

УДК 539.3

УЧЕТ СМЕЩЕНИЯ КАК ТВЕРДОГО ТЕЛА В АЛГОРИТМЕ МКЭ ПРИ РАСЧЕТЕ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

© 2023 г. А. Ш. Джабраилов^{а,*}, А. П. Николаев^а, Ю. В. Клочков^а, Н. А. Гуреева^б

^аФГБОУ ВО Волгоградский государственный аграрный университет,
Волгоград, Россия

^бФГБОУ ВО Финансовый университет при правительстве РФ,
Москва, Россия

* e-mail: arsen82@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.09.2022 г.

После доработки 13.12.2022 г.

Принята к публикации 27.12.2022 г.

В криволинейной системе координат разработан алгоритм получения матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента оболочки вращения в виде криволинейного фрагмента ее срединной поверхности. В качестве узловых неизвестных приняты компоненты векторов перемещений узловых точек и компоненты производных векторов перемещений узлов конечного элемента. При получении аппроксимирующих функций для искомых величин использованы функции формы класса $C^{(1)}$ для векторной величины внутренней точки конечного элемента через векторные величины узловых точек. После координатных преобразований функций формы класса $C^{(1)}$ на основе параметров используемой криволинейной системы координат, получены необходимые аппроксимирующие выражения искомых величин, использование которых приводит к учету смещения конечного элемента как твердого тела. Представлен алгоритм назначения граничных условий для принятых узловых неизвестных. Показана возможность реализации условий сопряжения оболочек вращения при использовании разработанного конечного элемента.

На конкретных тестовых примерах показана высокая эффективность предложенного способа аппроксимации при наличии смещения оболочки как жесткого целого под действием заданной нагрузки.

Ключевые слова: оболочка вращения, вектор перемещения, деформация, конечный элемент, сопряжение оболочек, матрица жесткости

DOI: 10.31857/S0572329922600797, EDN: PSLZTK

1. Введение. В последние десятилетия тонкостенные оболочки относят к наиболее перспективным типам инженерных конструкций. Сегодня теория оболочек имеет достаточно сформированные очертания [1–4]. Вместе с тем имеется ряд проблем практического применения разрешающих уравнений, которые обусловлены их сложностью. Поэтому использование численных методов значительно упрощает решение прикладных задач по расчету оболочек [5]. Наиболее популярным из них является метод конечных элементов (МКЭ), развитию которого посвящены труды российских и иностранных авторов [6–13]. Высокий уровень развития технологий требует применения все более сложных оболочечных элементов, включающих различные ветвления и имеющих нестандартные значения градиентов кривизны меридиана. В местах сочленения оболочек действия внешних нагрузок приобретают ярко выраженный характер,

приводящий к резким изменениям в значениях напряжений. Поэтому тут необходимо тщательное исследование напряженно-деформированного состояния конструкции. Актуальной является и проблема учета смещения как жесткого целого. Наличие проблемы учета смещения конечного элемента отмечено во многих литературных источниках [14–16]. При использовании теории оболочек на основе гипотезы Кирхгофа–Лява неизвестной функцией является вектор перемещения $\mathbf{v}$. Если вектор перемещения представляется компонентами базисных векторов, касательных к срединной поверхности оболочки, и ее нормали, то такой конечный элемент относится к типу А. Если вектор перемещения $\mathbf{v}$ представляется в ортах глобальной декартовой системы координат, то элемент определяется типом В. В [15] отмечается, что в случае одинаковых аппроксимаций для вектора перемещения $\mathbf{v}$ и радиус-вектора срединной поверхности $\mathbf{R}$ (изопараметрический подход) условие представления учета смещения как твердого тела выполняется. Так как радиус-вектор следует определять в каждой точке интегрирования аналитически, то можно утверждать, что условие учета смещения как твердого тела элемента типа В всегда выполняется. При использовании в расчетах оболочек конечных элементов типа А общего решения проблемы учета смещения как твердого тела не существует.

При вычислениях в криволинейных системах координат деформации в произвольной точке оболочки, определяемые как разности метрических тензоров точки в деформированном и исходном состояниях, являются функциями компонент вектора перемещения и компонент частных производных вектора перемещения. Поэтому более адекватным будет использование конечного элемента, в котором эти величины являются искомыми неизвестными.

В настоящей работе получена матрица жесткости четырехугольного конечного элемента, являющегося фрагментом срединной поверхности оболочки вращения. В качестве узловых неизвестных приняты перемещения узловых точек и компоненты производных векторов перемещений узлов конечного элемента. Для получения аппроксимирующих выражений искомых величин использованы функции формы класса $C^{(1)}$ для аппроксимации вектора перемещения внутренней точки конечного элемента через векторы перемещения его узлов и производные векторов перемещений в узлах. После координатных преобразований указанных векторных соотношений на основе параметров используемой криволинейной системы координат получены аппроксимирующие выражения искомых величин конечного элемента, позволяющие учитывать смещения элемента как твердого тела. Определены условия учета граничных условий для компонент производных векторов узловых смещений и разработаны условия сопряжения сочлененных оболочек вращения.

2. Материалы и методы. 2.1. *Основные положения.* Для точки M^0 срединной поверхности оболочки вращения может быть задан радиус-вектор

$$\mathbf{R}^0 = x\mathbf{i} + r\sin\theta\mathbf{j} + r\cos\theta\mathbf{k}$$

где r — радиус вращения оболочки; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты декартовой системы координат; x и θ — глобальные криволинейные координаты.

Выполняя стандартные для механики оболочек процедуры можно получить векторы, касательные к срединной линии

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^0 &= \mathbf{R}_{,x}^0 = \mathbf{i} + r_{,x}\sin\theta\mathbf{j} + r_{,x}\cos\theta\mathbf{k} \\ \mathbf{a}_2^0 &= \mathbf{R}_{,\theta}^0 = r\cos\theta\mathbf{j} - r\sin\theta\mathbf{k} \\ \mathbf{a}_3^0 &= \frac{\mathbf{a}_1^0 \times \mathbf{a}_2^0}{|\mathbf{a}_1^0 \times \mathbf{a}_2^0|} = -r_{,x}\mathbf{i} + r(\sin\theta\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где запятая обозначает операцию дифференцирования.

Производные полученных в (2.1) векторов локального базиса можно записать в матричном виде компонентами этого же базиса

$$\left\{ \mathbf{a}_{,x}^0 \right\}_{3 \times 1} = [\mathbf{m}]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1}; \quad \left\{ \mathbf{a}_{,\theta}^0 \right\}_{3 \times 1} = [\mathbf{n}]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1} \quad (2.2)$$

где $\left\{ \mathbf{a}_{,x}^0 \right\}_{3 \times 1}^T = \left\{ \mathbf{a}_{1,x}^0 \mathbf{a}_{2,x}^0 \mathbf{a}_{3,x}^0 \right\}$; $\left\{ \mathbf{a}_{,\theta}^0 \right\}_{3 \times 1}^T = \left\{ \mathbf{a}_{1,\theta}^0 \mathbf{a}_{2,\theta}^0 \mathbf{a}_{3,\theta}^0 \right\}$, а принцип формирования матриц $[\mathbf{m}]$ и $[\mathbf{n}]$ описан в [17].

В результате деформирования оболочки точка срединной поверхности $\mathbf{M}^0$ примет новое положение $\mathbf{M}$, определяемое радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^0 + \mathbf{v} \quad (2.3)$$

Входящий в (2.3) вектор перемещения $\mathbf{v}$ определяется компонентами локального базиса точки $\mathbf{M}^0$

$$\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{a}_\alpha^0 + v \mathbf{a}_3^0 \quad (2.4)$$

где v^α, v – меридиональные и тангенциальные компоненты вектора перемещения.

