ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 5, с. 147–169

УДК 539.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ВЯЗКОУПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ИЗГИБАЕМЫХ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН

А. П. Янковский[a,*]

[a] *Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия*

** e-mail: lab4nemir@rambler.ru*

Поступила в редакцию 26.07.2022 г.
После доработки 11.11.2022 г.
Принята к публикации 20.12.2022 г.

Разработана модель неизотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования многонаправленно армированных гибких пластин. Вязкопластическое деформирование изотропных материалов композиции описывается соотношениями теории течения с изотропным упрочнением, учитывающими зависимости функций нагружения от температуры и интенсивности скоростей деформаций. Вязкоупругое поведение компонентов композиции описывается уравнениями модели Максвелла–Больцмана. Ослабленное сопротивление армированных пластин поперечным сдвигам моделируется соотношениями теории изгиба Амбарцумяна, а геометрическая нелинейность – в приближении Кармана. Учитывается связанность теплофизической и механической составляющих задачи о неупругом динамическом деформировании армированных пластин. Температура по толщине конструкций аппроксимируется полиномом 7-го порядка. Численное решение сформулированной нелинейной двумерной задачи строится с использованием явной схемы шагов по времени. Исследовано вязкоупруго-вязкопластическое динамическое поведение относительно тонкой стеклопластиковой пластины с учетом и без учета теплового отклика в ней. Конструкция нагружается в поперечном направлении воздушной взрывной волной. Показано: неучет теплового отклика в стеклопластиковой пластине может существенно исказить расчетные поля остаточных деформаций компонентов ее композиции, несмотря даже на то, что максимальный нагрев такой конструкции не превышает 10°С. Вязкоупругопластические расчеты, когда чувствительностью материалов композиции к скорости их деформирования можно пренебречь, вполне обоснованно допустимо проводить без учета теплового отклика композитной пластины, если отсутствуют внешние источники тепла немеханического происхождения.

Ключевые слова: вязкоупруго-вязкопластическое деформирование, термочувствительность, многонаправленное армирование, гибкая пластина, тепловой отклик, теория изгиба Амбарцумяна, динамическое деформирование, явная численная схема

DOI: 10.31857/S0572329923700071, **EDN:** GLOLRC

1. Введение. Тонкостенные конструкции из композитных материалов (КМ) находят все более широкое применение в качестве силовых и защитных элементов современных изделий [1–17], которые часто испытывают высокоинтенсивное термосиловое нагружение [2, 6, 11, 13, 14, 17]. При этом материалы составляющих композиции могут деформироваться упругопластически [5, 13, 14, 18–20], поэтому актуальной является проблема математического моделирования неупругого деформирования КМ-пластин и оболочек, которая в настоящее время находится на стадии становления [5, 9, 13–15, 18, 20–23].

Известно, что пластические свойства материалов зависят от температуры и скорости деформирования [24, 25], поэтому в [23] была разработана модель термоупруговязкопластического деформирования многонаправленно армированных сред и проведены соответствующие расчеты для динамически нагружаемых гибких КМ-пластин. Однако в [23] не учитывались вязкоупругие свойства материалов компонентов композиции, что не позволило определить остаточные прогибы и остаточное напряженно-деформированное состояние (НДС) армированных пластин после их пластического неизотермического деформирования. В работе [22] учитывались как вязкопластические, так и вязкоупругие свойства материалов компонентов композиции, но не рассматривался тепловой отклик в КМ-пластинах при динамических нагрузках взрывного типа. Таким образом, модель неизотермического вязкоупруго-вязко-пластического деформирования армированных непрерывными волокнами композитных сред до настоящего времени не была разработана. При этом, как и в [23], необходимо учитывать связанность механической и температурной составляющих динамической задачи.

Для расчета волновых процессов, возникающих в тонкостенных элементах КМ-конструкций при их динамическом изгибном нагружении, и для моделирования их слабого сопротивления поперечному сдвигу обычно используют простейшие неклассические теории Рейсснера [2, 5, 10, 14, 26], Редди [8, 11] или Амбарцумяна [1, 22, 23]. Реже применяют более точные теории, основанные на использовании гипотезы ломаной линии [5, 6, 10].

Для численного интегрирования нелинейных задач динамики пластин и оболочек традиционно применяют явные схемы [5, 22, 23] или неявные методы Ньюмарка [13, 27].

Настоящая работа посвящена моделированию неизотермического вязкоупруговязкопластического динамического деформирования гибких армированных пластин при учете их ослабленного сопротивления поперечным сдвигам. Численное решение связанной термомеханической задачи строится с использованием явных методов шагов по времени.

2. Численно-аналитическая модель неизотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования многонаправленно армированного материала. Рассматривается КМ-среда, состоящая из матрицы, усиленной N семействами непрерывных волокон с плотностями армирования ω_k $(1 \le k \le N)$. Как и в работах [22, 23], разложим малые деформации $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ изотропного однородного материала k-го компонента композиции на вязкоупругие $e_{ij}^{(k)}$, несжимаемые пластические $p_{ij}^{(k)}$ и температурные $\delta_{ij}\varepsilon_{\Theta}^{(k)}$ составляющие, поэтому для скоростей этих деформаций справедливо представление

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} = \dot{e}_{ij}^{(k)} + \dot{p}_{ij}^{(k)} + \delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{\Theta}^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\dot{p}_{ii}^{(k)} = 0, \dot{\varepsilon}_{\Theta}^{(k)} = \alpha_k\dot{\Theta}), \quad 0 \le k \le N \qquad (2.1)$$

где Θ – температура; α_k – коэффициент линейного температурного расширения k-го материала композиции ($k = 0$ – связующая матрица, $k \ge 1$ – волокна k-го семейства); δ_{ij} – символ Кронекера; точка – производная по времени t. По повторяющимся индексам, если не оговорено, производится суммирование от 1 до 3.

Вязкоупругое поведение k-го компонента композиции моделируется соотношениями тела Максвелла–Больцмана [22, 28]:

$$\dot{\bar{e}}_{ij}^{(k)} = \frac{\dot{s}_{ij}^{(k)}}{2G_k} + \frac{s_{ij}^{(k)}}{2\eta_k}, \quad \dot{e}_0 = \frac{\dot{\sigma}_0^{(k)}}{3K_k} + \frac{\sigma_0^{(k)}}{3\mu_k}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \le k \le N \qquad (2.2)$$

где

$$
\begin{gathered}
s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}\sigma_0^{(k)}, \quad \dot{\bar{e}}_{ij}^{(k)} = \dot{e}_{ij}^{(k)} - \delta_{ij}\dot{e}_0^{(k)}, \quad \dot{e}_0^{(k)} = \frac{1}{3}\dot{e}_{ll}^{(k)} = \dot{\varepsilon}_0^{(k)} - \dot{\varepsilon}_\Theta^{(k)}, \quad \sigma_0^{(k)} = \frac{1}{3}\sigma_{ll}^{(k)} \\
\dot{\varepsilon}_0^{(k)} = \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{ll}^{(k)}, \quad 2G_k = \frac{E_k}{1+\nu_k}, \quad 3K_k = \frac{E_k}{1-2\nu_k}, \quad i,j = 1, 2, 3, \quad 0 \le k \le N
\end{gathered} \tag{2.3}
$$

$\sigma_{ij}^{(k)}$ – тензор напряжений; $s_{ij}^{(k)}$, $\dot{\bar{e}}_{ij}^{(k)}$ – девиаторы напряжений и скоростей вязкоупругих деформаций; $\sigma_0^{(k)}$ – среднее напряжение; $\dot{\varepsilon}_0^{(k)}$ – скорость средней деформации; E_k, ν_k – мгновенные модуль упругости первого рода и коэффициент Пуассона; G_k – мгновенный модуль упругости второго рода; K_k – мгновенный объемный модуль упругости; η_k, μ_k – коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости. Если материал k-го составляющего композиции термочувствителен, то величины E_k, ν_k, G_k, K_k, α_k, η_k и μ_k зависят от температуры ($E_k = E_k(\Theta)$ и т.д.).

Пластическое деформирование k-го компонента композиции ассоциировано с поверхностью текучести $f_k = 0$, обобщающей условие текучести Мизеса [23, 28]:

$$
f_k(T_k, \chi_k, H_k, \Theta) \equiv T_k^2 - \tau_s^{(k)2}(\chi_k, H_k, \Theta) = 0, \quad 0 \le k \le N \tag{2.4}
$$

где

$$
\begin{gathered}
T_k = \sqrt{\frac{1}{2}s_{ij}^{(k)}s_{ij}^{(k)}}, \quad \chi_k = \int_0^t \sqrt{2\dot{p}_{ij}^{(k)}\dot{p}_{ij}^{(k)}}\,dt, \quad H_k = \sqrt{2\xi_{ij}^{(k)}\xi_{ij}^{(k)}}, \quad \xi_{ij}^{(k)} = \dot{\bar{e}}_{ij}^{(k)} + \dot{p}_{ij}^{(k)} \\
i,j = 1, 2, 3, \quad 0 \le k \le N
\end{gathered} \tag{2.5}
$$

$\xi_{ij}^{(k)}$ – девиатор скоростей деформаций; $\tau_s^{(k)}$ – мгновенный предел текучести при чистом сдвиге, который равен значению интенсивности касательных напряжений T_k при фиксированных значениях накопленной пластической деформации χ_k (параметра Одквиста), интенсивности скоростей деформаций сдвига H_k и температуры Θ в текущий момент времени t.

