

УДК 537.632

## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА МИКРОМЕХАНИЧЕСКОГО НЕКОНТАКТНОГО ИНДУКЦИОННОГО ПОДВЕСА

© 2023 г. Д. Ю. Скубов<sup>a,b,\*</sup>, Д. А. Индейцев<sup>b</sup>, П. П. Удалов<sup>a,\*\*</sup>, И. А. Попов<sup>a,\*\*\*</sup>,  
А. В. Лукин<sup>a,\*\*\*\*</sup>, К. В. Полеткин<sup>c,\*\*\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Санкт-Петербург, Россия

<sup>b</sup>Институт проблем машиноведения Российской академии наук,  
Санкт-Петербург, Россия

<sup>c</sup>Institute of Microstructure Technology, Karlsruhe Institute of Technology, Karlsruhe, Germany

\*e-mail: skubov.dsk@yandex.ru

\*\*e-mail: pp\_udalov@mail.ru

\*\*\*e-mail: popov\_ia@spbstu.ru

\*\*\*\*e-mail: lukin\_av@spbstu.ru

\*\*\*\*\*e-mail: k.poletkin@gmail.com

Поступила в редакцию 21.12.2022 г.

После доработки 27.01.2023 г.

Принята к публикации 30.01.2023 г.

В работе выполняется построение и исследование нелинейной электромеханической модели движения микромасштабного проводящего недеформируемого кольца в неконтактном электромагнитном индукционном подвесе. Аналитически найдены положения равновесия кольца, исследована их устойчивость, построены соответствующие бифуркационные диаграммы. С применением асимптотических методов нелинейной механики исследована нелинейная динамика системы вблизи ее положения равновесия. Проведена линеаризация системы вблизи ее положения равновесия, получено выражение для магнитной жесткости подвеса. Рассмотрена возможность использования электростатических полей для управления величиной суммарной линейной жесткости левитирующего подвеса.

*Ключевые слова:* магнитная левитация, МЭМС, датчик ускорений, электромагнитная индукция, инерциальный датчик, магнитный неконтактный подвес

DOI: 10.31857/S0572329922600864, EDN: RTQSUR

**1. Введение.** Электромагнитный неконтактный подвес – устройство, работающее на принципе электромагнитной левитации и использующее пондеромоторные силы для компенсации силы тяжести. Это приводит к стабилизационному удержанию чувствительной части устройства в равновесии без механического крепления [1–5]. При этом чувствительный элемент подвеса может приобретать достаточно большую (теоретически бесконечную) чувствительность при правильной настройке электрической части системы [6], что позволяет использовать данный прибор как сенсор, регистрирующий малейшие воздействия на чувствительный элемент в окрестности своего положения равновесия, что показано в [6–13]. Для демонстрации принципа работы прибора предположим, что подвес работает как датчик ускорений. С уменьшением жесткости подвеса ( $c \rightarrow 0$ ) чувствительность акселерометра неограниченно увеличивается и в пределе становится бесконечной [6]. Таким образом, при технологической воз-

возможности исключения механической жесткости из модели оказывается возможным получить прибор с бесконечной (очень большой) чувствительностью и, как следствие, перспективой измерять сколь угодно малые внешние ускорения. Для управления величиной жесткости предлагается использовать комбинацию магнитного и электрического подвесов, чтобы при определенных параметрах электрической и магнитной частей конструкции свести к нулю суммарную линейную жесткость системы.

Множество работ посвящено тематике разработки конструкции и режимов работы электромагнитного подвеса. В [6] рассмотрен описанный подход при конструировании электромагнитного подвеса в случае дискообразной массы при учете только осевых движений левитирующей массы. В работах [12, 14] получены динамические уравнения левитирующей массы при дополнительном учете угловых смещений вследствие возникновения магнитных моментов. В [10, 15] получены общие условия устойчивого движения левитирующей массы, в [16] обсуждаются построение и оценка взаимной индуктивности контуров различной формы, в [17] проводится численный анализ режимов работы электромагнитного подвеса.