Производные вектора $\mathbf{v}$ определяются дифференцированием (2.4) по соответствующим глобальным криволинейным координатам с учетом (2.2)

$$\mathbf{v}_{,\alpha} = f_\alpha^\rho \mathbf{a}_\rho^0 + f_\alpha^0 \mathbf{a}_3^0, \quad \mathbf{v}_{,\alpha\beta} = f_{\alpha\beta}^\rho \mathbf{a}_\rho^0 + f_{\alpha\beta}^0 \mathbf{a}_3^0 \quad (2.5)$$

где компоненты $f_\alpha^\rho, f_\alpha^0, f_{\alpha\beta}^\rho, f_{\alpha\beta}^0$ первых и вторых производных векторов перемещений являются функциями компонентами вектора перемещения и их производных

$$\begin{aligned} f_1^1 &= v_{,x}^1 - m_{13} v, \dots f_1^1 = v^1 m_{13} + v_{,x}, \quad f_{11}^1 = v_{,xx}^1 - m_{13,x} v - m_{13} (v_{,x} + f_1^1); \\ \dots f_{22}^1 &= v_{,\theta\theta}^1 + n_{23} (v_{,\theta}^2 + f_2^2), \quad f_{12}^1 = v_{,x\theta}^1 - m_{13} v_{,\theta} + n_{21} f_1^2, \dots f_{12}^1 = v_{,\theta}^1 m_{13} + v_{,x\theta} + n_{23} f_1^2 \end{aligned}$$

Для точек $\mathbf{M}^{0\zeta}$ и $\mathbf{M}^\zeta$, отстоящих на расстоянии ζ от срединной поверхности оболочки, радиус-векторы определяются соотношениями (рис. 1)

$$\mathbf{R}^{0\zeta} = \mathbf{R}^0 + \zeta \mathbf{a}_3^0, \quad \mathbf{R}^\zeta = \mathbf{R}^{0\zeta} + \mathbf{v}^\zeta = \mathbf{R}^{0\zeta} + \mathbf{v} + \zeta (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_3^0) \quad (2.6)$$

где $\mathbf{v}^\zeta$ – вектор перемещения точки $\mathbf{M}^{0\zeta}$ в точку $\mathbf{M}^\zeta$.

Входящий в (2.6) орт нормали к срединной поверхности $\mathbf{a}_3$ в деформированном состоянии определяется матричным соотношением

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\sqrt{a}}, \quad (2.7)$$

где $\mathbf{a}_1 = (\mathbf{R}^0 + \mathbf{v})_{,x}$; $\mathbf{a}_2 = (\mathbf{R}^0 + \mathbf{v})_{,\theta}$; $a \approx a^0 = a_{11}^0 a_{22}^0 - a_{12}^0 a_{21}^0$ – детерминант метрического тензора в точке $\mathbf{M}^0$.

Дифференцированием (2.6) с учетом (2.7) и (2.2) можно получить выражения для базисных векторов в точках $\mathbf{M}^{0\zeta}$ и $\mathbf{M}^\zeta$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\alpha^0 &= \mathbf{R}_{,\alpha}^{0\zeta} = \mathbf{a}_\alpha^0 + \zeta \mathbf{a}_{3,\alpha}^0 \\ \mathbf{g}_\alpha &= \mathbf{g}_\alpha^0 + \mathbf{v}_{,\alpha}^\zeta = \mathbf{g}_\alpha^0 + \mathbf{v}_{,\alpha} + \zeta (\mathbf{a}_{3,\alpha} - \mathbf{a}_{3,\alpha}^0) \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\mathbf{a}_{3,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{a^0}} (\mathbf{a}_{1,\alpha} \times \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_{2,\alpha})$.

Деформации в произвольной точке оболочки определяются соотношениями [18]

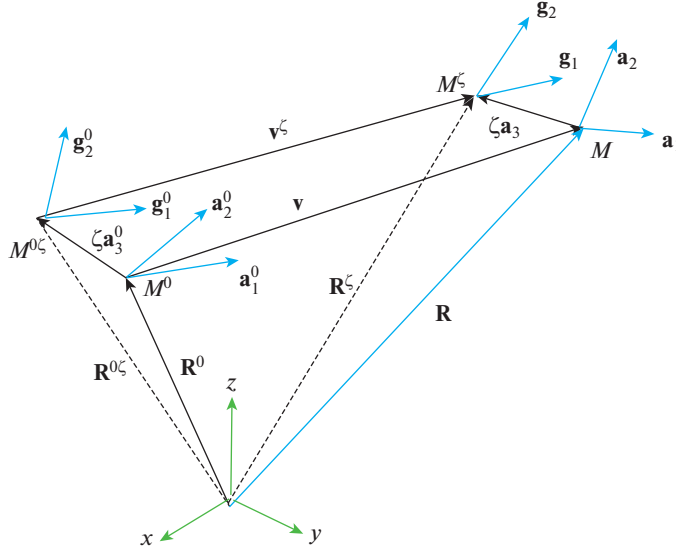


Рис. 1. Положения рассматриваемых точек оболочки.

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_{\alpha}^0 \mathbf{v}_{,\beta}^{\zeta} - \mathbf{g}_{\beta}^0 \mathbf{v}_{,\alpha}^{\zeta}) \quad (2.9)$$

При использовании (2.8) выражения (2.9) можно представить в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \zeta \cdot \chi_{\alpha\beta} \quad (2.10)$$

где деформации и искривления в соответствующей точке срединной поверхности в геометрически линейной постановке определяются соотношениями

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{\alpha}^0 \mathbf{v}_{,\beta} + \mathbf{a}_{\beta}^0 \mathbf{v}_{,\alpha}) \quad (2.11)$$

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\mathbf{a}_{\alpha}^0(\mathbf{a}_{3,\beta} - \mathbf{a}_{3,\beta}^0) + \mathbf{a}_{\beta}^0(\mathbf{a}_{3,\alpha} - \mathbf{a}_{3,\alpha}^0) + \mathbf{a}_{3,\alpha}^0 \mathbf{v}_{,\beta} + \mathbf{a}_{3,\alpha}^0 \mathbf{v}_{,\alpha}]$$

Выполнив скалярные произведения в соотношениях (2.11), выражения (2.10) можно представить в матричной форме

$$\{\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\}_{3 \times 1} = [\mathbf{L}^{\zeta}]_{3 \times 18} \{\mathbf{f}\}_{18 \times 1} \quad (2.12)$$

$$\text{где } \{\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\}^T = \{\varepsilon_{11}^{\zeta}, \varepsilon_{22}^{\zeta}, 2\varepsilon_{12}^{\zeta}\}$$

$$\{\mathbf{f}\}_{18 \times 1}^T = \{v^1, v^2, v, f_1^1, f_1^2, f_1, f_2^1, f_2^2, f_2, f_{11}^1, f_{11}^2, f_{11}, f_{22}^1, f_{22}^2, f_{22}, f_{12}^1, f_{12}^2, f_{12}\}$$

$[\mathbf{L}^{\zeta}]_{3 \times 18}$ – матрица алгебраических операторов.

Соотношения (2.11) и (2.12) показывают, что деформации в произвольном слое оболочки являются алгебраическими функциями компонент вектора перемещения соответствующей точки срединной поверхности и его частных производных по криволинейным координатам.

Контравариантные компоненты $\sigma^{\alpha\beta}$ тензора напряжений в произвольном слое оболочки определяются с помощью соотношений [19]

$$\sigma^{\alpha\beta} = \lambda I_1(\epsilon^\xi) g^{\alpha\beta} + 2\nu g^{\alpha\rho} g^{\beta\gamma} \epsilon_{\rho\gamma}^\xi \quad (2.13)$$

где λ, ν – параметры Ляме; $g^{\alpha\beta}$ – контравариантные компоненты метрического тензора; $I_1(\epsilon^\xi) = g^{\rho\gamma} \epsilon_{\rho\gamma}^\xi$ – первый инвариант тензора деформаций.