В работе [22] не учитывалась зависимость функции f_k от Θ в соотношении (2.4), а в [23] не учитывались вязкие свойства в равенствах (2.2), т.е. было принято $\eta_k = \mu_k \to \infty$. Повторяя рассуждения из [22, 23], при учете соотношений (2.1)–(2.5) получим искомые определяющие соотношения неизотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования k-го материала композиции, которые для удобства изложения запишем в матричной форме:

$$
\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{V}_k\boldsymbol{\sigma}_k + \mathbf{Z}_k\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \mathbf{Y}_k\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \boldsymbol{\beta}_k\dot{\Theta}, \quad 0 \le k \le N \tag{2.6}
$$

Здесь и далее:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_k &= (\sigma_1^{(k)}\ \sigma_2^{(k)}\ \sigma_3^{(k)}\ \sigma_4^{(k)}\ \sigma_5^{(k)}\ \sigma_6^{(k)})^{\mathrm{T}} \equiv (\sigma_{11}^{(k)}\ \sigma_{22}^{(k)}\ \sigma_{33}^{(k)}\ \sigma_{23}^{(k)}\ \sigma_{31}^{(k)}\ \sigma_{12}^{(k)})^{\mathrm{T}} \\
\boldsymbol{\varepsilon}_k &= (\varepsilon_1^{(k)}\ \varepsilon_2^{(k)}\ \varepsilon_3^{(k)}\ \varepsilon_4^{(k)}\ \varepsilon_5^{(k)}\ \varepsilon_6^{(k)})^{\mathrm{T}} \equiv (\varepsilon_{11}^{(k)}\ \varepsilon_{22}^{(k)}\ \varepsilon_{33}^{(k)}\ 2\varepsilon_{23}^{(k)}\ 2\varepsilon_{31}^{(k)}\ 2\varepsilon_{12}^{(k)})^{\mathrm{T}} \\
\mathbf{s}_k &= (s_1^{(k)}\ s_2^{(k)}\ s_3^{(k)}\ s_4^{(k)}\ s_5^{(k)}\ s_6^{(k)})^{\mathrm{T}} \equiv (s_{11}^{(k)}\ s_{22}^{(k)}\ s_{33}^{(k)}\ s_{23}^{(k)}\ s_{31}^{(k)}\ s_{12}^{(k)})^{\mathrm{T}} \\
\xi_k &= (\xi_1^{(k)}\ \xi_2^{(k)}\ \xi_3^{(k)}\ \xi_4^{(k)}\ \xi_5^{(k)}\ \xi_6^{(k)})^{\mathrm{T}} \equiv (\xi_{11}^{(k)}\ \xi_{22}^{(k)}\ \xi_{33}^{(k)}\ \xi_{23}^{(k)}\ \xi_{31}^{(k)}\ \xi_{12}^{(k)})^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

$$
\mathbf{Z}_k = \bar{\mathbf{Z}}_k - G_k\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k, \quad \mathbf{Y}_k = \tau_H^{(k)}\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k, \quad 0 \le k \le N \tag{2.8}
$$

$\mathbf{V}_k = (v_{ij}^{(k)})$, $\bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$, $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$ – симметричные 6×6-матрицы, $\boldsymbol{\beta}_k = (\beta_i^{(k)})$ – шестикомпонентный вектор-столбец, ненулевые элементы которых определяются так:

$$v_{ij}^{(k)} = -\frac{K_k}{3\mu_k} + \left(\frac{1}{3} - \delta_{ij}\right)B_k, \quad v_{ll}^{(k)} = -B_k, \quad \overline{z}_{ij}^{(k)} = 2\delta_{ij}G_k + \lambda_k, \quad \overline{z}_{ll}^{(k)} = G_k$$

$$\beta_i^{(k)} = \frac{K_\Theta^{(k)}}{3K_k}\sum_{m=1}^{3}\sigma_m^{(k)} + 3K_k\alpha_k + \frac{s_i^{(k)}}{G_k}[G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)}(\tau_s^{(k)}G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)}G_k)A_k]$$

$$\beta_l^{(k)} = \frac{s_l^{(k)}}{G_k}[G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)}(\tau_s^{(k)}G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)}G_k)A_k]$$

$$(i, j = \overline{1, 3}, \quad l = \overline{4, 6}), \quad \overline{\overline{z}}_{ij}^{(k)} = A_k s_i^{(k)} s_j^{(k)}$$

$$(i, j = \overline{1, 6}), \quad \lambda_k = \frac{\nu_k E_k}{(1 + \nu_k)(1 - 2\nu_k)},$$

$$A_k = \frac{c_k G_k}{(G_k + \overline{G}_k)\tau_s^{(k)2}}, \quad B_k = \frac{G_k}{\eta_k}\left(1 - \frac{c_k G_k}{G_k + \overline{G}_k}\right) \tag{2.9}$$

$$K_\Theta^{(k)} = \frac{dK_k}{d\Theta}, \quad G_\Theta^{(k)} = \frac{dG_k}{d\Theta}, \quad \tau_\Theta^{(k)} = \frac{\partial\tau_s^{(k)}}{\partial\Theta}, \quad \tau_H^{(k)} = \frac{\partial\tau_s^{(k)}}{\partial H_k}, \quad \overline{G}_k = \frac{\partial\tau_s^{(k)}}{\partial\chi_k}$$

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad T_k < \tau_s^{(k)} \quad \text{или} \quad T_k = \tau_s^{(k)}, \quad W_k \le 0 \\ 1 & \text{при} \quad T_k = \tau_s^{(k)}, \quad W_k > 0 \end{cases}$$

$$W_k = G_k \mathbf{s}_k^{\text{т}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \tau_s^{(k)}G_k^{-1}(\tau_s^{(k)}G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)}G_k)\dot{\Theta} - 2\tau_s^{(k)}\tau_H^{(k)}H_k^{-1}\boldsymbol{\xi}_k^{\text{т}}\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k - G_k\eta_k^{-1}\tau_s^{(k)2}$$

$$T_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}s_i^{(k)2} + \sum_{i=4}^{6}s_i^{(k)2}, \quad H_k^2 = 2\sum_{i=1}^{3}\xi_i^{(k)2} + 4\sum_{i=4}^{6}\xi_i^{(k)2}, \quad 0 \le k \le N$$

$\overline{G}_k$ – касательный модуль сдвига при неупругом деформировании; c_k – параметр переключения, при определении которого использовано равенство (2.4): $c_k = 0$ – термовязкоупругое деформирование, разгрузка или нейтральное нагружение, $c_k = 1$ – активное нагружение при пластическом деформировании материала k-й фазы композиции; индекс “т” – операция транспонирования. По повторяющимся индексам k и l в равенствах (2.9) суммирования нет.

Если пластические свойства не зависят от температуры ($\tau_\Theta^{(k)} \equiv 0$), то уравнения (2.6) при учете (2.8) и (2.9) редуцируются в определяющие соотношения вязкоупруго-вязкопластического деформирования k-го материала композиции, которые полностью совпадают с уравнениями, полученными в [22]. Если же не учитываются вязкие свойства при упругом деформировании ($\mu_k = \eta_k \to \infty$), то из соотношений (2.6), (2.8) и (2.9) вытекают определяющие уравнения неизотермического упруговязкопластического деформирования k-го компонента композиции, полностью совпадающие с полученными в [23]. Таким образом, соотношение (2.6) при учете равенств (2.3)–(2.5), (2.8) и (2.9) обобщает определяющие уравнения, полученные в [22, 23].

В разделе 1 уже отмечалось, что численное решение исследуемой задачи предполагается получать на базе явных пошаговых схем [5, 22, 23], т.е. значения неизвестных функций будем определять в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \Delta$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), где $\Delta = \text{const} > 0$ – шаг по времени. Используя результаты работ [22, 23], считаем, что при $t = t_{n-1}$, t_n уже известны значения величин

$$\begin{gathered} \overset{n-1}{\sigma}_k(\mathbf{r}) \equiv \sigma_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \overset{n-1}{\dot{\sigma}}_k(\mathbf{r}) \equiv \dot{\sigma}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \overset{n-1}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k(\mathbf{r}) \equiv \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \overset{n-1}{\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k(\mathbf{r}) \equiv \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}) \\ \overset{n-1}{\dot{\Theta}}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\Theta}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \overset{m}{\Theta}(\mathbf{r}) \equiv \Theta(t_m, \mathbf{r}), \quad 0 \le k \le N, \quad m = n-1, n, \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3) \end{gathered} \tag{2.10}$$

где x_i – координаты точек КМ-тела. По аналогии с [22, 23] преобразуем первое, третье и четвертое слагаемые в правой части равенства (2.6), применив формулу трапеций, имеющую второй порядок точности по Δ [29]:

$$\overset{n}{\boldsymbol\sigma}_k - \overset{n-1}{\boldsymbol\sigma}_k = \frac{\Delta}{2}\left(\overset{n}{\dot{\boldsymbol\sigma}}_k + \overset{n-1}{\dot{\boldsymbol\sigma}}_k\right), \quad \overset{n}{\dot{\boldsymbol\varepsilon}}_k - \overset{n-1}{\dot{\boldsymbol\varepsilon}}_k = \frac{\Delta}{2}\left(\overset{n}{\ddot{\boldsymbol\varepsilon}}_k + \overset{n-1}{\ddot{\boldsymbol\varepsilon}}_k\right), \quad \overset{n}{\Theta} - \overset{n-1}{\Theta} = \frac{\Delta}{2}\left(\overset{n}{\dot\Theta} + \overset{n-1}{\dot\Theta}\right), \quad 0 \le k \le N$$

откуда получаем

$$\overset{n}{\boldsymbol\sigma}_k = \frac{\Delta}{2}\overset{n}{\dot{\boldsymbol\sigma}}_k + \overset{n-1/2}{\boldsymbol\sigma}_k, \quad \overset{n}{\ddot{\boldsymbol\varepsilon}}_k = \frac{2}{\Delta}\overset{n}{\dot{\boldsymbol\varepsilon}}_k - \frac{2}{\Delta}\overset{n-1/2}{\dot{\boldsymbol\varepsilon}}_k, \quad \overset{n}{\dot\Theta} = \frac{2}{\Delta}\overset{n}{\Theta} - \frac{2}{\Delta}\overset{n-1/2}{\Theta}, \quad 0 \le k \le N \tag{2.11}$$

где

$$\overset{n-1/2}{\boldsymbol\sigma}_k \equiv \overset{n-1}{\boldsymbol\sigma}_k + \frac{\Delta}{2}\overset{n-1}{\dot{\boldsymbol\sigma}}_k, \quad \overset{n-1/2}{\dot{\boldsymbol\varepsilon}}_k \equiv \overset{n-1}{\dot{\boldsymbol\varepsilon}}_k + \frac{\Delta}{2}\overset{n-1}{\ddot{\boldsymbol\varepsilon}}_k, \quad \overset{n-1/2}{\Theta} \equiv \overset{n-1}{\Theta} + \frac{\Delta}{2}\overset{n-1}{\dot\Theta}, \quad 0 \le k \le N \tag{2.12}$$

Из равенств (2.12) при учете предположений (2.10) следует, что шестикомпонентные векторы-столбцы $\overset{n-1/2}{\boldsymbol\sigma}_k$, $\overset{n-1/2}{\dot{\boldsymbol\varepsilon}}_k$ и величины $\overset{n-1/2}{\Theta}$, $\overset{n}{\Theta}$ в выражениях (2.11) при $t = t_n$ уже известны. Подстановка (2.11) в соотношение (2.6) приводит к матричному уравнению

$$\overset{n}{\dot{\boldsymbol\sigma}}_k = \overset{n}{\mathbf B}_k \overset{n}{\dot{\boldsymbol\varepsilon}}_k + \overset{n}{\mathbf p}_k, \quad 0 \le k \le N \tag{2.13}$$

где

$$\begin{gathered}\overset{n}{\mathbf B}_k \equiv \overset{n}{\bar{\mathbf V}}{}_k^{-1}\left(\overset{n}{\mathbf Z}_k + \frac{2}{\Delta}\overset{n}{\mathbf Y}_k\right), \quad \overset{n}{\mathbf p}_k \equiv \overset{n}{\bar{\mathbf V}}{}_k^{-1}\left(\overset{n}{\mathbf V}_k \overset{n-1/2}{\boldsymbol\sigma}_k - \frac{2}{\Delta}\overset{n}{\mathbf Y}_k \overset{n-1/2}{\dot{\boldsymbol\varepsilon}}_k + \frac{2}{\Delta}\left(\overset{n}{\Theta} - \overset{n-1/2}{\Theta}\right)\overset{n}{\boldsymbol\beta}_k\right) \\ \overset{n}{\bar{\mathbf V}}_k \equiv \mathbf I - \frac{\Delta}{2}\overset{n}{\mathbf V}_k, \quad 0 \le k \le N\end{gathered} \tag{2.14}$$

$\mathbf I$ – единичная 6×6-матрица; $\overset{n}{\bar{\mathbf V}}{}_k^{-1}$ – матрица, обратная 6×6-матрице $\overset{n}{\bar{\mathbf V}}_k$. В текущий момент времени t_n равенство (2.13) – искомое определяющее соотношение в случае неизотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования k-го компонента композиции.

