения больше, чем для полупространства, что объясняется приближением зоны контакта к жесткой заделке по угловой координате. Для несжимаемого полупространства в задаче А, а также для произвольного клина в задаче В, знак  $\mu$  не влияет на значение  $P$  (см. уравнения (2.1) и (2.3)). Существенное влияние направления сил трения на вдавливающую силу  $P$  при  $\nu = 0.5$  наблюдается в задаче А при контакте вблизи ребра остроугольного клина. Для несжимаемой четверти пространства при  $\mu < 0$  (силы трения направлены в положительном направлении полуоси  $r$ ) значения  $P$  меньше, чем при  $\mu > 0$  (см. табл. 2). Противоположная ситуация отмечалась для сжимаемого полупространства ( $\alpha = \pi$ ,  $\nu = 0.25$ ) [8]. Такое поведение интегральной характеристики контактных давлений коррелирует со знаком связанной с  $\mu$  части фундаментального решения плоской задачи (2.6), которое является нормальным перемещением (с обратным знаком), вызванным действием касательной силы, приложенной в точке  $r = x$  и направленной к углу клина [15]. При  $r < x$  для полуплоскости указанное нормальное перемещение точек границы  $u_\varphi(r, \alpha = \pi) \leq 0$  ( $\nu = 0.25$ ) [8], тогда как для несжимаемой четверти плоскости  $u_\varphi(r, \alpha = \pi/2) \geq 0$  ( $\nu = 0.5$ ), что по-разному может влиять на контакт.

Для достаточно вытянутых вдоль ребра клина штампов при росте осадки  $\delta$  наблюдается выход области контакта на боковые стороны прямоугольника  $S$  (показаны точками на рис. 1), что означает начало перколяции (слияние областей контакта). На рис. 2 показаны зависимости (а)  $\min\delta(\lambda)$  и (б)  $\min P(\lambda)$ , при которых начинается слияние областей контакта для задачи А ( $\nu = 0.5$ ,  $A = \varepsilon = 1$ ,  $B = \mu = 0.2$ ; сплошные линии для  $\alpha = 3\pi/2$ , пунктир –  $\alpha = \pi$ , точки –  $\alpha = \pi/2$ ). Значения  $\min P(\lambda)$  при  $\alpha = \pi$  и  $\alpha = \pi/2$  отличаются

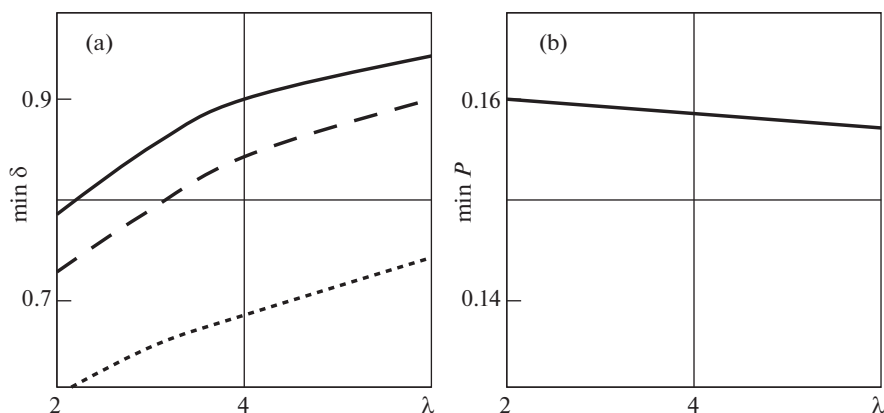
**Таблица 1.** Значения силы  $P$  в зависимости от осадки  $\delta$

Задача	А			В			
	$\delta$	0.5	1	1.5	0.5	1	1.5
$\alpha = \pi/2$		0.132	0.332	0.444	0.147	0.375	0.628
$\alpha = \pi$		0.0996	0.235	0.309	0.109	0.267	0.442
$\alpha = 3\pi/2$		0.0918	0.214	0.281	0.0985	0.236	0.389

**Таблица 2.** Значения силы  $P$  в зависимости от параметра  $\lambda$

Задача	А			В			
	$\lambda$	1.5	2.5	3.5	1.5	2.5	3.5
$\alpha = \pi/2, \mu = 0.2$		0.383	0.303	0.268	0.451	0.335	0.291
$\alpha = \pi/2, \mu = -0.2$		0.341	0.278	0.248	0.451	0.335	0.291
$\alpha = \pi, \forall \mu$		0.258	0.221	0.202	0.306	0.246	0.222
$\alpha = 3\pi/2, \mu = 0.2$		0.233	0.202	0.186	0.266	0.220	0.202
$\alpha = 3\pi/2, \mu = -0.2$		0.227	0.198	0.183	0.266	0.220	0.202

от соответствующих значений при  $\alpha = 3\pi/2$  не более, чем на 2%, и не показаны на рис. При уменьшении угла раствора клина снижается осадка, при которой наступает перколяция. При отдалении цепочки штампов от ребра клина указанная осадка, наоборот, возрастает. При этом вдавливающая сила меняется незначительно. На рис. 3 внутри прямоугольника  $S$  показаны границы половинок симметричных по  $z$  областей контакта  $\Omega$  (задача А,  $\nu = 0.5, A = \epsilon = 1, B = \mu = 0.2$ ). При развитии перколяции с ростом осадки  $\delta$  наблюдается увеличение линии слияния соседних областей при  $z = 1$  и площади  $\Omega$ , смещение области  $\Omega$  к ребру клина относительно точки начального касания (рис. 3,а,  $\alpha = \pi/2, \delta = 1, \lambda = 2$ ). Область контакта растет также при уменьшении угла остроугольного клина (рис. 3,б,  $\delta = 0.5, \lambda = 1.5$ , сплошная линия для  $\alpha = \pi$ , пунктир –  $\alpha = \pi/2$ ).