Выражение (2.13) можно представить в матричном виде

$$\left\{ \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} = [C]_{3 \times 3} \left\{ \epsilon_{\alpha\beta}^\xi \right\}_{3 \times 1} \quad (2.14)$$

где $\{\sigma^{\alpha\beta}\}^T = \{\sigma^{11}, \sigma^{22}, \sigma^{12}\}$.

2.2. Конечный элемент и аппроксимация узловых неизвестных. В качестве узловых неизвестных четырехугольного конечного элемента, являющегося фрагментом срединной поверхности оболочки вращения, приняты компоненты векторов перемещений узловых точек и компоненты производных этих векторов. Для выполнения численного интегрирования этот фрагмент срединной поверхности отображается на квадрат с локальными координатами ξ и η , которые изменяются в пределах $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$. Функция перехода имеет вид

$$\rho = \{f(\xi, \eta)\}_{1 \times 4}^T \{\rho_y\}_{4 \times 1} \quad (2.15)$$

где $\{\rho_y\}^T = \{\rho^i, \rho^j, \rho^k, \rho^l\}$; $\{f(\xi, \eta)\}^T = \left\{ \frac{1-\xi}{2} \cdot \frac{1-\eta}{2}, \frac{1+\xi}{2} \cdot \frac{1-\eta}{2}, \frac{1+\xi}{2} \cdot \frac{1+\eta}{2}, \frac{1-\xi}{2} \cdot \frac{1+\eta}{2} \right\}$, а под символом ρ понимаются узловые значения криволинейных координат x и θ .

Дифференцированием (2.15) определяются производные координат x и θ в системе ξ, η и производные локальных координат ξ, η по глобальным переменным x и θ .

Для получения интерполяционных соотношений искомых величин $v^\alpha, v, f_{\alpha}^\rho, f_{\alpha}, f_{\alpha\beta}^\rho, f_{\alpha\beta}$ использованы общеизвестные аппроксимирующие зависимости класса $C^{(1)}$ для вектора перемещения внутренней точки конечного элемента $\mathbf{v}$ через векторы перемещений узловых точек и производные этих векторов в локальной и глобальной системах координат

$$\{\mathbf{v}^l\}_{1 \times 12}^T = \{\mathbf{v}^i, \mathbf{v}^j, \mathbf{v}^k, \mathbf{v}^l, \mathbf{v}_{,\xi}^i, \mathbf{v}_{,\xi}^j, \mathbf{v}_{,\xi}^k, \mathbf{v}_{,\xi}^l, \mathbf{v}_{,\eta}^i, \mathbf{v}_{,\eta}^j, \mathbf{v}_{,\eta}^k, \mathbf{v}_{,\eta}^l\} \quad (2.16)$$

$$\{\mathbf{v}^g\}_{1 \times 12}^T = \{\mathbf{v}^i, \mathbf{v}^j, \mathbf{v}^k, \mathbf{v}^l, \mathbf{v}_{,x}^i, \mathbf{v}_{,x}^j, \mathbf{v}_{,x}^k, \mathbf{v}_{,x}^l, \mathbf{v}_{,\theta}^i, \mathbf{v}_{,\theta}^j, \mathbf{v}_{,\theta}^k, \mathbf{v}_{,\theta}^l\}$$

Столбцы неизвестных $\{\mathbf{v}^l\}$ и $\{\mathbf{v}^g\}$, входящие в (2.16) связаны матричным равенством

$$\{\mathbf{v}^l\}_{12 \times 1} = [H]_{12 \times 12} \{\mathbf{v}^g\}_{12 \times 1}, \quad (2.17)$$

где компоненты матрицы $[H]$ формируются на основании зависимостей

$$\mathbf{v}_{,\xi} = \mathbf{v}_{,x} x_{,\xi} + \mathbf{v}_{,\theta} \theta_{,\xi}; \quad \mathbf{v}_{,\eta} = \mathbf{v}_{,x} x_{,\eta} + \mathbf{v}_{,\theta} \theta_{,\eta}$$

Аппроксимирующие соотношения класса $C^{(1)}$ использованы для векторных величин

$$\mathbf{v} = \{\varphi(\xi, \eta)\}_{1 \times 12}^T \{\mathbf{v}^l\}_{12 \times 1} = \{\varphi(\xi, \eta)\}_{1 \times 12}^T [H]_{12 \times 12} \{\mathbf{v}^g\}_{12 \times 1} = \{\gamma\}_{1 \times 12}^T \{\mathbf{v}^g\}_{12 \times 1} \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} \{\varphi(\xi, \eta)\}^T &= \{h_1(\xi)h_1(\eta), h_2(\xi)h_1(\eta), h_2(\xi)h_2(\eta), h_1(\xi)h_2(\eta) \\ &h_3(\xi)h_1(\eta), h_4(\xi)h_1(\eta), h_4(\xi)h_2(\eta), h_3(\xi)h_2(\eta), h_1(\xi)h_3(\eta) \\ &h_2(\xi)h_3(\eta), h_2(\xi)h_4(\eta), h_1(\xi)h_4(\eta)\} \end{aligned}$$

$h_i(\xi)$ и $h_i(\eta)$ — полиномы Эрмита третьей степени в локальных координатах.

Дифференцированием (2.18) определяются частные производные вектора перемещения $\mathbf{v}$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{,\alpha} &= \{\varphi_{,\alpha}\}_{1 \times 12}^T \{\mathbf{v}^1\}_{12 \times 1} = \{\varphi_{,\alpha}\}_{1 \times 12}^T [\mathbf{H}]_{12 \times 12} \{\mathbf{v}^g\}_{12 \times 1} = \{\gamma_{,\alpha}\}_{1 \times 12}^T \{\mathbf{v}^g\}_{12 \times 1} \\ \mathbf{v}_{,\alpha\beta} &= \{\varphi_{,\alpha\beta}\}_{1 \times 12}^T \{\mathbf{v}^1\}_{12 \times 1} = \{\varphi_{,\alpha\beta}\}_{1 \times 12}^T [\mathbf{H}]_{12 \times 12} \{\mathbf{v}^g\}_{12 \times 1} = \{\gamma_{,\alpha\beta}\}_{1 \times 12}^T \{\mathbf{v}^g\}_{12 \times 1} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Входящие в (2.19) производные аппроксимирующих полиномов $\{\varphi(\xi, \eta)\}$ в глобальной системе координат определяются выражениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{\varphi\}^T}{\partial \rho^\alpha} &= [\{\varphi_{,\xi}\}_{1 \times 12}^T \xi_{,\alpha} + \{\varphi_{,\eta}\}_{1 \times 12}^T \eta_{,\alpha}] = \{\varphi_{,\alpha}\}_{1 \times 12}^T \\ \frac{\partial^2 \{\varphi\}^T}{\partial \rho^\alpha \partial \rho^\beta} &= [\{\varphi_{,\xi\xi}\}_{1 \times 12}^T \xi_{,\alpha} \xi_{,\beta} + \{\varphi_{,\xi\eta}\}_{1 \times 12}^T \xi_{,\alpha\beta} + \{\varphi_{,\xi\eta}\}_{1 \times 12}^T \xi_{,\alpha} \eta_{,\beta} + \{\varphi_{,\eta\xi}\}_{1 \times 12}^T \eta_{,\alpha} \xi_{,\beta} \\ &+ \{\varphi_{,\eta\eta}\}_{1 \times 12}^T \eta_{,\alpha} \eta_{,\beta} + \{\varphi_{,\eta}\}_{1 \times 12}^T \eta_{,\alpha\beta}] = \{\varphi_{,\alpha\beta}\}_{1 \times 12}^T \end{aligned} \quad (2.20)$$

где координаты x и θ обозначены как ρ^1 и ρ^2 соответственно.