Основной целью данной работы является развитие общего аналитического подхода к исследованию нелинейной динамики электромагнитных подвесов на примере постановки задачи, впервые рассмотренной в [6]. В работе выполняется построение и исследование нелинейной электромеханической модели движения микромасштабного проводящего недеформируемого кольца в неконтактном электромагнитном индукционном подвесе. Аналитически найдены положения равновесия кольца, исследована их устойчивость, построены соответствующие бифуркационные диаграммы. С применением асимптотических методов нелинейной механики исследована нелинейная динамика системы вблизи ее положения равновесия. Проведена линеаризация системы вблизи ее положения равновесия, получено выражение для магнитной жесткости подвеса. Рассмотрена возможность использования электростатических полей для управления величиной суммарной линейной жесткости левитирующего подвеса.

**2. Математическая модель.** При рассмотрении магнитного подвеса предполагается, что по катушке индуктивности (левитационной катушке) протекает периодический ток. В левитирующем теле, изготовленном из проводящего материала, вследствие закона электромагнитной индукции возникают наведенные токи, которые взаимодействуют с питающим током. При этом взаимодействии возникает сила Ампера, которая может отталкивать или притягивать левитирующее тело в зависимости от направления пондеромоторных сил. Стабилизирующая катушка выступает в качестве регулятора возможных движений инерционной массы. При определенных условиях, сформулированных в статье [12], в микромеханическом неконтактном подвесе левитационная и стабилизационная катушки могут быть рассмотрены отдельно. Схематическое изображение рассматриваемой проблемы представлено на рис. 1.

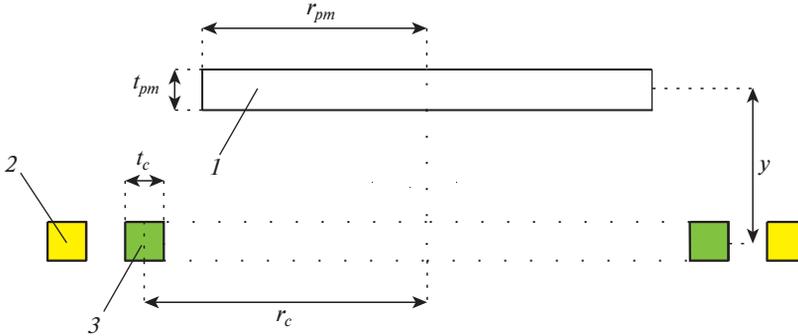
Энергия магнитного поля  $W$ , создаваемого катушкой срединного радиуса  $r_c$ , толщины  $t_c$ , запитываемая переменным током  $i_1$ , и дископодобной инерционной массой (ИМ) радиуса  $r_{pm}$ , толщины  $t_{pm}$  с наведенным током  $i_2$ , записывается как

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M_{12}(y) i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \quad (2.1)$$

где  $L_1$  и  $L_2$  – собственные индуктивности катушки и ИМ, соответственно [5]:

$$L_1 = \mu_0 r_c w^2 \left( \ln \frac{8r_c}{t_c} - 2 \right), \quad L_2 = \mu_0 r_{pm} \left( \ln \frac{16r_{pm}}{t_{pm}} - 2 \right) \quad (2.2)$$

$w$  – количество витков катушки,  $M_{12}(y)$  – взаимная индуктивность между катушкой и ИМ,  $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $y$  – координата вертикального перемещения ИМ относительно катушки индуктивности.



**Рис. 1.** Схематическое изображение магнитной части электромагнитного подвеса;  $I$  – инерционная масса, 2, 3 – левитационная и стабилизирующая катушки соответственно.