Элементы матриц $\mathbf V_k$, $\mathbf Z_k$, $\mathbf Y_k$ и вектора-столбца $\boldsymbol\beta_k$ зависят от решения рассматриваемой задачи (см. выражения (2.8) и (2.9)), поэтому равенство (2.13) при учете (2.12) и (2.14) является нелинейным. Как и в [22, 23], линеаризовать это соотношение можно, используя метод, аналогичный методу переменных параметров упругости [30]. При этом в данный момент времени t_n на текущей итерации этого метода 6×6-матрица $\overset{n}{\mathbf B}_k = (\overset{n}{b}{}_{ij}^{(k)})$ и шестикомпонентный вектор-столбец $\overset{n}{\mathbf p}_k = (\overset{n}{p}{}_i^{(k)})$ $(i, j = \overline{1, 6})$ в уравнении (2.13) известны.

Линеаризованное матричное соотношение (2.13) формально совпадает с уравнениями (2.24) в [22] и (1.15) в [23], поэтому, используя результаты работ [22, 23], на базе определяющего равенства (2.13) в момент времени t_n на данной итерации получаем следующее линейное матричное соотношение, характеризующее неизотермическое вязкоупруго-вязкопластическое состояние КМ:

$$\overset{n}{\dot{\boldsymbol\sigma}} = \overset{n}{\mathbf B}\overset{n}{\dot{\boldsymbol\varepsilon}} + \overset{n}{\mathbf p}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.15}$$

где

$$\mathbf{B} \equiv \left(\omega_0\mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^{N}\omega_k\mathbf{B}_k\mathbf{E}_k\right)\mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{B}\mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \equiv \omega_0\mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^{N}\omega_k\left(\mathbf{p}_k + \mathbf{B}_k\mathbf{r}_k\right)$$
$$\mathbf{H} \equiv \omega_0\mathbf{I} + \sum_{k=1}^{N}\omega_k\mathbf{E}_k, \quad \mathbf{g} \equiv \sum_{k=1}^{N}\omega_k\mathbf{r}_k, \quad \omega_0 \equiv 1 - \sum_{k=1}^{N}\omega_k, \quad \mathbf{r}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1}\varsigma_k, \quad \mathbf{E}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1}\mathbf{C}_k \tag{2.16}$$

$\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — шестикомпонентные вектор-столбцы усредненных напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} в композиции, которые аналогичны выражениям (2.7); ω_0 — относительное объемное содержание связующего материала в репрезентативной ячейке композиции; $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}_k$, $\mathbf{C}_k$ — 6×6-матрицы; $\mathbf{D}_k^{-1}$, $\mathbf{H}^{-1}$ — матрицы, обратные 6×6-матрицам $\mathbf{D}_k$, $\mathbf{H}$; $\mathbf{p}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{r}_k$, ς_k — шестикомпонентные вектор-столбцы. Элементы матриц $\mathbf{C}_k = (c_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{D}_k = (d_{ij}^{(k)})$ и вектор-столбца $\varsigma_k = (\varsigma_i^{(k)})$ вычисляются так:

$$c_{1j}^{(k)} = d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^{6} g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^{6} g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)}$$
$$\varsigma_1^{(k)} = 0, \quad \varsigma_i^{(k)} = \sum_{l=1}^{6} g_{il}^{(k)}(p_l^{(0)} - p_l^{(k)}), \quad i = \overline{2,6}, \quad j = \overline{1,6}, \quad 1 \le k \le N \tag{2.17}$$

$$g_{11}^{(k)} = q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \ldots, g_{16}^{(k)} = 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \ldots$$
$$2g_{61}^{(k)} = q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \ldots, g_{66}^{(k)} = q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \le k \le N \tag{2.18}$$

$$l_{11}^{(k)} = \sin\theta_k \cos\varphi_k, \quad l_{12}^{(k)} = \sin\theta_k \sin\varphi_k, \quad l_{13}^{(k)} = \cos\theta_k$$
$$l_{21}^{(k)} = -\sin\varphi_k, \quad l_{22}^{(k)} = \cos\varphi_k, \quad l_{23}^{(k)} = 0$$
$$l_{31}^{(k)} = -\cos\theta_k \cos\varphi_k, \quad l_{32}^{(k)} = -\cos\theta_k \sin\varphi_k, \quad l_{33}^{(k)} = \sin\theta_k, \quad 1 \le k \le N \tag{2.19}$$

Не выписанные в выражениях (2.18) элементы $6 \cdot 6$-матриц $\mathbf{G}_k = (g_{ij}^{(k)})$ и $\mathbf{Q}_k = (q_{ij}^{(k)})$ приведены в табл. (21.40) и (21.44) в [31]. Матрицы $\mathbf{G}_k$ и $\mathbf{Q}_k$ определяют преобразования векторов-столбцов $\boldsymbol{\sigma}_k$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ (см. равенства (2.7)) при переходе от глобальной ортогональной системы координат x_j к локальной ортогональной системе $x_i^{(k)}$, связанной с арматурой k-го семейства. При этом ось $x_1^{(k)}$ ориентирована вдоль волокна и определяется углами сферической системы координат θ_k и φ_k (рис. 1). Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между осями $x_i^{(k)}$ и x_j ($i, j = \overline{1,3}$) задаются равенствами (2.19). (В соотношениях (2.17) и (2.18) опущен верхний индекс n.)

Как и в [22, 23], при выводе равенств (2.15), (2.16) попутно получаются линеаризованные матричные соотношения

$$\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_0 = \overset{n}{\mathbf{H}}{}^{-1}\,\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \overset{n}{\mathbf{H}}{}^{-1}\,\overset{n}{\mathbf{g}}, \quad \overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k = \overset{n}{\mathbf{E}}_k\,\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_0 + \overset{n}{\mathbf{r}}_k, \quad 1 \le k \le N \tag{2.20}$$

Эти равенства при $t = t_n$ на текущей итерации позволяют последовательно выразить скорости деформаций связующего $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ и волокон k-го семейства $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ через скорости усредненных деформаций композиции $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Согласно равенствам (2.9) и (2.16)–(2.19), в данный момент времени t_n на рассматриваемой итерации матрицы $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}^{-1}$, $\mathbf{E}_k$ и векторы-столбцы $\mathbf{p}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{r}_k$ в соотношениях (2.15) и (2.20) известны. Если температурное влияние не учитывается ($\dot{\Theta} \equiv 0$), то уравнение (2.15) при учете равенств (2.12), (2.14), (2.16) и (2.17) редуцируется в определяющее соотношение для КМ, полученное в [22] для случая вязкоупруго-вязкопластиче-

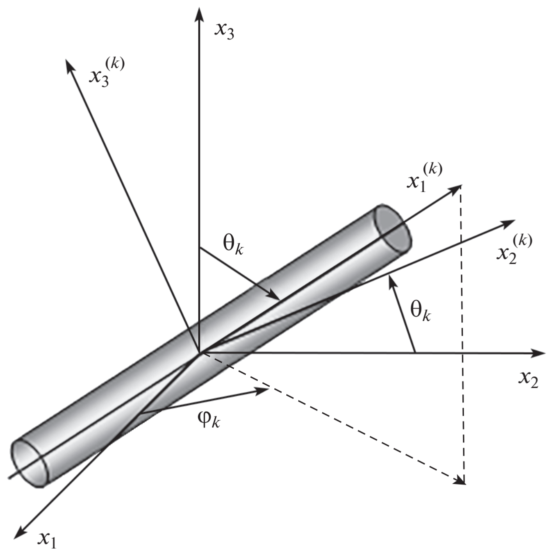

Рис. 1. Локальная система координат, связанная с траекторией волокна k-го семейства.

ского деформирования материалов композиции. Если же в выражениях (2.9) принять $\mu_k = \eta_k \to \infty$, то уравнение (2.15) вырождается в определяющее соотношение для КМ, полученное в [23] для неизотермического случая упруговязкопластического деформирования составляющих композиции. Таким образом, уравнение (2.15) обобщает структурные соотношения, выведенные в [22, 23].

Пусть в момент времени t_n итерационный процесс сошелся с необходимой точностью, т.е. в соотношении (2.15) известны скорости деформаций композиции $\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}$, тогда с помощью (2.20) определяем скорости деформаций компонентов композиции $\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k$ (см. (2.7)), а из равенств (2.13) – скорости напряжений $\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}_k$ в этих же материалах. После этого, используя (2.2) при учете (2.3), можно вычислить скорости вязкоупругих деформаций $\overset{n}{\dot{e}}{}_{ij}^{(k)}$. Центральные конечные разности на трехточечном шаблоне по времени $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$ дают выражения

$$\frac{1}{2\Delta}\left(\overset{n+1}{\varepsilon}{}_{ij}^{(k)} - \overset{n-1}{\varepsilon}{}_{ij}^{(k)}\right) = \overset{n}{\dot{\varepsilon}}{}_{ij}^{(k)}, \quad \frac{1}{2\Delta}\left(\overset{n+1}{e}{}_{ij}^{(k)} - \overset{n-1}{e}{}_{ij}^{(k)}\right) = \overset{n}{\dot{e}}{}_{ij}^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \le k \le N \tag{2.21}$$

где правые части уже вычислены, а в левых частях деформации $\overset{n-1}{\varepsilon}{}_{ij}^{(k)}$ и $\overset{n-1}{e}{}_{ij}^{(k)}$ предполагаются известными из решения задачи в предшествующий момент времени t_{n-1}. Следовательно, соотношения (2.21) позволяют определить $\overset{n+1}{\varepsilon}{}_{ij}^{(k)}$ и $\overset{n+1}{e}{}_{ij}^{(k)}$.