Чтобы получить аппроксимирующие выражения для компонент векторных величин (2.4) и (2.5) из матричных соотношений (2.18) и (2.19), следует выполнить в них координатные преобразования. С этой целью входящий в (2.19) вектор-столбец $\{\mathbf{v}^g\}$ записывается выражением

$$\{\mathbf{v}^g\}_{12 \times 1} = [\mathbf{S}]_{12 \times 36} \{\mathbf{f}_y^g\}_{36 \times 1} \quad (2.21)$$

где $\{\mathbf{f}_y^g\}_{1 \times 36}^T = \{u^i, v^i, w^i, \dots, u^l, v^l, w^l, f_1^{li}, f_1^{2i}, f_1^{3i}, \dots, f_2^{li}, f_2^{2i}, f_2^{3i}, \dots, f_2^{1l}, f_2^{2l}, f_2^{3l}\}$, $[\mathbf{S}]_{12 \times 36}$ — матрица, ненулевыми элементами которой являются базисные векторы узловых точек $\{\mathbf{a}^{0w}\} = \{\mathbf{a}_1^{0w}, \mathbf{a}_2^{0w}, \mathbf{a}_3^{0w}\}$, ($w = i, j, k, l$).

При учете (2.21) выражения (2.18) и (2.19) запишутся следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left\{ \gamma_1 \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \dots \gamma_4 \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \gamma_5 \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \dots \gamma_8 \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \gamma_9 \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \dots \gamma_{12} \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \right\} \{\mathbf{f}_y^g\}_{36 \times 1} \\ \mathbf{v}_{,\alpha} &= \left\{ \gamma_{1,\alpha} \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \dots \gamma_{12,\alpha} \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \right\} \{\mathbf{f}_y^g\}_{36 \times 1} \\ \mathbf{v}_{,\alpha\beta} &= \left\{ \gamma_{1,\alpha\beta} \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \dots \gamma_{12,\alpha\beta} \{\mathbf{a}^{0i}\}_{1 \times 3}^T \right\} \{\mathbf{f}_y^g\}_{36 \times 1} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Узловые векторы локального базиса $\{\mathbf{a}^{0w}\}$, входящие в (2.22), выражаются через локальные базисные векторы внутренней точки конечного элемента

$$\{\mathbf{a}^{0w}\}_{3 \times 1} = [\boldsymbol{\tau}^w]_{3 \times 3} \{\mathbf{i}\}_{3 \times 1} = [\boldsymbol{\tau}^w]_{3 \times 3} [\boldsymbol{\tau}]_{3 \times 3}^{-1} \{\mathbf{a}^0\}_{3 \times 1} = [\mathbf{z}^w]_{3 \times 3} \{\mathbf{a}^0\}_{3 \times 1}, \quad (w = i, j, k, l) \quad (2.23)$$

Векторные величины (2.22) с учетом (2.23) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \mathbf{v} \right\}_{3 \times 1} &= \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left[\gamma_1 \left[\mathbf{z}^i \right]_{3 \times 3}^T \dots \gamma_{12} \left[\mathbf{z}^l \right]_{3 \times 3}^T \right] \left\{ \mathbf{f}_y^g \right\}_{36 \times 1} \\ \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \begin{matrix} f_\alpha^1 \\ f_\alpha^2 \\ f_\alpha \end{matrix} \right\} &= \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left[\gamma_{1,\alpha} \left[\mathbf{z}^i \right]_{3 \times 3}^T \dots \gamma_{12,\alpha} \left[\mathbf{z}^l \right]_{3 \times 3}^T \right] \left\{ \mathbf{f}_y^g \right\}_{36 \times 1} \\ \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \begin{matrix} f_{\alpha\beta}^1 \\ f_{\alpha\beta}^2 \\ f_{\alpha\beta} \end{matrix} \right\} &= \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left[\gamma_{1,\alpha\beta} \left[\mathbf{z}^i \right]_{3 \times 3}^T \dots \gamma_{12,\alpha\beta} \left[\mathbf{z}^l \right]_{3 \times 3}^T \right] \left\{ \mathbf{f}_y^g \right\}_{36 \times 1} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Из равенств (2.24) определяются аппроксимирующие функции искоемых компонент векторных величин $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_\alpha$, $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{v} \right\}_{3 \times 1} &= \left[\gamma_1 \left[\mathbf{z}^i \right]_{3 \times 3}^T \gamma_2 \left[\mathbf{z}^j \right]_{3 \times 3}^T \gamma_3 \left[\mathbf{z}^k \right]_{3 \times 3}^T \gamma_4 \left[\mathbf{z}^l \right]_{3 \times 3}^T \gamma_5 \left[\mathbf{z}^i \right]_{3 \times 3}^T \dots \gamma_8 \left[\mathbf{z}^k \right]_{3 \times 3}^T \gamma_9 \left[\mathbf{z}^j \right]_{3 \times 3}^T \dots \gamma_{12} \left[\mathbf{z}^l \right]_{3 \times 3}^T \right] \\ \left\{ \begin{matrix} f_\alpha^1 \\ f_\alpha^2 \\ f_\alpha \end{matrix} \right\} &= \left[\gamma_{1,\alpha} \left[\mathbf{z}^i \right]_{3 \times 3}^T \gamma_{2,\alpha} \left[\mathbf{z}^j \right]_{3 \times 3}^T \gamma_{3,\alpha} \left[\mathbf{z}^k \right]_{3 \times 3}^T \gamma_{4,\alpha} \left[\mathbf{z}^l \right]_{3 \times 3}^T \gamma_{5,\alpha} \left[\mathbf{z}^i \right]_{3 \times 3}^T \dots \gamma_{12,\alpha} \left[\mathbf{z}^l \right]_{3 \times 3}^T \right] \\ \left\{ \begin{matrix} f_{\alpha\beta}^1 \\ f_{\alpha\beta}^2 \\ f_{\alpha\beta} \end{matrix} \right\} &= \left[\gamma_{1,\alpha\beta} \left[\mathbf{z}^i \right]_{3 \times 3}^T \gamma_{2,\alpha\beta} \left[\mathbf{z}^j \right]_{3 \times 3}^T \gamma_{3,\alpha\beta} \left[\mathbf{z}^k \right]_{3 \times 3}^T \gamma_{4,\alpha\beta} \left[\mathbf{z}^l \right]_{3 \times 3}^T \gamma_{5,\alpha\beta} \left[\mathbf{z}^i \right]_{3 \times 3}^T \dots \gamma_{12,\alpha\beta} \left[\mathbf{z}^l \right]_{3 \times 3}^T \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

Как видно, в аппроксимирующих выражениях (2.25) через матрицы $\left[\mathbf{z}^w \right]_{3 \times 3}^T$ ($w = i, j, k, l$), отражающие преобразования базисных векторов узловых точек через базисные векторы внутренней точки конечного элемента, фигурируют параметры используемой в расчете криволинейной системы координат.