В общем случае взаимная индуктивность  $M_{12}(y)$  является сложной неэлементарной функцией [18]. Это составляет определенную трудность для аналитического исследования модели магнитного подвеса [19]. Известны приближенные выражения для взаимной индуктивности [5, 6, 18], применимые в условиях ряда допущений, заключающихся в предположении о том, что характерные размеры катушки и ИМ намного больше высоты положения равновесия левитации  $y_0$ . Также предполагается, что индуцированный вихревой ток  $i_2$  распределяется вдоль ИМ таким образом, что можно выделить контур, соответствующий максимальному значению плотности вихревого тока [19]. Контур вихревого наведенного тока  $i_2$  геометрически определяется как окружность, имеющая тот же диаметр, что и ИМ [19]. В силу указанных особенностей устройства, силовое взаимодействие в вертикальном направлении сводится к взаимодействию между вихревым током  $i_2$  и током катушки  $i_1$  [20]. Иными словами, данное приближение соответствует случаю линейных токов, т.е. сведению взаимодействия токов в проводниках к токам по некоторым кривым в пространстве [21]. Если рассматривать ИМ и наведенный ток как окружности, то взаимная индуктивность между ними может быть описана точной формулой Максвелла для двух колец радиусов  $r_c$  и  $r_{pm}$  [18]:

$$M_{12}(\kappa) = \mu_0 w^2 \sqrt{r_c r_{pm}} \left[ \left( \frac{2}{\kappa} - \kappa \right) K(\kappa) - \frac{2}{\kappa} E(\kappa) \right], \quad \kappa^2(y) = \frac{4r_c r_{pm}}{(r_c + r_{pm})^2 + y^2} \quad (2.3)$$

где  $K(\kappa)$  и  $E(\kappa)$  – полные эллиптические интегралы первого и второго рода,  $\kappa(y)$  – эллиптический модуль [22].

При выводе уравнений динамики ИМ рассматривается динамика его центра тяжести. Предполагается, что ИМ перемещается только в вертикальном направлении. В указанной постановке потенциальная  $\Pi$  и кинетическая  $T$  энергии имеют вид:

$$\Pi = \tilde{m}gy, \quad T = \frac{1}{2} \tilde{m} \dot{y}^2 \quad (2.4)$$

где  $\tilde{m}$  – масса ИМ,  $g$  – ускорение свободного падения,  $(\dot{\phantom{x}})$  – обозначение производной по времени  $t$ .

Диссипативная функция системы  $\Psi$  может быть записана как

$$\Psi(\dot{y}, i_2) = \frac{1}{2} R_2 i_2^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{y}^2 \quad (2.5)$$

где  $R_2$  – электрическое сопротивление ИМ,  $\mu$  – коэффициент механического трения между ИМ и окружающей средой.

Также предполагается, что ток катушки  $i_1$  создается генератором переменного тока, то есть:

$$i_1 = i_a \sin \omega t \quad (2.6)$$

где  $i_a$  и  $\omega$  – амплитуда и частота тока  $i_1$  соответственно.

Для записи уравнений движения ИМ и наведенного тока  $i_2$  применим формализм Лагранжа–Максвелла. В качестве обобщенных координат примем перемещение  $y$  и ток  $i_2$  и запишем уравнения Лагранжа–Максвелла в форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial W}{\partial i_2} + \frac{\partial \Psi}{\partial i_2} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial (W - \Pi - T)}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{y}} = 0 \quad (2.7)$$