Считаем, что в начальный момент времени $t = t_0 = 0$ все составляющие композиции находились в естественном состоянии при температуре $\Theta = \Theta^0 = \text{const}$, тогда из соотношений (2.1) имеем

$$\varepsilon^{(k)}_{ij} = e^{(k)}_{ij} + p^{(k)}_{ij} + \delta_{ij}\varepsilon^{(k)}_{\Theta} \qquad \left(\varepsilon^{(k)}_{\Theta} = \int\limits_{t_0}^{t}\alpha_k\dot{\Theta}dt\right)$$

откуда, используя для вычисления интеграла формулу средней точки, получаем

$$\begin{gathered}\overset{n+1}{p}{}^{(k)}_{ij} = \overset{n+1}{\varepsilon}{}^{(k)}_{ij} - \overset{n+1}{e}{}^{(k)}_{ij} - \delta_{ij}\,\overset{n+1}{\bar{\alpha}}_k\left(\overset{n+1}{\Theta} - \overset{n}{\Theta}\right) - \delta_{ij}\,\overset{n}{\varepsilon}{}^{(k)}_{\Theta} \\ \overset{n+1}{\bar{\alpha}}_k \equiv \left(\overset{n+1}{\alpha}_k + \overset{n}{\alpha}_k\right)\Big/2, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \le k \le N\end{gathered} \tag{2.22}$$

где правые части уже известны из равенств (2.21) и предположения о том, что температура $\overset{n+1}{\Theta}$ заранее вычислена из уравнения теплового баланса для КМ по явной численной схеме (см. ниже), а температурная деформация $\overset{n}{\varepsilon}{}^{(k)}_{\Theta}$ определена по решению, полученному в предшествующий момент времени t_{n-1}:

$$\overset{n}{\varepsilon}{}^{(k)}_{\Theta} \equiv \int\limits_{t_0}^{t_n}\alpha_k\dot{\Theta}dt = \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\alpha_k\dot{\Theta}dt + \overset{n-1}{\varepsilon}{}^{(k)}_{\Theta} \approx \overset{n-1}{\varepsilon}{}^{(k)}_{\Theta} + \overset{n}{\bar{\alpha}}_k\left(\overset{n}{\Theta} - \overset{n-1}{\Theta}\right), \quad 0 \le k \le N$$

Используя второе соотношение (2.5), можно вычислить параметр упрочнения χ_k в следующий момент времени t_{n+1}:

$$\overset{n+1}{\chi}_k = \int\limits_{0}^{t_{n+1}}\sqrt{2\dot{p}^{(k)}_{ij}\dot{p}^{(k)}_{ij}}dt = \overset{n}{\chi}_k + \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}\sqrt{2dp^{(k)}_{ij}dp^{(k)}_{ij}} \approx \overset{n}{\chi}_k + \sqrt{2\Delta\,\overset{n+1}{p}{}^{(k)}_{ij}\,\Delta\,\overset{n+1}{p}{}^{(k)}_{ij}}, \quad 0 \le k \le N \tag{2.23}$$

где

$$\Delta\,\overset{n+1}{p}{}^{(k)}_{ij} \equiv \overset{n+1}{p}{}^{(k)}_{ij} - \overset{n}{p}{}^{(k)}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \le k \le N \tag{2.24}$$

В правой части равенства (2.24) значения пластических деформаций, согласно (2.22), уже определены, поэтому в выражении (2.23) известно последнее слагаемое. Следовательно, по формуле (2.23) при учете соотношений (2.21), (2.22) и (2.24) можно вычислить величину параметра Одквиста $\overset{n+1}{\chi}_k$ при $t = t_{n+1}$. Такой способ расчета значения $\overset{n+1}{\chi}_k$ удобен тем, что в момент времени t_{n+1} не требуется уточнять параметр упрочнения при использовании итерационного процесса по методу переменных параметров упругости.

При моделировании динамического неизотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования КМ нужно учитывать связанность механической и теплофизической составляющих задачи. Поэтому к механическим определяющим уравнениям (2.15) необходимо добавить структурные соотношения закона Фурье для КМ, которые ранее были получены в [32], и определяются матричными равенствами (2.1)–(2.3) из [23].

3. Формулировка задачи неизотермического вязкоупруго-вязкопластического динамического деформирования КМ-пластины при изгибе. Рассмотрим динамический изгиб КМ-пластины толщиной $2h$ (рис. 2), с которой связана прямоугольная декартова си-

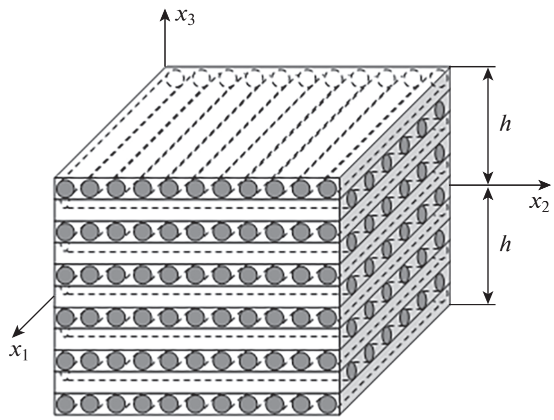

Рис. 2. Элемент пластины с ортогональной плоско-перекрестной структурой армирования.

стема координат x_i так, что плоскость Ox_1x_2 ($x_3 = 0$) – срединная ($|x_3| \le h$). Конструкция многонаправленно армирована (возможно, и пространственно [33]) N семействами волокон. Структура армирования в направлении Ox_3 является однородной.

Для учета возможного ослабленного сопротивления КМ-пластины поперечному сдвигу и моделирования волновых процессов в ней используем теорию изгиба Амбарцумяна [1, 22, 23, 31]. Предполагаем, что внешние касательные силы на лицевых поверхностях конструкции ($|x_3| = h$) не учитываются и в случае пространственной структуры армирования выполняются требования, изложенные в замечании в [23]. (Для плоско-перекрестной структуры, изображенной на рис. 2, эти требования заведомо выполняются.) При этих условиях усредненные деформации композиции ε_{ij} и перемещения точек пластины U_i определяются так (геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана):

$$\begin{gathered}\varepsilon_{IJ}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\partial_I u_J + \partial_J u_I) - x_3\partial_I\partial_J w + \frac{x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2)(\partial_I\varepsilon_{J3}^0 + \partial_J\varepsilon_{I3}^0) + \frac{1}{2}\partial_I w\partial_J w \\ \varepsilon_{I3}(t,\mathbf{r}) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2}\varepsilon_{I3}^0(t,\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad I, J = 1, 2\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}U_I(t,\mathbf{r}) = u_I(t,\mathbf{x}) - x_3\partial_I w + \frac{2x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2)\varepsilon_{I3}^0 \\ U_3(t,\mathbf{r}) = w(t,\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \le h, \quad t \ge t_0, \quad I = 1,2\end{gathered} \tag{3.2}$$

где w – прогиб; u_I – тангенциальные перемещения точек отсчетной плоскости ($x_3 = 0$) в направлениях x_I; ε_{I3}^0 – деформации поперечных сдвигов в точках этой плоскости; ∂_I – оператор частного дифференцирования по координате x_I; Ω – область, занимаемая пластиной в плане. В соотношениях (3.1) и (3.2) неизвестны двумерные функции u_I, w и ε_{I3}^0 ($I = 1, 2$).

В настоящей работе рассматривается динамическое деформирование КМ-пластины как гибкой тонкостенной системы, поэтому нормальное напряжение $\sigma_{33}(t,\mathbf{r})$ с приемлемой для инженерных приложений точностью можно линейно аппроксимировать по x_3 [2]:

$$\sigma_{33}(t,\mathbf{r}) \equiv \sigma_3(t,\mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t,\mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t,\mathbf{x})}{2h}x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t,\mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t,\mathbf{x})}{2} \\ \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \le h, \quad t \ge t_0 \tag{3.3}$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t,\mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t,\mathbf{x},\pm h)$ – известные из силовых граничных условий напряжения на верхней (+) и нижней (–) лицевых плоскостях.

Матричное определяющее соотношение (2.15) состоит из шести алгебраических уравнений. Согласно условиям соответствия, аналогичным (2.7), из третьего равенства этой системы в текущий момент времени t_n можем выразить скорость линейной деформации композиции в поперечном направлении

$$\overset{n}{\dot{\varepsilon}}_{33} \equiv \overset{n}{\dot{\varepsilon}}_3 = \left(\overset{n}{b}_{33}\right)^{-1}\left(\overset{n}{\dot{\sigma}}_3 - \overset{n}{p}_3 - \sum_{i=1}^{6}(1-\delta_{3i})\overset{n}{b}_{3i}\overset{n}{\dot{\varepsilon}}_i\right) \tag{3.4}$$

где b_{3i}, p_3 $(i = \overline{1,6})$ – элементы матрицы $\mathbf{B}$ и вектор-столбца $\mathbf{p}$ в уравнении (2.15); скорость $\dot{\sigma}_3$ получается путем дифференцирования по t выражения (3.3). Скорости $\dot{\varepsilon}_i$ в правой части равенства (3.4) определяются за счет дифференцирования по времени соотношений (3.1), т.е. характеризуются функциями w, $\dot{w}$, $\dot{u}_I$ и $\dot{\varepsilon}_{I3}^{0}$ $(I = 1, 2)$.

К кинематическим соотношениям (3.1), (3.2) нужно присоединить двумерные уравнения движения гибкой пластины (см. (3.5) в [22]) и соответствующие граничные и начальные условия (см. (3.8)–(3.10) в [22]).

Как и в [23], температуру Θ по толщине конструкции аппроксимируем полиномом порядка L:

$$\Theta(t,\mathbf{r}) - \Theta^0 = \sum_{l=0}^{L}\Theta_l(t,\mathbf{x})x_3^l, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \le h, \quad t \ge t_0 \tag{3.5}$$

где Θ_l $(0 \le l \le L)$ – искомые двумерные функции.

Для замыкания системы разрешающих уравнений неизотермического вязкоупруговязкопластического изгибного деформирования КМ-пластины к соотношениям (3.5) необходимо присоединить двумерные (относительно Θ_l, $0 \le l \le L$) уравнения теплопроводности (см. (4.11), (4.13) и (4.18) в [23]) и соответствующие им граничные и начальные условия (см. (4.20) и (4.22) в [23]).