Входящий в (2.12) столбец $\{f\}$ с учетом (2.25) можно переписать следующим образом

$$\left\{ f \right\}_{18 \times 1} = \left[A \right]_{18 \times 36} \left\{ f_y^g \right\}_{36 \times 1} \quad (2.26)$$

Принимая во внимание зависимости (2.26) столбец деформаций произвольного слоя оболочки (2.12) окончательно примет вид

$$\left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta \right\}_{3 \times 1} = \left[L^\zeta \right]_{3 \times 18} \left\{ f \right\}_{18 \times 1} = \left[L^\zeta \right]_{3 \times 18} \left[A \right]_{18 \times 36} \left\{ f_y^g \right\}_{36 \times 1} = \left[B \right]_{3 \times 36} \left\{ f_y^g \right\}_{36 \times 1} \quad (2.27)$$

При классическом способе интерполяции компонент вектора перемещения [19, 20], представляемого по (2.4) в базисных векторах точки срединной поверхности, в качестве узловых неизвестных принимаются величины

$$\begin{aligned} \left\{ \lambda_{ij}^l \right\}_{1 \times 12} &= \left\{ \lambda^i, \lambda^j, \lambda^k, \lambda^l, \lambda_{\xi}^i, \lambda_{\xi}^j, \lambda_{\xi}^k, \lambda_{\xi}^l, \lambda_{\eta}^i, \lambda_{\eta}^j, \lambda_{\eta}^k, \lambda_{\eta}^l \right\} \\ \left\{ \lambda_{ij}^g \right\}_{1 \times 12} &= \left\{ \lambda^i, \lambda^j, \lambda^k, \lambda^l, \lambda_x^i, \lambda_x^j, \lambda_x^k, \lambda_x^l, \lambda_\theta^i, \lambda_\theta^j, \lambda_\theta^k, \lambda_\theta^l \right\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

где под символом λ понимаются компоненты векторов перемещений v^1 , v^2 и v .

Аппроксимирующие выражения принимаются для каждой компоненты в виде

$$\lambda = \left\{ \varphi(\xi, \eta) \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \lambda_y^1 \right\}_{12 \times 1} = \left\{ \varphi(\xi, \eta) \right\}_{1 \times 12}^T [H]_{12 \times 12} \left\{ \lambda_y^g \right\}_{12 \times 1} = \left\{ \gamma \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \lambda_y^g \right\}_{12 \times 1} \quad (2.29)$$

Производные компонент v^1 , v^2 и v определяются дифференцированием (2.29)

$$\lambda_{,\alpha} = \left\{ \varphi_{,\alpha}(\xi, \eta) \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \lambda_y^1 \right\}_{12 \times 1} = \left\{ \varphi_{,\alpha}(\xi, \eta) \right\}_{1 \times 12}^T [H]_{12 \times 12} \left\{ \lambda_y^g \right\}_{12 \times 1} = \left\{ \gamma_{,\alpha} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \lambda_y^g \right\}_{12 \times 1} \quad (2.30)$$

$$\lambda_{,\alpha\beta} = \left\{ \varphi_{,\alpha\beta}(\xi, \eta) \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \lambda_y^1 \right\}_{12 \times 1} = \left\{ \varphi_{,\alpha\beta}(\xi, \eta) \right\}_{1 \times 12}^T [H]_{12 \times 12} \left\{ \lambda_y^g \right\}_{12 \times 1} = \left\{ \gamma_{,\alpha\beta} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \lambda_y^g \right\}_{12 \times 1}$$

Аппроксимирующие выражения (2.29) и (2.30) оказываются независимыми от параметров используемой криволинейной системы координат.

Деформации произвольной точки (2.12) записываются выражениями

$$\left\{ \epsilon_{\alpha\beta}^{\xi} \right\}_{3 \times 1} = \left[L_0^{\xi} \right]_{3 \times 3} \left\{ u \right\}_{3 \times 1} \quad (2.31)$$

где $\left\{ u \right\}^T = \{v^1, v^2, v\}$, $[L_0^{\xi}]$ – матрица дифференциальных и алгебраических операторов.

На основе (2.29) компонуется матричное соотношение

$$\left\{ u \right\}_{3 \times 1} = [K_0]_{3 \times 36} \left\{ u_y \right\}_{36 \times 1} \quad (2.32)$$

где $\left\{ u_y \right\}^T = \left\{ v_y^1 \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ v_y^2 \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ v_y \right\}_{1 \times 12}^T$.

Деформации (2.27) с использованием традиционной аппроксимации записываются выражением

$$\left\{ \epsilon_{\alpha\beta}^{\xi} \right\}_{3 \times 1} = \left[L_0^{\xi} \right]_{3 \times 3} \left\{ u \right\}_{3 \times 1} = \left[L_0^{\xi} \right]_{3 \times 3} [K_0]_{3 \times 36} \left\{ u_y \right\}_{36 \times 1} = [B_0]_{3 \times 36} \left\{ u_y \right\}_{36 \times 1} \quad (2.33)$$

2.3. Матрица жесткости конечного элемента. Матрица жесткости и столбец узловых усилий четырехугольного конечного элемента формируются на основе функционала Лагранжа, отражающего равенство действительных работ внешних и внутренних сил

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \epsilon_{\alpha\beta}^{\xi} \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} dV - \frac{1}{2} \int_F \left\{ v \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ P \right\}_{3 \times 1} dF \quad (2.34)$$

где $\left\{ \sigma^{\alpha\beta} \right\}^T = \{\sigma^{11}, \sigma^{22}, \sigma^{12}\}$ – матрица-строка контравариантных компонент тензора напряжений в произвольном слое оболочки, отстоящем на расстоянии ζ от срединной поверхности; $\left\{ P \right\}^T = \{p_1, p_2, p_3\}$ – столбец внешней нагрузки.

Принимая во внимание (2.14), (2.25) и (2.27) равенство (2.34) можно представить в виде

$$\Phi = \frac{1}{2} \left\{ f_y^g \right\}_{1 \times 36}^T \int_V [B]^T [C] [B] dV \left\{ f_y^g \right\}_{36 \times 1} - \frac{1}{2} \left\{ f_y^g \right\}_{1 \times 36}^T \int_F [K]^T \left\{ P \right\}_{3 \times 1} dF \quad (2.35)$$

Минимизация функционала (2.35) по $\left\{ f_y^g \right\}_{1 \times 36}^T$ позволяет получить матричное соотношение

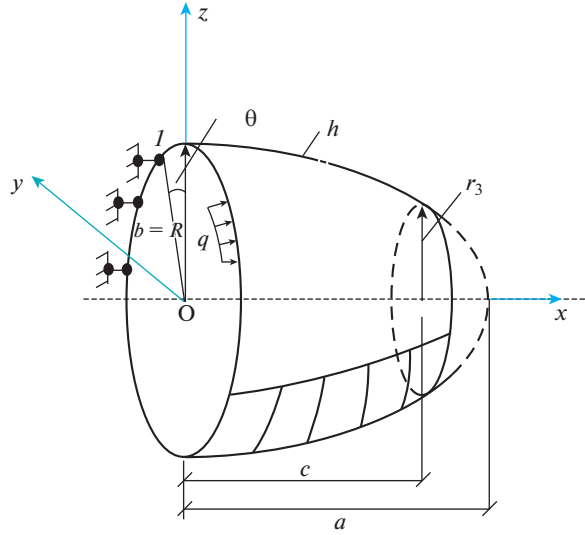


Рис. 2. Усеченный эллипсоид вращения.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^g \end{bmatrix}_{36 \times 36} \{ \mathbf{f}_y^g \}_{36 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^g \end{bmatrix}_{36 \times 1}$$

где $\begin{bmatrix} \mathbf{M}^g \end{bmatrix}_{36 \times 36} = \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix} dV$ – матрица жесткости; $\begin{bmatrix} \mathbf{R}^g \end{bmatrix}_{36 \times 1} = \int_F \begin{bmatrix} \mathbf{K} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P} \end{bmatrix} dF$ – столбец узловых усилий четырехугольного конечного элемента в глобальной системе координат.

При использовании в функционале (2.35) матричных выражений $\begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \end{bmatrix}_{3 \times 36}$ по (2.33), $\begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 \end{bmatrix}_{3 \times 36}$ по (2.32) получается традиционная матрица жесткости [20, 21] для определения узловых неизвестных $\{ \mathbf{u}_y \}_{36 \times 1}$.