Подставляя выражения (2.2)–(2.6) в выражение (2.7), получим

$$\begin{aligned} L_2 \ddot{i}_2 + \frac{dM_{12}(y)}{dy} \dot{y} i_a \sin \omega t + M_{12}(y) i_a \omega \cos \omega t + R_2 i_2 = 0 \\ \tilde{m} \ddot{y} + \mu \dot{y} - \frac{dM_{12}}{dy} i_2 i_a \sin \omega t + \tilde{m} g = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Система уравнений (2.8) задает динамику колебаний ИМ при воздействии на нее переменного тока  $i_1$ , протекающего в катушке индуктивности. Для дальнейшего исследования системы (2.8) введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{L_1 i_a^2}{2 \tilde{m} g r_c}, \quad \beta = \frac{\mu_0 r_c}{L_1}, \quad \tau = \omega t, \quad \varepsilon = \frac{g}{2 \omega^2 r_c} \\ \lambda = \frac{\mu}{\tilde{m} \omega}, \quad \tau = \omega t, \quad \xi = \frac{y}{2 r_c}, \quad a = \frac{r_{pm}}{r_c}, \quad j_2 = \frac{i_2}{i_a}, \quad l = \frac{L_2}{L_1}, \quad r = \frac{R_2}{L_1 \omega} \\ m_{12} = \frac{M_{12}}{L_1} = \beta \sqrt{a} \left[ \left( \frac{2}{\kappa} - \kappa \right) K(\kappa) - \frac{2}{\kappa} E(\kappa) \right], \quad \kappa^2(\xi) = \frac{4a}{(1+a)^2 + 4\xi^2} \\ \frac{dm_{12}}{d\xi} = \frac{\partial m_{12}}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} = - \frac{8\beta a}{\kappa^2} \left[ \frac{(2 - \kappa^2) E(\kappa)}{1 - \kappa^2} - 2K(\kappa) \right] \frac{\xi}{((1+a)^2 + 4\xi^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

и перепишем систему (2.8) в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} l j_1' + r j_2 = - \frac{dm_{12}}{d\xi} \xi' \sin \tau - m_{12} \cos \tau \\ \xi'' + \lambda \xi' = \varepsilon \left( \alpha \frac{dm_{12}}{d\xi} j_2 \sin \tau - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $( )' = \frac{d}{d\tau}$  – обозначение производной по безразмерному времени  $\tau$ .

Величина  $\varepsilon \alpha = \frac{L_1 I_1^2}{4 r_c^2 \omega^2 m}$  определяет отношение между магнитной и механической энергиями системы. Из (2.9) видно, что входящий в нее параметр  $\varepsilon$ , обозначающий собой отношение гравитационного ускорения к центробежному, является малым. Данное утверждение следует из предположения [6] о высокой частоте  $\omega$  питающего

тока  $i_1$ . Для характерных параметров системы [6, 10]  $r_c = 265$  мкм,  $\omega = 6.28$  мрад/с,  $\varepsilon = 18 \times 10^{-9}$ . Таким образом, получена безразмерная динамическая система левитирующей массы и наведенного тока с явным малым параметром  $\varepsilon$ , что позволяет применять асимптотические методы нелинейной механики для оценки динамических режимов исследуемой системы [23].

Сначала решается задача о нахождении положения равновесия ИМ для пары неизвестных  $(j_2, \xi) = (j_{20}, \xi_0)$  системы (2.10), где  $j_{20} = j_{20}(\tau)$  – гармоническая функция наведенного тока, которая соответствует постоянному значению положения равновесия  $\xi_0$ .

**3. Определение положения равновесия системы.** Исследуем равновесные состояния инерционной массы. В силу гармоничности тока возбуждения  $i_1$  магнитная сила, действующая на ИМ, также гармонична, что приводит к установившемуся колебательно-му процессу ИМ относительно некоторого положения  $\xi_0$ . Для этого перепишем выражение (2.10) для переменной силы тока  $j_2 = j_{20}(\tau)$ , соответствующей постоянному значению  $\xi = \xi_0$  ( $\xi'_0 = 0, \xi''_0 = 0$ ):

$$\begin{aligned} lj_{20} + rj_{20} &= -\frac{m_{12}(\xi_0)}{2} e^{i\tau} + \text{к.с.} \\ \frac{i\alpha}{2} \frac{dm_{12}(\xi_0)}{d\xi} j_{20} e^{i\tau} + \frac{1}{2} + \text{к.с.} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

где к.с. – комплексное сопряжение выражения.