4. Метод расчета. Как и в работах [22, 23], для интегрирования сформулированной нелинейной задачи используем явные схемы шагов по времени, определяя неизвестные функции в дискретные моменты времени t_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. При этом предполагаем, что при $t = t_m$ кроме функций (2.10) уже известны и значения следующих величин:

$$\overset{m}{u}_I(\mathbf{x}) \equiv u_I(t_m,\mathbf{x}), \quad \overset{m}{w}(\mathbf{x}) \equiv w(t_m,\mathbf{x})$$
$$\overset{m}{\gamma}_I(\mathbf{x}) \equiv \gamma_I(t_m,\mathbf{x}), \quad \overset{m}{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_m,\mathbf{r})$$
$$\overset{m}{\sigma}{}_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m,\mathbf{x}), \quad \overset{m}{\sigma}{}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m,\mathbf{r})$$

$$
\begin{gathered}
\overset{m}{\varepsilon}{}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m,\mathbf{r}), \quad \overset{n}{\chi}_k(\mathbf{r}) \equiv \chi_k(t_n,\mathbf{r}) \\
\overset{n}{\dot p}{}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \dot p_{ij}^{(k)}(t_n,\mathbf{r}), \quad \overset{n}{U}{}^{(r)}(\mathbf{x}) \equiv U^{(r)}(t_n,\mathbf{x}) \\
\overset{n}{q}_i(\mathbf{r}) \equiv q_i(t_n,\mathbf{r}), \quad \overset{n}{\Theta}_l(\mathbf{x}) \equiv \Theta_l(t_n,\mathbf{x}) \\
\overset{n}{q}{}_{\infty}^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv q_{\infty}^{(\pm)}(t_n,\mathbf{x}), \quad I = 1, 2, \quad i, j = \overline{1, 3} \\
0 \le r \le L-2, \quad 0 \le l \le L, \quad m = n-1, n \\
0 \le k \le N, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \le h
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

где

$$
\gamma_I(t,\mathbf{x}) \equiv \frac{8}{5}\varepsilon_{I3}^0 - \partial_I w, \quad U^{(r)}(t,\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^{h} U(t,\mathbf{r}) x_3^r dx_3, \quad I = 1, 2, \quad 0 \le r \le L-2 \tag{4.2}
$$

γ_I — введенные для удобства двумерные функции; U — удельная внутренняя энергия КМ; q_i — компоненты вектора теплового потока в КМ; $q_{\infty}^{(\pm)}$ — заданные тепловые потоки через нижнюю (−) и верхнюю (+) лицевые плоскости.

Производные по времени в механической составляющей рассматриваемой неизотермической вязкоупруго-вязкопластической задачи (за исключением второго соотношения (2.11)) аппроксимируем центральными конечными разностями на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$, что позволяет разработать явную численную схему. После замены в уравнениях движения гибкой КМ-пластины вторых производных по времени от кинематических переменных w, u_I и γ_I их конечно-разностными аналогами при учете выражения (3.3), первого соотношения (4.2) и обозначений, аналогичных (4.1), получим [22, 23]

$$
\begin{gathered}
\frac{2h\rho}{\Delta^2}\left(\overset{n+1}{w} - 2\overset{n}{w} + \overset{n-1}{w}\right) = \sum_{S=1}^{2} \partial_S\left(\overset{n}{F}_{S3} + \sum_{J=1}^{2} \overset{n}{F}_{SJ}\partial_J \overset{n}{w}\right) + \overset{n}{\sigma}{}_{33}^{(+)} - \overset{n}{\sigma}{}_{33}^{(-)} \\
\frac{2h\rho}{\Delta^2}\left(\overset{n+1}{u}_I - 2\overset{n}{u}_I + \overset{n-1}{u}_I\right) = \sum_{J=1}^{2} \partial_J\left(\overset{n}{F}_{IJ} - \overset{n}{F}_{J3}\partial_J \overset{n}{w}\right) - \left(\overset{n}{\sigma}{}_{33}^{(+)} - \overset{n}{\sigma}{}_{33}^{(-)}\right)\partial_I \overset{n}{w} \\
\frac{2h^3\rho}{3\Delta^2}\left(\overset{n+1}{\gamma}_I - 2\overset{n}{\gamma}_I + \overset{n-1}{\gamma}_I\right) = \sum_{J=1}^{2} \partial_J \overset{n}{M}_{IJ} - \overset{n}{F}_{I3}, \quad I = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad n = 1, 2, 3, \ldots
\end{gathered}
\tag{4.3}
$$

где

$$
\begin{gathered}
\rho \equiv \rho_0\omega_0 + \sum_{k=1}^{N} \rho_k\omega_k, \quad F_{IJ} \equiv \int_{-h}^{h} \sigma_{IJ} dx_3 \\
F_{I3} \equiv \int_{-h}^{h} \sigma_{I3} dx_3, \quad M_{IJ} \equiv \int_{-h}^{h} \sigma_{IJ} x_3 dx_3, \quad I, J = 1, 2
\end{gathered}
\tag{4.4}
$$

ρ_0, ρ_k — объемные плотности материалов связующего и волокон k-го семейства. Внешние массовые силы в равенствах (4.3) не учитываются.

Используя предположения (4.1), по формулам (4.4) в текущий момент времени t_n можно определить все силовые факторы F_{IJ}, F_{I3} и M_{IJ}, входящие в правые части уравнений (4.3). Поэтому при учете необходимых граничных условий [22] из уравнений (4.3) по явной схеме можно вычислить значения неизвестных функций $\overset{n+1}{w}$, $\overset{n+1}{u}_I$ и $\overset{n+1}{\gamma}_I$ в момент времени t_{n+1}. Затем по формулам (3.1) при учете первого равенства (4.2) определяем усредненные деформации композиции $\overset{n+1}{\varepsilon}_{ij}$. На основании равенств (3.1), (4.1) при $t = t_{n-1}$ деформации $\overset{n-1}{\varepsilon}_{ij}$ уже известны, поэтому, используя численное дифференцирование по времени (аналогичное (2.21)), и учитывая соотношение (3.4), в данный момент времени t_n можем вычислить и скорости деформаций $\overset{n}{\dot{\varepsilon}}_{ij}$ в каждой точке КМ-конструкции. После этого по формулам (2.20) с учетом соответствий (2.7) получаем скорости деформаций фаз композиции $\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k$, а по формулам (2.13) с учетом (2.14) – скорости напряжений $\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}_k$ в тех же компонентах. Далее, из равенств (2.21) и

$$\frac{1}{2\Delta}\left(\overset{n+1}{\sigma}{}_{ij}^{(k)} - \overset{n-1}{\sigma}{}_{ij}^{(k)}\right) = \overset{n}{\dot{\sigma}}{}_{ij}^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad 0 \le k \le N$$

в которых правые части уже известны, при учете предположений (4.1) определяем напряжения $\overset{n+1}{\sigma}{}_{ij}^{(k)}$, полные $\overset{n+1}{\varepsilon}{}_{ij}^{(k)}$ и упругие $\overset{n+1}{e}{}_{ij}^{(k)}$ деформации в k-м компоненте композиции, а по формулам (2.22) и (2.23) при учете (2.24) – пластические деформации $\overset{n+1}{p}{}_{ij}^{(k)}$ и параметр Одквиста $\overset{n+1}{\chi}_k$ в том же компоненте в следующий момент времени t_{n+1}. Усредняя по правилу смеси (аналогично первой формуле (4.4)) известные напряжения $\overset{n+1}{\sigma}{}_{ij}^{(k)}$, получим напряжения в композиции $\overset{n+1}{\sigma}_{ij}$ $(i, j = \overline{1, 3})$ при $t = t_{n+1}$.

Согласно формулам (2.9) при учете (2.11), в рассматриваемый момент времени t_n параметр переключения c_k зависит от скоростей деформаций $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$, поэтому определяющее уравнение (2.15) при $t = t_n$ нужно уточнять, используя итерации метода переменных параметров упругости [30]. Предварительно выполненные расчеты показали, что для достижения приемлемой в инженерных приложениях точности на каждом шаге по времени вполне достаточно использовать две таких итерации.

Для интегрирования теплофизической составляющей исследуемой задачи используем явную схему, но построенную на двухточечном шаблоне по времени $\{t_n, t_{n+1}\}$. При этом двумерные уравнения теплопроводности с учетом (3.5), (4.2) и обозначений, аналогичных (4.1), примут вид [23]:

$$\frac{\rho}{\Delta}\left(\overset{n+1}{U}{}^{(m)} - \overset{n}{U}{}^{(m)}\right) = -\partial_1 \overset{n}{Q}{}_1^{(m)} - \partial_2 \overset{n}{Q}{}_2^{(m)} - \overset{n}{\bar{Q}}{}_3^{(m)} + \overset{n}{W}{}^{(m)}$$
$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \le m \le L - 2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.5}$$

$$-\sum_{l=0}^{L} (-1)^l h^{l-1}(l\lambda_{33}^{(-)} + h\alpha^{(-)})\Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(-)}(\Theta_\infty^{(-)} - \Theta^0) + q_\infty^{(-)}(t, \mathbf{x})$$
$$\sum_{l=0}^{L} h^{l-1}(l\lambda_{33}^{(+)} + h\alpha^{(+)})\Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(+)}(\Theta_\infty^{(+)} - \Theta^0) - q_\infty^{(+)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \ge t_0 \tag{4.6}$$

$$C_0\sum_{i=0}^{L}H(i+m)\Theta_i+\frac{C_1}{2}\sum_{i=0}^{L}\sum_{j=0}^{L}H(i+j+m)\Theta_i\Theta_j+$$
$$+\frac{C_2}{3}\sum_{i=0}^{L}\sum_{j=0}^{L}\sum_{l=0}^{L}H(i+j+l+m)\Theta_i\Theta_j\Theta_l=U^{(m)}(t,\mathbf{x}) \qquad (4.7)$$
$$\mathbf{x}\in\Omega,\quad t\ge t_0,\quad 0\le m\le L-2$$

где

$$H(s)\equiv\frac{h^{s+1}}{s+1}[1-(-1)^{s+1}],\quad Q_i^{(m)}(t,\mathbf{x})\equiv$$
$$\equiv\int_{-h}^{h}q_i(t,\mathbf{r})x_3^m dx_3\quad (i=\overline{1,3}),\quad \bar{Q}_3^{(m)}(t,\mathbf{x})\equiv$$
$$\equiv\int_{-h}^{h}\partial_3 q_3(t,\mathbf{r})x_3^m dx_3=h^m[q_3^{(+)}-(-1)^m q_3^{(-)}]-mQ_3^{(m-1)}(t,\mathbf{x}) \qquad (4.8)$$
$$W^{(m)}(t,\mathbf{x})\equiv\int_{-h}^{h}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}x_3^m dx_3$$
$$C_l(\mathbf{x})\equiv\frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{N}c_l^{(k)}\rho_k\omega_k(\mathbf{x})\quad (l=0,1,2),\quad \lambda_{33}^{(\pm)}\equiv\lambda_{33}\big|_{\Theta=\Theta(t,\mathbf{x},\pm h)},\quad q_3^{(\pm)}\equiv q_\infty^{(\pm)}$$

λ_{33} – коэффициент теплопроводности КМ в направлении Ox_3, который вычисляется по структурным соотношениям из [32] (см. (2.2) в [23]); $\alpha^{(\pm)}$ – коэффициент теплоотдачи со стороны нижней (–) и верхней (+) лицевых поверхностей; $\Theta_\infty^{(\pm)}$ – температуры окружающей среды со стороны тех же плоскостей; $c_l^{(k)}$ – коэффициент разложения удельной теплоемкости k-го материала композиции $c_k(\Theta-\Theta^0)$ по формуле (в случае термочувствительности):

$$c_k(\Theta-\Theta^0)=c_0^{(k)}+c_1^{(k)}(\Theta-\Theta^0)+c_2^{(k)}(\Theta-\Theta^0)^2,\quad 0\le k\le N \qquad (4.9)$$

Соотношения (4.6) – тепловые граничные условия, заданные на лицевых поверхностях КМ-конструкции и преобразованные с учетом выражения (3.5). Уравнения (4.7) определяют связь между двумерными величинами $U^{(m)}$ (см. (4.2)) и коэффициентами разложения температуры (3.5) при выполнении равенств (4.9). Соотношения (4.6) и (4.7) выполняются в каждый момент времени t.