2.4. Формулировка граничных условий в опорном сечении оболочки. Рассмотрим условия защемления для оболочки вращения, имеющей на левом краю шарнирно-подвижную опору (рис. 2) при выбранном столбце узловых неизвестных

$$\{ \mathbf{f} \}_{1 \times 9}^T = \{ v^1, f_1^1, f_2^1, v^2, f_1^2, f_2^2, v, f_1, f_2 \} \quad (2.36)$$

В шарнирно-подвижной опоре для меридиональных и тангенциальных компонент вектора перемещения справедливы равенства

$$v^1 = 0, \quad v^2 = 0$$

В плоскости симметрии xOz для проекций вектора перемещения на соответствующие касательные векторы локального базиса должны выполняться следующие условия

$$\mathbf{v}_{,\theta} \cdot \mathbf{a}^1 = 0, \quad \mathbf{v}_{,\theta} \cdot \mathbf{a}_3 = 0 \quad (2.37)$$

Согласно (2.5) при учете (2.2) равенства (2.37) можно записать в виде

$$f_2^1 = v_{,\theta}^1 + n_{21} v^2 = 0, \quad f_2 = v_{,\theta} + v n_{23} = 0$$

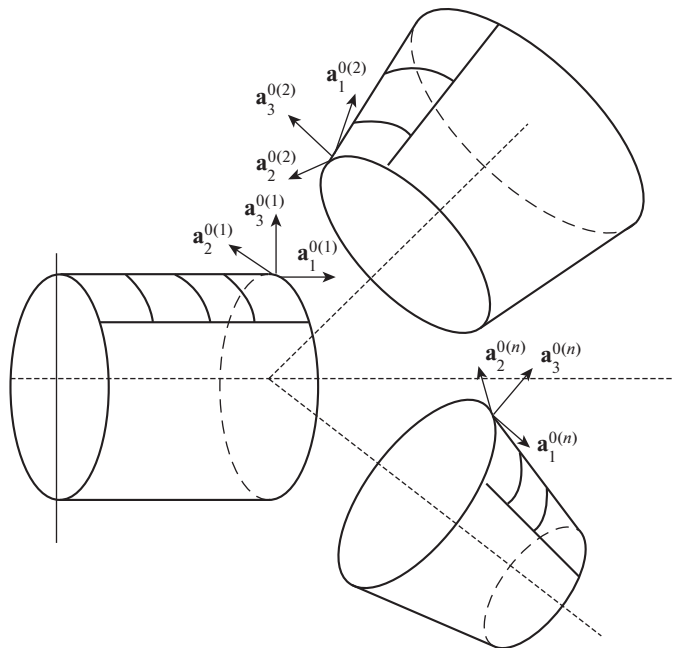


Рис. 3. Соединение трех оболочек вращения.

В плоскости симметрии yOz условия опирания можно найти из следующих соотношений

$$\mathbf{v}_{,x} \cdot \mathbf{a}_3 = 0, \quad \mathbf{v}_{,x} \cdot \mathbf{a}^2 = 0$$

или

$$f_1 = v_{,x} + v^1 m_{13} = 0, \quad f_1^2 = v_{,x}^2 + m_{22} v^2 = 0$$

2.5. Зависимости между узловыми неизвестными в узле сопряжения нескольких оболочек. При сочленении n оболочек вращения необходимо соблюдение корректных условий сопряжения. Для вывода этих условий предлагается принять набор узловых варьируемых параметров одной из сочленяемых оболочек в качестве основного (рис. 3). Компоненты узловых наборов остальных $(n - 1)$ сопрягаемых оболочек выражаются через основной при использовании кинематических условий сопряжения.

Первым условием сопряжения принималась инвариантность векторов перемещения n сопрягаемых оболочек в узлах ветвления меридиана

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{(2)} = \dots = \mathbf{v}^{(n)} \quad (2.38)$$

где n — номер сопрягаемой оболочки.

Базисные векторы основной оболочки ($\mathbf{v}^{(1)}$) можно представить в базисе векторов любой из $(n - 1)$ примыкающих оболочек

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1}^1 &= \left[z^0 \right]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{i} \right\}_{3 \times 1}, & \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1}^k &= \left[z^k \right]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{i} \right\}_{3 \times 1}, \quad (k = \overline{2, n}) \\ \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1}^1 &= \left[z^0 \right]_{3 \times 3} \left[z^k \right]_{3 \times 3}^{-1}, & \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1}^k &= \left[z \right]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1}^k \end{aligned}$$

где элементы матриц $\begin{bmatrix} z^0 \\ 3 \times 3 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} z^k \\ 3 \times 3 \end{bmatrix}$ определяются согласно (2.1).

На основании (2.38) компоненты вектора перемещения любой из примыкающих оболочек можно найти из матричного соотношения

$$\begin{Bmatrix} v \\ 3 \times 1 \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} z \\ 3 \times 3 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} v \\ 3 \times 1 \end{Bmatrix}^1 \quad (2.39)$$

Второе условие сопряжения определяется тем, что кривой пересечения n сочленяемых оболочек является окружность. Опираясь на это утверждение можно записать равенства

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{(1)}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathbf{v}^{(k)}}{\partial \theta}, \quad (k = \overline{2, n}) \quad (2.40)$$

На основании (2.40) с учетом (2.5) можно определить значения узловых агрегатных компонент любой из k примыкающих оболочек через столбец узловых агрегатных наборов основной оболочки

$$\begin{Bmatrix} f_u \\ 3 \times 1 \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} z \\ 3 \times 3 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} f_u \\ 3 \times 1 \end{Bmatrix}^1 \quad (2.41)$$

где $\begin{Bmatrix} f_u \\ 3 \times 1 \end{Bmatrix}^T = \{f_2^1 \ f_2^2 \ f_2^3\}$.

Следующие условия сопряжения определяются из равенств углов поворотов нормалей к срединным поверхностям для каждой из n сочленяемых оболочек

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{(1)}}{\partial x} \cdot \mathbf{a}^{0(1)} = \frac{\partial \mathbf{v}^{(k)}}{\partial x} \cdot \mathbf{a}^{0(k)} \quad (2.42)$$

Выполнив операцию скалярного произведения векторов в (2.42) можно определить узловые компоненты f_1 для любой из примыкающих к основной k оболочек вращения

$$f_1^{(k)} = f_1^{(1)} \quad (2.43)$$

Также в узле сопряжения должны быть равными компоненты векторов $\mathbf{v}_{,x}$ на базисный вектор $\mathbf{a}_2^0$ всех сопрягаемых оболочек

$$\mathbf{v}_{,x}^{(1)} \cdot \mathbf{a}_2^{0(1)} = \mathbf{v}_{,x}^{(2)} \cdot \mathbf{a}_2^{0(2)} = \dots = \mathbf{v}_{,x}^{(n)} \cdot \mathbf{a}_2^{0(n)} \quad (2.44)$$

Из равенств (2.44) определяются компоненты f_1^2 узлового набора любой из примыкающих к основной k оболочек

$$f_1^{2(k)} = f_1^{2(1)} \quad (2.45)$$

Узловые неизвестные f_1^1 всех примыкающих к основной k оболочек остаются свободно варьируемыми. В результате столбцы неизвестных в узлах ветвления меридиана представляются в виде

$$\begin{Bmatrix} f_y^{g(k)} \\ 1 \times (9+k) \end{Bmatrix}^T = \left\{ \begin{Bmatrix} f_y^{g(1)} \\ 1 \times (9+k) \end{Bmatrix}^T, f_1^{1(2)}, f_1^{1(3)} \dots f_1^{1(k)} \right\}, \quad (k = \overline{n-1})$$