Разрешая первое выражение системы (3.1), установившееся периодическое решение для тока  $j_{20}$  записывается в форме

$$j_{20} = \frac{im_{12}(\xi_0)}{2\sqrt{l^2 + r^2}} e^{i(\tau + \phi)} + \text{к.с.} \quad (3.2)$$

где  $i^2 = -1$  – обозначение мнимой единицы,

$$\cos \phi = \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}}, \quad \sin \phi = \frac{r}{\sqrt{l^2 + r^2}} \quad (3.3)$$

Подставляя выражение (3.2) во второе уравнение системы (3.1) и интегрируя по периоду пондеромоторной силы  $\tau \in [0, \pi]$ , мы получаем выражение для нахождения среднего за период значения положения равновесия  $\xi_0$ :

$$f(\xi_0) = -\left( \frac{dm_{12}(\xi_0)}{d\xi} m_{12}(\xi_0) + \frac{2(l^2 + r^2)}{\alpha l} \right) = 0 \quad (3.4)$$

Устойчивость найденного положения равновесия  $\xi_0$ , задаваемого выражением (3.4), определяется характером экстремума функции Дирихле–Лагранжа  $F = -\int f(\xi) d\xi = W - \Pi$ , вычисленной в положении равновесия  $\xi_0$ , [6]:

$$\frac{df(\xi_0)}{d\xi_0} < 0 \quad (3.5)$$

Подставляя выражение (3.4) в выражение (3.5), условие на устойчивость положения равновесия  $\xi_0$  примет следующий вид

$$m_{12}^{\xi\xi}(\xi_0) m_{12}(\xi_0) + \left( m_{12}^{\xi}(\xi_0) \right)^2 > 0 \quad (3.6)$$

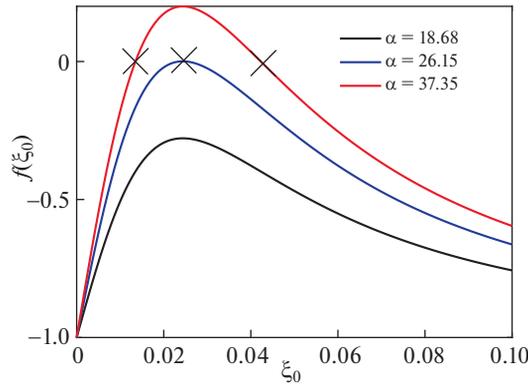


Рис. 2. График функции  $f(\xi_0)$  при  $\alpha = 18.68, 26.15, 37.35$ ;  $r = 22 \times 10^{-6}$ ,  $l = 0.022$ ,  $a = 0.94$ ,  $\beta = 0.0059$ . Крестики – обозначение решения  $f(\xi_0) = 0$ .

Видно, что устойчивость положения равновесия  $\xi_0$  зависит только от геометрических и физических параметров системы и в явном виде не зависит от параметров питающего тока.

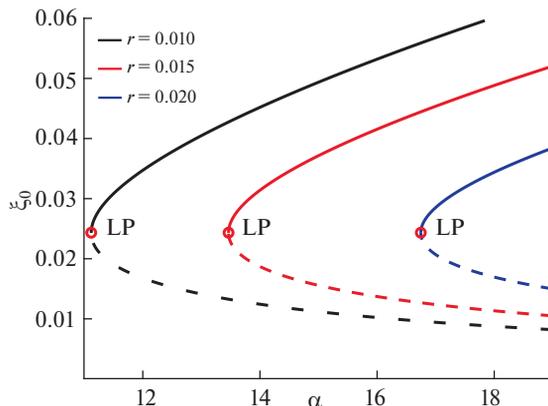
Выражение (3.4) является трансцендентным уравнением относительно положения равновесия  $\xi_0$ , которое отвечает случаю равенства сил Ампера и тяжести ИМ. На рис. 2 представлен график нормированной функции  $f(\xi_0)$  относительно ее максимального значения при различных параметрах  $\alpha$ .

Из рис. 2 видно, что решением уравнения (3.4) являются два положения равновесия  $\xi_0$ , устойчивость которых определяется выражением (3.6). При изменении параметров системы возможно наблюдение состояния системы, при котором два положения равновесия сливаются в одно, то есть возникает седлоузловая бифуркация [24]. При этом в системе существует единственное полуустойчивое положение равновесия. Для качественного исследования эволюции системы при изменении ее параметров используется программный пакет MatCont [25]. На рис. 3, 4 приведены зависимости положения равновесия  $\xi_0$  от параметров  $\alpha$  и  $r$ , варьирование которых соответствует изменению амплитуды  $i_a$  и частоты  $\omega$  тока генератора  $i_1$  согласно выражениям (2.9) (при фиксированных остальных параметрах системы). Сплошным линиям соответствует устойчивое положение равновесия, пунктирным – неустойчивое.