**Рис. 2.** Зависимости (а)  $\min\delta(\lambda)$  и (б)  $\min P(\lambda)$  для начала перколяции.



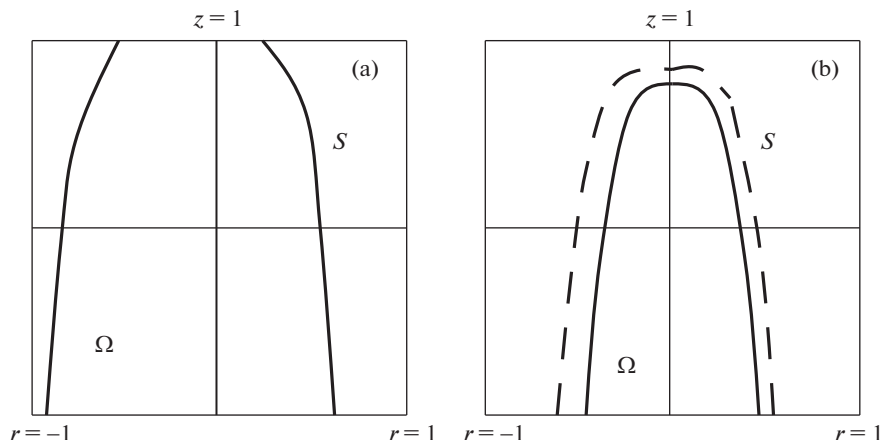


Рис. 3. Границы половинок зон контакта (а) после и (б) до перколяции.

**Заключение.** Закрепление одной грани пространственного упругого клина позволяет получить корректные интегральные уравнения при линейно-периодическом контакте с трением Кулона. Установлена структура ядер интегральных уравнений задач линейно-периодического контакта с трением для клина, которая включает известные члены ядер интегральных уравнений соответствующих плоских и пространственных контактных задач с трением для одного штампа. На линиях возможной перколяции возникают дополнительные интегрируемые особенности ядра порядка  $R^{-1}$ . При уменьшении острого угла клина характеристики контакта могут существенно отличаться от случая полупространства.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (код проекта 22-21-00013).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Xu Y., Jackson R.L. Periodic contact problems in plane elasticity: the fracture mechanics approach // ASME J. Trib. 2018. V. 140. № 1. P. 011404. <https://doi.org/10.1115/1.4036920>
2. Пожарский Д.А. Периодические контактные и смешанные задачи теории упругости (обзор) // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2021. № 2. С. 22–33. <https://doi.org/10.18522/1026-2237-2021-2-22-33>
3. Горячева И.Г. Периодическая контактная задача для упругого полупространства // ПММ. 1998. Т. 62. № 6. С. 1036–1044.
4. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
5. Goryacheva I., Yakovenko A. The periodic contact problem for spherical indenters and viscoelastic half-space // Tribol. Int. 2021. V. 161. P. 107078. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2021.107078>
6. Александров В.М. Двоякопериодические контактные задачи для упругого слоя // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 308–315.
7. Yastrebov V.A., Ancaux G., Molinari J.-F. The contact of elastic regular wavy surfaces revisited // Tribol. Lett. 2014. V. 56. P. 171–183. <https://doi.org/10.1007/s11249-014-0395-z>
8. Золотов Н.Б., Пожарский Д.А. Периодические контактные задачи для полупространства с частично закрепленной границей // ПММ. 2022. Т. 86. Вып. 3. С. 394–403. <https://doi.org/10.31857/S0032823522030122>

9. *Goryacheva I.G., Torskaya E.V.* Modeling of fatigue wear of a two-layered elastic half-space in contact with periodic system of indenters // *Wear*. 2010. V. 268. № 11–12. P. 1417–1422.  
<https://doi.org/10.1016/j.wear.2010.02.018>
10. *Солдатенков И.А.* Периодическая контактная задача теории упругости. Учет трения, износа и сцепления // *ПММ*. 2013. Т. 77. Вып. 2. С. 337–351.
11. *Солдатенков И.А.* Пространственная контактная задача для упругого слоя и волнистого штампа при наличии трения и износа // *ПММ*. 2014. Т. 78. Вып. 1. С. 145–155.
12. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Y.* Combined effect of surface microgeometry and adhesion in normal and sliding contacts of elastic bodies // *Friction*. 2017. V. 5. P. 339–350.  
<https://doi.org/10.1007/s40544-017-0179-1>
13. *Пожарский Д.А.* Периодическая контактная задача для упругого клина // *ПММ*. 2015. Т. 79. Вып. 6. С. 864–872.
14. *Галанов Б.А.* Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // *ПММ*. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 827–835.
15. *Пожарский Д.А.* Фундаментальные решения статики упругого клина и их приложения. Ростов-на-Дону: ООО “ДГТУ-Принт”, 2019. 312 с.
16. *Пожарский Д.А.* Пространственная контактная задача с трением для упругого клина // *ПММ*. 2008. Т. 72. Вып. 5. С. 852–860.
17. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.
18. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
19. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.