При использовании (2.39), (2.41), (2.43) и (2.45) формируется матричное соотношение для столбца узловых неизвестных любой из k примыкающих к основной оболочки

$$\begin{Bmatrix} f_y^{g(m)} \\ 9 \times 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ 9 \times (9+k) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_y^{g(k)} \\ (9+k) \times 1 \end{Bmatrix}$$

Таблица 1. Расчет эллипсоида

Номер узло- вой точки	Напряже- ние, МПа	Вариант столбца узловых неизвестных								Решение по фор- муле
		первый				второй				
		величина жесткого смещения оболочки, см								
		0.0	0.085	0.16	0.26	0.0	0.085	0.16	0.26	
1	σ_k^s	174.3	189.7	203.2	221.1	177.4	177.3	177.5	177.6	179.05
	σ_k^v	175.0	191.7	206.2	225.5	179.7	179.3	179.3	179.4	
	σ_k^n	173.5	187.8	200.3	216.8	175.2	175.1	175.2	175.3	

3. Результаты. Пример 1. Была решена тестовая задача по определению напряженно-деформированного состояния оболочечной конструкции в виде усеченного эллипсоида. Оболочка загружалась внутренним давлением интенсивности q и имела на левом краю пружинную опору, позволяющую ей смещаться в горизонтальном направлении, и нормаль, сохраняющую вертикальное положение. При абсолютной жесткости пружины она становится опорным стержнем, препятствующим горизонтальному смещению оболочки (рис. 2).

Исходные данные были приняты следующие: $q = 5$ МПа; большая полуось эллипса $a = 1.3$ м; малая полуось эллипса $b = 0.9$ м; $E = 2 \times 10^5$ МПа; $\mu = 0.3$; толщина оболочки $h = 0.02$ м; $c = 1.2$ м.

Расчет выполнялся в двух вариантах. В первом варианте в качестве узловых неизвестных выступали компоненты вектора перемещения и их производные по глобальным координатам x и θ

$$\{f^*\}_{1 \times 9}^T = \{v^1, v^2, v, v_x^1, v_x^2, v_x, v_\theta^1, v_\theta^2, v_\theta\} \quad (3.1)$$

Во втором варианте расчета узловыми неизвестными принимались компоненты вектора перемещения и компоненты его первых производных (2.36).

В табл. 1 приведены результаты расчета эллипсоида при различных величинах смещения конструкции в горизонтальном направлении как жесткого целого. В ней отражены значения кольцевых напряжений на срединной поверхности σ_k^s , а также во внутренних σ_k^v и внешних σ_k^n волокнах оболочки на ее левом краю (точка 1). Для наглядности по данным табл. 1 была построена эпюра напряжений (рис. 4).

Как видно из таблицы, при отсутствии жесткого смещения оба варианта узловых варьируемых параметров дают приемлемые показатели напряжений, которые совпадают со значениями, вычисленными по формуле Лапласа. При наличии жесткого смещения первый вариант узловых неизвестных приводит к неудовлетворительным результатам вычислений.

Число элементов дискретизации оболочки, исходя из анализа результатов сходимости вычислительного процесса, было принято равным 8.

Пример 2. Была решена задача по определению напряженно-деформированного состояния составной оболочечной конструкции, состоящей из цилиндра и примыкающего к нему эллипса (рис. 5). Оболочка загружалась внутренним давлением интенсивности q и имела на левом краю (точка 1) стержневую опору.

Исходные данные были приняты следующие: $q = 5$ МПа; большая полуось эллипса $a = 1.3$ м; малая полуось эллипса $b = R = 0.9$ м; $E = 2 \times 10^5$ МПа; $\mu = 0.3$; толщина оболочки $h = 0.02$ м; радиус цилиндрической оболочки $R = 0.9$ м; $c = 1.2$ м; $l = 1$ м.

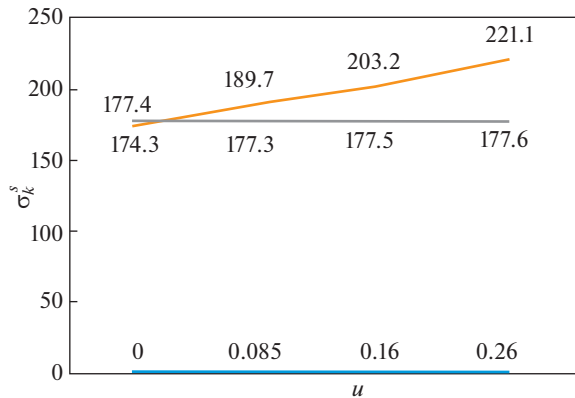


Рис. 4. Диаграммы кольцевых напряжений в зависимости от смещения оболочки как жесткого целого: σ_k^s – кольцевое напряжение на срединной поверхности оболочки вращения, МПа; u – величина жесткого смещения, см.

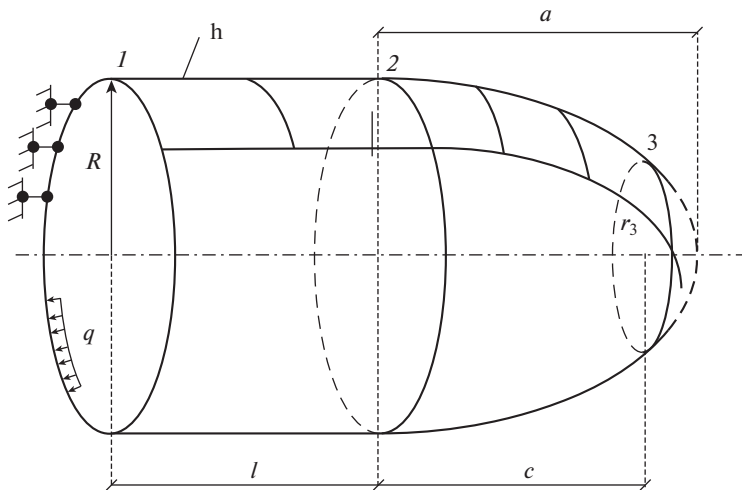


Рис. 5. Составная оболочечная конструкция.

Расчет выполнялся в двух вариантах. В первом варианте формирование матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента осуществлялось на основании традиционной интерполяции перемещений (2.29), (2.30). Во втором варианте использовалась предложенная авторами векторная аппроксимация полей перемещений (2.25).

Если стержневую опору заменить пружиной, то оболочечная конструкция получит возможность смещаться в осевом направлении как абсолютно твердое тело. Величина жесткого смещения может варьироваться в зависимости от жесткости пружины.

В табл. 2 приведены результаты расчета конструкции при различных значениях величины жесткого смещения и повариантном применении традиционной и векторной аппроксимации перемещений. В таблице представлены величины меридиональных и кольцевых напряжений на срединной поверхности оболочки в характерных точках

Таблица 2. Расчет составной оболочечной конструкции

Номер узловой точки	Напряжение, МПа	Вариант интерполяции перемещений								Решение по формуле
		традиционная				векторная				
		величина жесткого смещения оболочки, м								
		0.0	0.027	0.263	2.09	0.0	0.027	0.271	2.71	
1	σ_m	95.83	95.55	93.1	74.1	96.08	96.08	96.08	96.08	98.85
	σ_k	224.9	224.9	224.8	224.2	225.2	225.2	225.2	225.2	225.0
2	σ_m	95.58	95.0	89.82	50.3	94.8	94.8	94.8	94.8	98.85
	σ_k	183.6	175.6	105.3	−438.8	174.2	183.1	183.1	183.0	179.0
3	σ_m	1.1	−5.6	63.83	207.8	3.5	3.4	3.4	3.38	0.0
	σ_k	169.1	93.7	−56.53	−2328.2	171.9	171.9	171.9	171.9	169.6

конструкции: левом краю оболочки (точка 1), в узле ветвления (точка 2) и на свободном крае оболочки (точка 3).