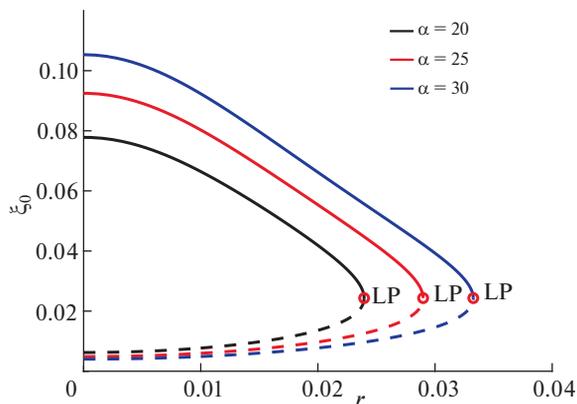
Из рис. 3, 4 видно, что седлоузловая бифуркация соответствует граничному значению варьируемого параметра и определяет таким образом область существования положений равновесия [24]. Для дальнейшего исследования бифуркации, которой соответствует пара параметров  $(\alpha^*, r^*)$ , продолжим рассматриваемое положение равновесия по одному из активных параметров ( $\alpha$  или  $r$ ) [25]. Для определения области существования устойчивого положения равновесия на плоскости параметров  $(\alpha, r)$  осуществим продолжение по параметру точки бифуркации. Для продолжения подойдет точка слияния устойчивого и неустойчивого равновесий. Именно эта точка продолжается над плоскостью  $(\alpha, r)$  и дает границу области существования устойчивых равновесий.

На рис. 5 изображены области устойчивого и неустойчивого движения в пространстве параметров  $\alpha - r$ .

Из рис. 5 видно, что в рассматриваемой системе существует набор параметров, отвечающий случаю полуустойчивого движения ИМ. Согласно условию (3.6) видно, что



**Рис. 3.** Эволюция положений равновесий  $\xi_0$  от параметра  $\alpha$  при  $r = 0.01; 0.015; 0.02$ ,  $l = 0.022$ ,  $a = 0.94$ ,  $\beta = 0.0059$ ; красные кружки – обозначение седлоузловой бифуркации (LP) при соответствующих параметрах системы [25].



**Рис. 4.** Эволюция положений равновесий  $\xi_0$  от параметра  $r$  при  $\alpha = 20; 25; 30$ ,  $l = 0.022$ ,  $a = 0.94$ ,  $\beta = 0.0059$ ; красные кружки – обозначение седлоузловой бифуркации (LP) при соответствующих параметрах системы [25].

случаю существования устойчивого равновесия соответствует область параметров, находящаяся выше линии, полученной путем численного продолжения бифуркационного состояния системы [25]. Таким образом, при фиксированном параметре  $r$  имеется возможность через уменьшение амплитуды питающего тока (уменьшение параметра  $\alpha$ ) зайти в область неустойчивости, что означает следующее: в устойчивой зоне колебаний ИМ располагаются два положения равновесия (см. рис. 3, 4), на границе устойчивости два положения равновесия сливаются в одно, при попадании в зону неустойчивости положений равновесия не наблюдается. Иными словами, в рассматриваемой системе существуют области параметров, при которых положения равновесия отсутствуют, что физически связано с недостаточной амплитудой тока питания ка-

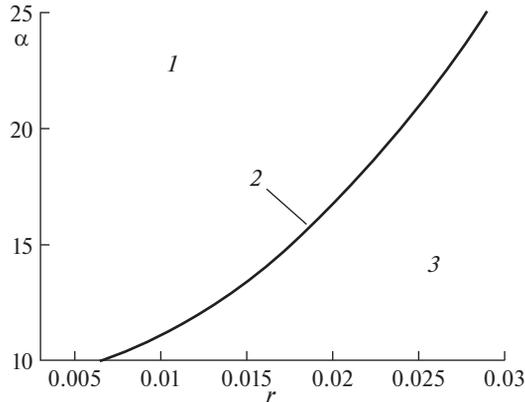


Рис. 5. Область устойчивости движений ИМ в координатах  $\alpha - r$ ; 1, 3 – области устойчивости и неустойчивости соответственно, 2 – граница устойчивости.