Используя формулы (4.8) и предположения (4.1), в данный момент времени t_n можем вычислить правые части в уравнениях (4.5), из которых при учете соответствующих начальных и граничных тепловых условий, заданных на контуре Γ, ограничивающем область Ω, по явной схеме определяем значения функций $\overset{n+1}{U}{}^{(m)}$ в последующий момент времени t_{n+1}. Затем из уравнения (4.6) и (4.7) с учетом (4.8) вычисляем коэффициенты разложения температуры $\overset{n+1}{\Theta}_l(\mathbf{x})$ $(0\le l\le L)$ в формуле (3.5). Далее, с помощью закона теплопроводности Фурье для композиции пластины (см. (3.1)–(3.3) в [23]) при уже известной из (3.5) температуре $\overset{n+1}{\Theta}(\mathbf{r})$ определяем компоненты вектора теплового потока $\overset{n+1}{q}_i(\mathbf{r})$ $(i=\overline{1,3},\ \mathbf{x}\in\Omega,\ |x_3|\le h)$, после чего все функции, указанные в

(4.1), становятся известными при $t = t_{n+1}$ и можно повторить описанную выше процедуру для построения решения на следующем шаге по времени.

При учете термочувствительности компонентов композиции система уравнений (4.6) и (4.7), в которой правые части при $t = t_{n+1}$ уже известны, нелинейна. Линеаризовать ее можно, применяя метод переменных теплофизических параметров, формально аналогичный методу переменных параметров упругости [30]. Как показали расчеты, для достижения приемлемой в приложениях точности достаточно применять две—три итерации такого процесса.

Анализ структуры левых частей равенств (4.3) и (4.5) показывает, что для начала проведения расчетов по разработанной схеме следует предварительно определить функции $\overset{m}{w}$, $\overset{m}{u}_I$, $\overset{m}{\gamma}_I$ $(m = 0, 1)$ и $\overset{0}{U}{}^{(l)}$. При $t = t_0$ значения функций $\overset{0}{w}$, $\overset{0}{u}_I$, $\overset{0}{\gamma}_I$ и $\overset{0}{U}{}^{(l)}$ $(0 \le l \le L - 2)$ получаются из начальных условий (см. (3.10) в [22] и (4.22) в [23]). Если в момент времени t_0 внешние нагрузки отсутствуют ($\overset{0}{\sigma}{}^{(+)}_{33} = \overset{0}{\sigma}{}^{(-)}_{33} \equiv 0$) и КМ-конструкция покоится в естественном состоянии, то, используя начальные условия и уравнения движения, по формуле Тейлора получим $\overset{1}{w} \approx \overset{1}{u}_I \approx 0$, $\overset{1}{\gamma}_I \approx 0$ $(I = 1, 2)$ с точностью Δ^3 [23].

После замены в равенствах (4.3), (4.5) производных $\partial_I(\bullet)$ их конечно-разностными аналогами и присоединения к этим соотношениям необходимых граничных условий (см. (3.8), (3.9) в [22] и (4.20) в [23]) окончательно получаем явную численную схему для интегрирования нелинейной связанной начально-краевой задачи неизотермического вязкоупруго-вязкопластического деформирования гибкой армированной пластины. В случае неканонической формы области Ω, занимаемой конструкцией в плане, дискретизацию по пространственным переменным x_1 и x_2 можно проводить с использованием вариационно-разностного подхода, предложенного в [5]. В работе [23] показано, что шаг по времени Δ в уравнениях (4.3) и (4.5) следует выбирать, исходя из критерия устойчивости Куранта для уравнений (4.3) (см. анализ соотношений (6.3) в [23]).

5. Обсуждение результатов расчетов. Исследуем неизотермическое вязкоупруго-вязкопластическое деформирование относительно тонкой прямоугольной пластины (Ω: $|x_1| \le a$, $|x_2| \le b$; $a = 3b$, $b = 50$ см, $2h = 2$ см; $2h/2b = 1/50$), которая по всей кромке жестко закреплена ($w = u_I = 0$, $\gamma_I = 0$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, $t \ge t_0$) и до момента времени $t = t_0 = 0$ покоится ($w = u_I \equiv 0$, $\gamma_I \equiv 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $t = t_0$ $I = 1, 2$) при температуре естественного состояния $\Theta = \Theta^0 = 20°\text{C}$ ($\mathbf{x} \in \Omega$, $|x_3| \le h$, $t = t_0$). Конструкция нагружается со стороны нижней лицевой плоскости давлением p, вызванным воздушной взрывной волной [27]:

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \le t \le t_{\max} \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max} \end{cases}$$
$$\alpha = -\ln(0.01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} < t_{\max} \tag{5.1}$$

где смысл параметров $p_{\max}$, $t_{\max}$, $t_{\min}$ и α очевиден и описан в [22]. На основании экспериментальных данных [27] примем $t_{\max} = 0.1$ мс, $t_{\min} = 2$ мс и $p_{\max} = 3$ МПа.

На лицевых плоскостях ($x_3 = \pm h$) теплообмен с окружающей средой реализуется в условиях естественной конвекции ($q_\infty^{(\pm)} \equiv 0$, $\alpha^{(\pm)} = 30$ Вт/(м$^2 \cdot$ К) [34]) при температуре воздуха $\Theta_\infty^{(\pm)} = \Theta^0$ (см. соотношения (4.6) и (4.8)). На торцевых поверхностях кон-

Таблица 1. Физико-механические характеристики компонентов композиции [25, 35]

Характеристика	Эпоксидная смола		Стекловолокно	
материала	$\Theta = 20°C$	$\Theta = 40°C$	$\Theta = 20°C$	$\Theta = 80°C$
		$\dot\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$ $с^{-1}$		
ρ, кг/м^3	1210.0	1208.0	2520.0	2519.6
E, ГПа	2.8	2.3	86.8	86.3
N	0.330	0.333	0.250	0.254
η, МПа · с	340	300	1250	1200
σ_s, МПа	20	18	4500	4400
E_s, ГПа	1.114	0.783	6.230	5.168
λ, Вт/(м К)	0.243	0.240	0.89	0.86
$\alpha \times 10^6$, К$^{-1}$	68.1	70.3	2.5	2.6
c, кДж/(кг К)	1.54	1.60	0.800	0.839
		$\dot\varepsilon = 104.0$ $с^{-1}$		
σ_s, МПа	22.0	19.5	4600	4550
E_s, ГПа	1.238	0.853	6.314	5.458

струкции заданы тепловые граничные условия I рода, и температура поддерживается равной Θ^0.

Конструкция изготовлена из эпоксисвязующего [35] и усилена стекловолокнами [25]. Пластическое поведение компонентов композиции при активном нагружении и постоянстве температуры Θ и скорости деформации $\dot\varepsilon$ описывается зависимостью

$$\sigma = \operatorname{sign}(\varepsilon_p)\sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)}\varepsilon_p, \quad 0 \le k \le N \tag{5.2}$$

где σ, ε_p – осевое напряжение и пластическая составляющая соответствующей линейной деформации ε; $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\dot\varepsilon, \Theta)$ – модуль упрочнения k-го материала композиции; $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\dot\varepsilon, \Theta)$ – условный предел текучести того же материала. Физико-механические характеристики компонентов композиции представлены в табл. 1. Объемная вязкость материалов не учитывалась: $\mu_k \to \infty$, $0 \le k \le N$ (см. (2.2) и (2.9)). Во второй части табл. 1 (для $\dot\varepsilon = 104$ $с^{-1}$) приведены только те значения характеристик материалов, которые отличаются от данных, представленных в первой части (при $\dot\varepsilon = 5 \times 10^{-4}$ $с^{-1}$). Зависимости всех физико-механических характеристик от температуры Θ и скорости деформирования $\dot\varepsilon$ в расчетах аппроксимировались линейно по данным, приведенным в табл. 1.

При проведении расчетов по пространственным переменным x_1 и x_2 вводилась равномерная сетка с шагом $\Delta x_1 = \Delta x_2 = b/50 = 1$ см, а шаг по времени $\Delta = 1$ мкс. При этом необходимое условие устойчивости численной схемы (критерий Куранта) с запасом выполняется для каждого из компонентов композиции, а значит и для композиции в целом.

Конструкция армирована двумя ($N = 2$) семействами волокон, которые уложены в направлениях Ox_1 и Ox_2 (рис. 2) с плотностями $\omega_1 = 0.1$ и $\omega_2 = 0.3$ соответственно. Согласно рис. 1, в этом случае в формулах (2.19) следует принять $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi/2$.

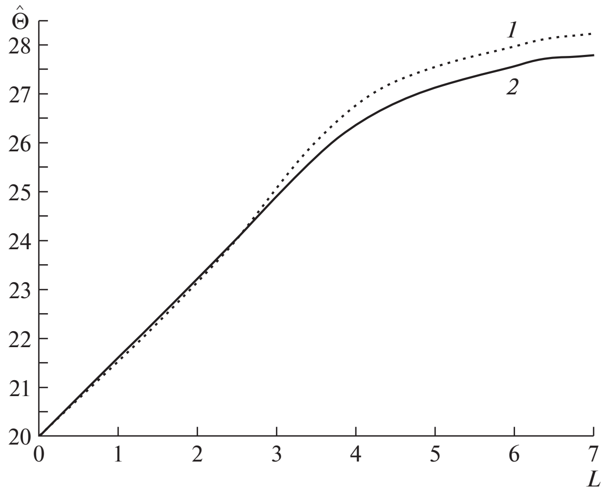

Рис. 3. Зависимости наибольшего значения температуры в КМ-пластине от порядка ее аппроксимирующего полинома в поперечном направлении, рассчитанные по разным теориям.

Для того чтобы определить порядок полинома L в разложении (3.5), при котором аппроксимация температуры Θ имеет приемлемую точность, исследуем зависимость от L наибольшего значения $\hat{\Theta}(L) = \max\limits_{t,\mathbf{r}} \Theta(t, \mathbf{r}; L)$, $|x_1| \le a$, $|x_2| \le b$ и $|x_3| \le h$ (расчетный интервал времени $0 \le t \le 0.5$ с). На рис. 3 представлены зависимости $\hat{\Theta}(L)$ (в °C), полученные при учете (кривая *1*) и неучете (кривая *2*) чувствительности пластических свойств материалов композиции к скорости их деформирования. В последнем случае (см. (2.9) при $\tau_H^{(k)} \equiv 0$, $0 \le k \le N$) расчет проводился по данным табл. 1, которые соответствуют скорости деформации $\dot{\varepsilon} = 5 \times 10^{-4}$ с$^{-1}$.