Число элементов дискретизации оболочечной конструкции, обеспечивающее удовлетворительную сходимость вычислительного процесса в обоих вариантах расчета было принято равным 24.

Как видно из табл. 2 в отсутствии жесткого смещения и традиционная и векторная интерполяция компонент вектора перемещения приводят к удовлетворительным показателям параметров напряженно-деформированного состояния. При наличии жестких смещений приемлемые показатели напряжений наблюдаются только в варианте векторной аппроксимации (2.25), предложенной авторами.

4. Обсуждения. В представленной работе достоверность результатов тестовых расчетов определялась несколькими критериями. Первым критерием выступала сходимость вычислительного процесса. Анализ сетки дискретизации показал, что удовлетворительная сходимость обеспечивается при числе конечных элементов равном 8 в первом примере расчета и 24 во втором.

В характерных точках конструкции можно вычислить значение контролируемых параметров напряженно-деформированного состояния исходя из условия равновесия

$$\sigma_m = \frac{\pi R^2 - \pi r_3^2}{2\pi R} \cdot \frac{q}{t} \quad (4.1)$$

Значения меридиональных напряжений в крайних правых незагруженных краях оболочки (точка 3, рис. 5) по физическим соображениям должны стремиться к нулю.

Значения кольцевых напряжений определяются с помощью формулы Лапласа для тонкостенной оболочки

$$\frac{\sigma_m}{R_m} - \frac{\sigma_k}{R_k} = \frac{q}{t} \quad (4.2)$$

где R_m и R_k – радиусы главных кривизн.

Пример 1. При использовании (4.1) было найдено аналитическое значение кольцевого напряжения в точке 1, которое составило $\sigma_k = 179.05$ МПа.

Как видно из табл. 1 при отсутствии жестких смещений результаты повариантных расчетов практически совпали с вычисленными по известным формулам. Погрешности вычислений не превышают 2–3%.

Если оболочка получает возможность смещаться как жесткое целое, то результаты расчетов существенно различаются. В первом варианте при величине горизонтального смещения равном 8.5×10^{-4} м погрешность расчета по кольцевым напряжениям составила почти 6%. Если смещение увеличить в 3 раза, то эта погрешность составляет уже 13% и является неприемлемой.

Во втором варианте расчета наблюдается стабильная картина напряженно деформированного состояния оболочки вне зависимости от величины жесткого смещения. Погрешность вычислений не превышает 2%.

Пример 2. Значение кольцевого напряжения на левом краю оболочки (точка 1) определяется согласно выражению

$$\sigma_k = R_k \frac{q}{t} = \frac{90 \cdot 5}{2} = 225 \text{ МПа}$$

Как видно из табл. 2 при наличии стержневой опоры на левом краю конструкции оба варианта расчета (традиционный и векторный способ интерполяции перемещений) позволяют получать приемлемые конечно-элементные решения, которые практически совпали с найденными по формуле (4.2).

Если оболочка смещается как жесткое целое, то картина напряженно-деформированного состояния существенно различается. В первом варианте расчета уже при смещении 0.027 м наблюдается некорректное значение кольцевого напряжения в точке 3 (рис. 5). Дальнейшее увеличение величины жесткого смещения, как видно, приводит к совершенно неприемлемым результатам.

Во втором варианте расчета (при использовании авторских интерполяционных выражений (2.25)) величина жесткого смещения абсолютно не влияет на картину напряженно-деформированного состояния. Даже при смещении в 2.71 м наблюдается устойчивое стремление показателей напряжений к вычисленным аналитически по вышеуказанным формулам.

5. Выводы. Опираясь на анализ представленных результатов можно сделать следующие выводы:

- разработанный алгоритм формирования матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента с использованием авторской методики получения аппроксимирующих выражений на основе векторного способа интерполяции перемещений позволяет учитывать смещения конструкции как жесткого целого;

- при учете жестких смещений целесообразно использовать в качестве узловых неизвестных компоненты вектора перемещения и компоненты производных векторов перемещений узловых точек (2.36) в рассматриваемой криволинейной системе координат;

- разработанные на основании определенных условий учета граничных условий для компонент производных векторов узловых смещений условия сопряжения сочлененных оболочек вращения являются математически корректными, что подтверждено результатами расчетов;

- разработанные и математически обоснованные кинематические зависимости между узловыми неизвестными в точках сопряжения нескольких оболочек вращения приводят к корректным показателям напряженно-деформированного состояния при учете смещения конструкции как жесткого целого;

- использование компонент вектора перемещений и их производных (3.1) в качестве узловых неизвестных при реализации векторного способа аппроксимации перемещений не дает возможности получать корректные значения напряжений если допускаются смещения оболочки как абсолютно твердого тела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. СПб.: СПбГУ, 2010. 348 с.
2. *Пелех Б.Л.* Обобщенная теория оболочек. Львов: Вища школа, 1978. 159 с.
3. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
4. *Krysko A.V., Awrejcewicz J., Mitskevich S.A., Zhigalov M.V., Krysko V.A.* Nonlinear dynamics of heterogeneous shells. Part 2. Chaotic dynamics of variable thickness shells // *Int. J. Non Linear Mech.* 2021. V. 129. P. 103660.
<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103660>
5. *Шевченко А.С.* Численные методы: учебное пособие. М.: ИНФРА-М, 2022. 381 с.
6. *Самогин Ю.Н.* Метод конечных элементов в задачах сопротивления материалов. М.: Физматлит, 2012. 200 с.
7. *Аганов В.П.* Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций. М.: АСВ, 2000. 152 с.
8. *Ефанов К.В.* Расчет нефтяных аппаратов методом конечных элементов. Самиздат: Литрес, 2020. 132 с.
9. *Трушин С.И.* Строительная механика: метод конечных элементов: учебное пособие. М.: ИНФРА-М, 2019. 305 с.
10. *Beirao Da Veiga L., Lovadina C., Mora D.* A virtual element method for elastic and inelastic problems on polytope meshes // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2015. V. 295. P. 327–346.
<https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.07.013>
11. *Liang K., Ruess M., Abdalla M.* Co-rotational finite element formulation used in the Koiter-Newton method for nonlinear buckling analyses // *Finite Elem. Anal. Des.* 2016. V. 116. P. 38–54.
<https://doi.org/10.1016/j.finel.2016.03.006>
12. *Деклу Ж.* Метод конечных элементов. М.: Мир, 1976. 486 с.
13. *Kattan P.I., Voyiadjis G.Z.* Damage mechanics with finite elements. Practical applications with computer tools. Berlin: Springer, 2002. 123 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-56384-3>
14. *Кей С.В., Бейсинджер З.Е.* Расчет тонких оболочек на основе метода конечных элементов // Расчет упругих конструкций с использованием ЭВМ. Т. 1. Л: Судостроение, 1974. С. 151–178.
15. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 391 с.
16. *Скопинский В.Н.* Напряжения в пересекающихся оболочках. М.: Физматлит, 2008. 400 с.
17. *Dzhabrailov A.S., Nikolaev A.P., Klochkov Y.V., Ishchanov T.R., Gureeva N.A.* Calculation of an elliptic cylindrical shell outside elastic limits based on the FEM with various forms of defining equations // *J. Mach. Manuf. Reliab.* 2020. V. 49. P. 518–529.
<https://doi.org/10.3103/S1052618820060023>
18. *Демидов С.П.* Теория упругости. М.: Высш. школа, 1979. 432 с.
19. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. М.: Наука, 1994. 528 с.
20. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
21. *Бате К.-Ю.* Методы конечных элементов. М.: Физматлит, 2010. 1024 с.