На рис. 3 значению $L = 0$ соответствует случай, когда тепловой отклик в КМ-конструкции вообще не учитывается, поэтому условно принято $\hat{\Theta}(0) = \Theta^0 = 20$°C. Поведение обеих кривых показывает, что приращение величины $\hat{\Theta}$ при переходе от значения $L = 6$ к значению $L = 7$ пренебрежимо мало с практической точки зрения. При значениях $L \ge 8$ система линеаризованных уравнений (4.6) и (4.7) при учете (4.8), из которой в данный момент времени вычисляются коэффициенты полиномиального представления температуры (3.5), становится плохо обусловленной, поэтому зависимость $\hat{\Theta}(L)$ получается расходящейся. В силу этого обстоятельства соответствующие участки кривых при $L \ge 8$ на рис. 3 не изображены.

В квазистатических расчетах традиционно принято аппроксимировать температуру по толщине тонкостенной конструкции полиномом первого ($L = 1$) или второго ($L = 2$) порядка [1, 5, 10, 11]. Однако сопоставление ординат точек на обеих кривых рис. 3 при значениях $L = 1$ или $L = 2$ и при $L = 7$ свидетельствует о том, что при динамическом упругопластическом деформировании гибких КМ-пластин линейная или квадратичная аппроксимация температуры по их толщине приводит к значительному занижению наибольших значений расчетной температуры. Для адекватного же расчета температурного поля в случаях такого нагружения КМ-конструкции температуру по ее толщине целесообразно аппроксимировать полиномом 7-го порядка (см. (3.5) при $L = 7$).

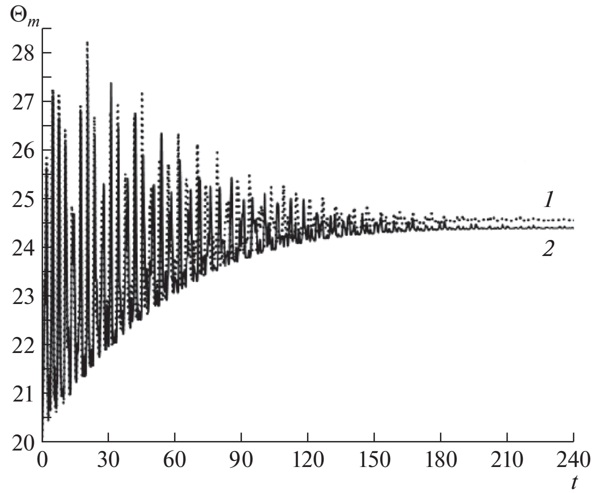

Рис. 4. Зависимости от времени максимальных значений температуры в КМ-пластине, рассчитанные с использованием разных теорий неупругого деформирования компонентов ее композиции.

На рис. 4 изображены зависимости осцилляций наибольших значений температуры Θ_{m} (в °С) в КМ-пластине от времени t (в мс): $\Theta_{\mathrm{m}}(t) = \max\limits_{\mathbf{r}} \Theta(t, \mathbf{r})$, $|x_1| \le a$, $|x_2| \le b$ и $|x_3| \le h$. При этом, согласно полученным выше результатам, в формуле (3.5) было принято $L = 7$. Кривые *1* и *2* на рис. 4 рассчитаны при тех же условиях, что и аналогичные кривые на рис. 3. Поведение кривых на рис. 4 показывает, что к моменту времени $t \approx 220$ мс осцилляции функции $\Theta_{\mathrm{m}}(t)$ в обоих расчетах практически прекращаются. При этом наибольшее значение температуры $\hat{\Theta} = \max\limits_{t \ge 0} \Theta_{\mathrm{m}}(t) = \Theta_{\mathrm{m}}(28.25 \times 10^{-3}) \approx 28°\mathrm{C}$ в обоих случаях превышает температуру естественного состояния Θ^0 примерно на 8°С. К моменту же времени $t = 220$ мс зависимости $\Theta_{\mathrm{m}}(t)$ стабилизируются и имеют значения, близкие к 24.4°С. Как видно из сравнения кривых *1* и *2*, при учете зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования (кривая *1*) значения $\hat{\Theta}$ и $\Theta_{\mathrm{m}}(t)$ при $t \ge 220$ мс получаются несколько большими, чем в случае расчета, не учитывающем эту зависимость (кривая *2*). Об этом же свидетельствует и поведение кривых *1* и *2* на рис. 3.

На рис. 5 изображены зависимости остаточных прогибов w (в мм) от координаты x_2 (в м), определенные в центральном поперечном сечении ($x_1 = 0$) при $t = 500$ мс, когда КМ-пластина практически перестала колебаться. Кривые *1* и *2* на рис. 5 получены при тех же условиях, что и кривые на рис. 3 и 4. Штриховые кривые *1'* и *2'* на рис. 5 приведены для сравнения и рассчитаны при тех же данных, что и сплошные кривые *1* и *2*, но без учета теплового отклика (т.е. кривая *1'* определена по теории, разработанной в [22]). Поведение кривых *1* и *1'* свидетельствует о том, что при учете чувствительности пластических свойств материалов композиции к скорости их деформирования остаточный прогиб КМ-конструкции имеет традиционный $\bigcap$-образный вид. Поведение же кривых *2* и *2'* показывает, что при неучете указанной зависимости остаточный прогиб имеет М-образный вид, т.е. согласно таким расчетам КМ-пластина после динамического пластического деформирования приобретает гофрированную остаточную

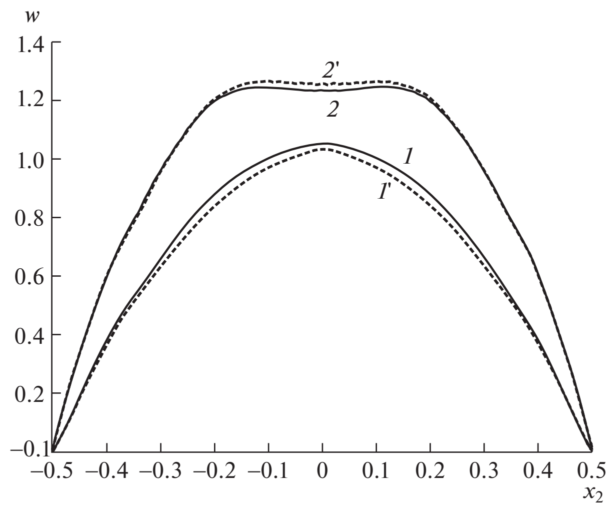

Рис. 5. Зависимости остаточного прогиба в центральном сечении прямоугольной удлиненной КМ-пластины, рассчитанные по разным теориям с учетом и без учета теплового отклика.

форму со складками, ориентированными в продольном направлении Ox_1. Следовательно, расчеты, проводимые без учета чувствительности пластических свойств компонентов композиции к скорости их деформирования, могут приводить к качественно неверным представлениям о форме остаточных прогибов КМ-пластины (даже в тех случаях, когда такая зависимость является весьма слабой, как в рассматриваемом случае стеклопластиковой конструкции).

Сравнение максимальных значений ординат точек на кривых *1* и *2* на рис. 5 демонстрирует, что наибольший остаточный прогиб, вычисленный без учета чувствительности пластических свойств материалов композиции к скорости их деформирования (кривая *2*), на 17% больше, чем в случае учета этой чувствительности (кривая *1*). Если тепловой отклик КМ-конструкции не принимается во внимание, то такое различие в величинах максимальных остаточных прогибов составляет 22% (см. кривые *1*' и *2*').

Сравнение же наибольших значений ординат точек на кривых *1* и *1*' (при $x_2 = 0$) показывает, что в случае неучета теплового отклика (кривая *1*') максимальный остаточный прогиб КМ-пластины всего на 1.9% меньше, чем в неизотермическом случае (кривая *1*). Для кривых же *2* и *2*' это различие, наоборот, на 2.4% больше. Очевидно: такое малое различие максимальных значений остаточных прогибов, рассчитанных с учетом и без учета температурных полей в КМ-пластине, объясняется тем, что рассматриваемая стеклопластиковая конструкция в процессе осцилляций нагревается незначительно как при учете, так и неучете зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования (см. рис. 4). Однако несмотря на это, неучет теплового отклика в динамически нагружаемой тонкостенной конструкции может привести к существенному искажению полей остаточных деформаций компонентов композиции.

Так, на рис. 6 изображены осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций $\varepsilon_*^{(k)}$ ($\varepsilon_{\mathrm{m}}^{(k)}(t) = \max\limits_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(k)}(t, \mathbf{r})$) материалов композиции рассматриваемой пластины от времени t (в мс) в окрестности начального момента (рис. 6,a) и в окрестности $t = 500$ мс (рис. 6,b). Номера кривых на рис. 6 соответствуют номеру k-го компонента

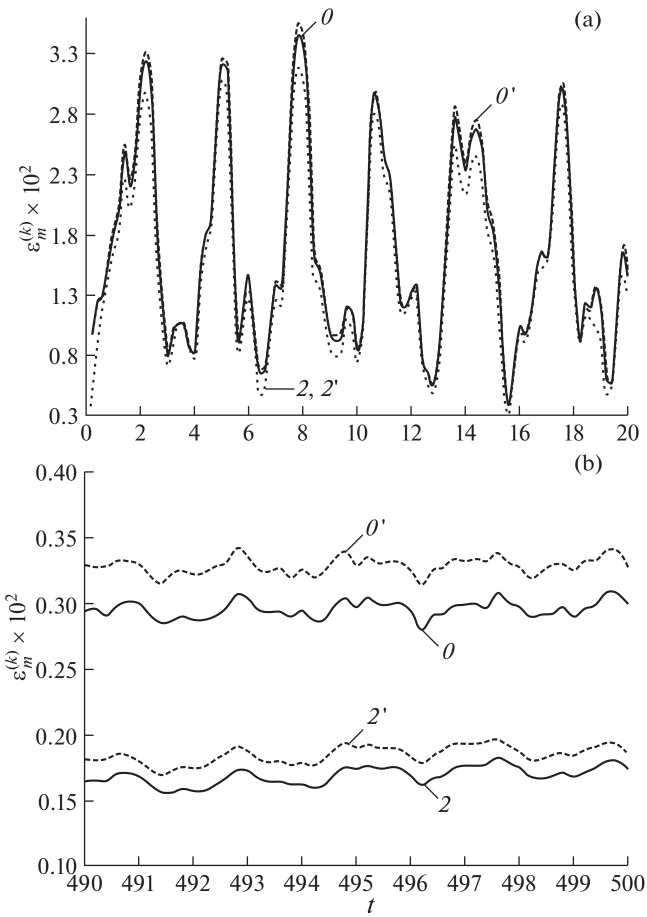

Рис. 6. Зависимости от времени наибольших значений интенсивности деформаций материалов композиции пластины, рассчитанные по вязкоупруго-вязкопластической теории в окрестности начального момента времени (a) и при $t \approx 500$ мс (b) с учетом и без учета теплового отклика.

композиции: $k = 0$ — связующая матрица, $k = 2$ — волокна второго семейства, уложенные в направлении Ox_2 и испытывающие наибольшее деформирование. Штрих у номера кривой имеет тот же смысл, что и на рис. 5. Кривые на рис. 6 получены при учете зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования. Для сравнения аналогичные зависимости изображены и на рис. 7, но они получены без учета указанной зависимости. Кривые *2*, *2'* на рис. 6,a и рис. 7 визуально практически не различаются. Кривые *0'* и *2'* на рис. 6 рассчитаны по теории, разработанной в [22].

Сравнение кривых *0* и *0'* на рис. 6,a показывает, что максимальное значение $\varepsilon_{\max}^{(0)} = \max\limits_{t \ge 0} \varepsilon_{\mathrm{m}}^{(0)}(t) = \varepsilon_{\mathrm{m}}^{(0)}(7.8 \times 10^{-3})$ в связующем материале при неучете теплового отклика КМ-конструкции (кривая *0'*) всего на 2.9% больше, чем в случае учета температурного поля в пластине (кривая *0*). Для арматуры второго семейства это различие еще меньше (см. кривые *2* и *2'*). Однако сравнение кривых *0*, *0'* и *2*, *2'* на рис. 6,b свидетель-

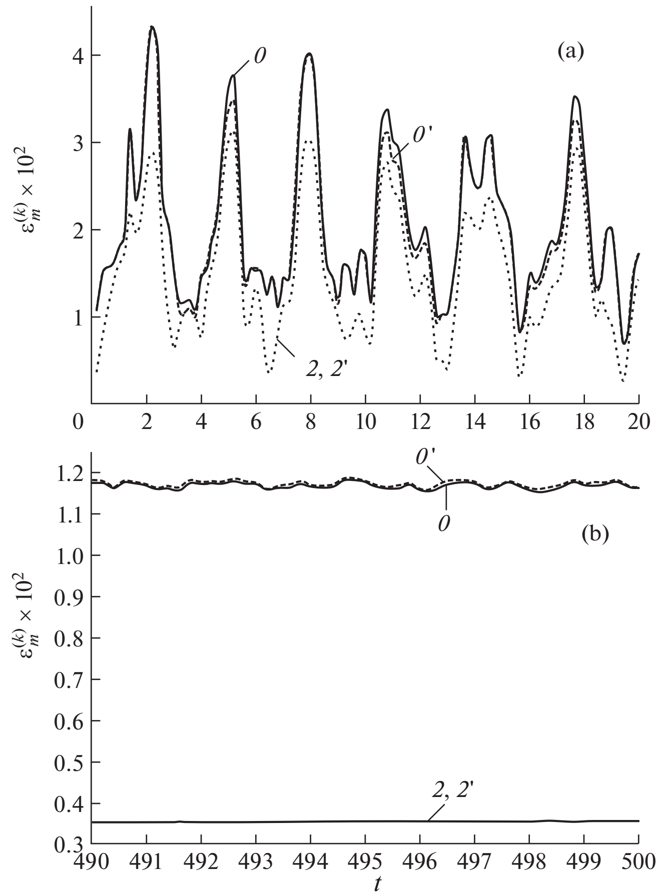

Рис. 7. Зависимости от времени наибольших значений интенсивности деформаций материалов композиции пластины, рассчитанные по вязкоупругопластической теории в окрестности начального момента времени (a) и при $t \approx 500$ мс (b) с учетом и без учета теплового отклика.

ствует о том, что в момент времени $t = 500$ мс, когда конструкция практически перестала осциллировать, значение $\varepsilon_{\rm m}^{(0)}$, полученное без учета теплового воздействия (кривая *0'*), уже на 9.7% больше такой же величины, рассчитанной в неизотермическом случае (кривая *0*). Для кривых же *2* и *2'* на рис. 6,b аналогичные значения $\varepsilon_{\rm m}^{(2)}$, определенные при $t = 500$ мс, различаются еще больше – на 10.9%. Таким образом, в случае учета чувствительности пластических свойств компонентов композиции к скорости их деформирования расчет, выполненный без учета теплового отклика КМ-конструкции (т.е. по теории, разработанной в [22]), может привести к существенному искажению остаточных деформаций материалов композиции.

Аналогичное сравнение кривых *0*, *0'* и *2*, *2'* на рис. 7 демонстрирует, что в случае неучета зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования максимальные значения интенсивности деформаций (см. рис. 7,a) и остаточное деформированное состояние (см. рис. 7,b) компонентов композиции можно вполне обоснованно определять без учета теплового отклика в КМ-конструкции.

Однако интенсивности остаточных деформаций компонентов композиции при таких расчетах оказываются в несколько раз большими, чем в вязкоупруго-вязкопластическом случае (ср. ординаты точек на кривых с одинаковыми номерами на рис. 6,b и 7,b).

6. Заключение. Разработанная модель неизотермического вязкоупруго-вязкопластического поведения многонаправленно армированных пластин позволяет рассчитывать остаточные перемещения и остаточное НДС в компонентах композиции после интенсивного динамического нагружения при учете теплового отклика КМ-конструкций и зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования.

Анализ вязкоупругопластического и вязкоупруго-вязкопластического динамического поведения стеклопластиковой пластины (компоненты композиции которой слабо чувствительны к скорости их деформирования) при учете и без учета теплового отклика в ней показал, что в случае учета зависимости пластических свойств материалов композиции от скорости их деформирования необходимо проводить неизотермический расчет динамики таких КМ-конструкций даже при отсутствии внешних источников тепла немеханического происхождения. Если вязкоупруго-вязкопластический расчет проводить без учета теплового отклика КМ-пластины, то остаточное деформированное состояние компонентов композиции может существенно (на десятки процентов) отличаться от случая неизотермического расчета. Если же чувствительностью материалов композиции к скорости их деформирования можно пренебречь (вязкоупругопластичность), то при отсутствии внешних источников тепла немеханического происхождения динамический расчет тонкостенной КМ-пластины можно проводить без учета теплового отклика в ней, так как нагрев такой конструкции незначителен (порядка 4–8°C).

Вязкоупругопластический расчет динамики относительно тонкой стеклопластиковой удлиненной пластины как в изотермическом, так и неизотермическом случаях предсказывает, что после затухания осцилляций такая КМ-конструкция приобретает гофрированную остаточную форму с ориентацией складок в продольном направлении. Аналогичные же расчеты, проведенные по вязкоупруго-вязкопластической модели показывают, что как при учете, так и неучете теплового отклика КМ-конструкции в остаточном состоянии гофрированная форма не образуется. Таким образом, расчеты, выполненные по вязкоупругопластической модели деформирования материалов композиции, приводят не только к количественно, но и качественно неверным представлениям об остаточном состоянии КМ-конструкции после ее интенсивного динамического нагружения.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. *Богданович А.Е.* Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
3. *Bannister M.* Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // Compos. Part A Appl. 2001. V. 32. № 7. P. 901–910. https://doi.org/10.1016/S1359-835X(01)00008-2
4. *Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K.* Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // Compos. Struct. 2001. V. 53. № 1. P. 21–42. https://doi.org/10.1016/S0263-8223(00)00175-6
5. *Абросимов Н.А., Баженов В.Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н. Новгород: ННГУ, 2002. 391 с.

6. *Куликов Г.М.* Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 2. С. 33–42.
7. *Soutis C.* Fibre reinforced composites in aircraft construction // Prog. Aerosp. Sci. 2005. V. 41. № 2. P. 143–151.
https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2005.02.004
8. *Reddy J.N.* Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. N.Y.: CRC Press, 2004. 831 p.
9. *Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W.* Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // Compos. Struct. 2010. V. 93. P. 14–31.
10. *Vasiliev V.V., Morozov E.* Advanced mechanics of composite materials and structural elements. Amsterdam: Elsever, 2013. 412 p.
11. *Андреев А.* Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. Saarbrucken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 с.
12. *Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.S.* Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastic composites // Front. Mech. Eng. 2013. V. 8. P. 187–200.
https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x
13. *Kazanci Z.* Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // Int. J. Non Linear Mech. 2011. V. 46. № 5. P. 807–817.
https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011
14. *Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А.* Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 407 с.
15. *Moriniere F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R.* Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review // Int. J. Impact Eng. 2014. V. 67. P. 27–38.
https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004
16. *Gibson R.F.* Principles of composite material mechanics. Taylor & Francis Group, LLC, 2015. 815 p.
17. *Димитриенко Ю.И.* Механика композитных конструкций при высоких температурах. М.: Физматлит, 2018. 447 с.
18. *Vena P., Gastaldi D., Contro R.* Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites // Int. J. Plast. 2008. V. 24. № 3. P. 483–508.
https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.001
19. *Leu S.-Y., Hsu H.-C.* Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders // Int. J. Mech. Sci. 2010. V. 52. № 12. P. 1579–1587.
https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.07.006
20. *Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L.* Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle // Int. J. Plast. 2012. V. 36. P. 86–112.
https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010
21. *Ахундов В.М.* Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях // Мех. композ. материалов. 2015. Т. 51. № 3. С. 539–558.
22. *Янковский А.П.* Моделирование вязкоупруго-вязкопластического поведения гибких армированных пластин // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 5. С. 27–44.
https://doi.org/10.31857/S0572329921040140
23. *Янковский А.П.* Моделирование термоупруговязкопластического деформирования гибких армированных пластин // ПММ. 2022. Т. 86. № 1. С. 121–150.
https://doi.org/10.31857/S003282352201009X
24. *Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М.* Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. М.: Машиностроение, 1965. 566 с.
25. Композиционные материалы. Справочник. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
26. *Reissner E.* The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech. 1945. V. 12. № 2. P. 69–77.
27. *Houlston R., DesRochers C.G.* Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // Comput. Struct. 1987. V. 26. № 1–2. P. 1–15.
https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X

28. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
29. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 332 с.
30. *Хажинский Г.М.* Модели деформирования и разрушения металлов. М.: Научный мир, 2011. 231 с.
31. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 498 с.
32. *Янковский А.П.* Моделирование процессов теплопроводности в пространственно-армированных композитах с произвольной ориентацией волокон // Прикладная физика. 2011. № 3. С. 32–38.
33. Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник / *Ю.М. Тарнопольский, И.Г. Жигун, В.А. Поляков.* М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
34. *Луканин В.Н., Шатров М.Г., Камфер Г.М. и др.* Теплотехника. М.: Высш. шк., 2003. 671 с.
35. Справочник по композитным материалам. Кн. 1. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.