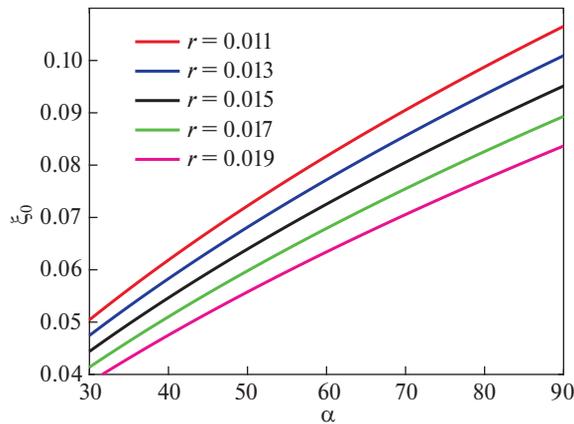
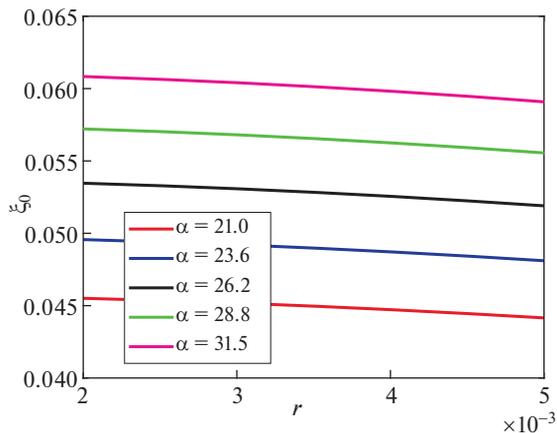


Рис. 6. Зависимость положения равновесия  $\xi_0$  от параметра  $\alpha$  при  $r = 11 \times 10^{-3}$ ;  $13 \times 10^{-3}$ ;  $15 \times 10^{-3}$ ;  $17 \times 10^{-3}$ ;  $19 \times 10^{-3}$  для системы после усреднения.

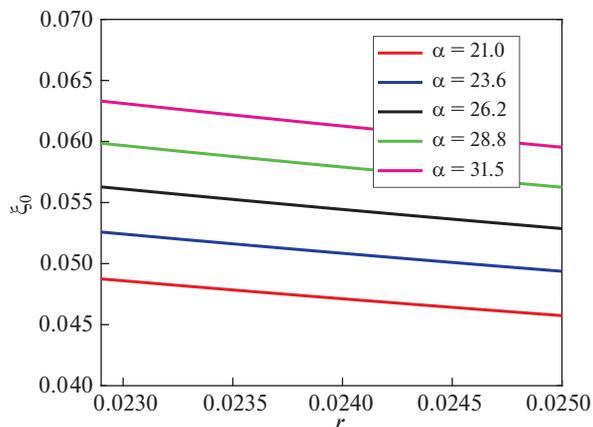
тушки  $i_a$  (сила тяжести преобладает над силой Ампера) или же малой частотой  $\omega$  (малая энергия низкочастотного воздействия между током катушки и наведенными токам в ИМ).

На рис. 6–9 изображены зависимости величины устойчивого положения равновесия  $\xi_0$  от физических параметров системы.

Из рис. 6–9 видно, что при увеличении параметра  $\alpha$ , что соответствует случаю увеличения тока  $i_a$ , величина  $\xi_0$  растет, что связано с увеличением электромагнитной силы, действующей на кольцо. При увеличении параметра  $r$ , что соответствует случаю уменьшения частоты  $\omega$ , положение равновесия  $\xi_0$  принимает меньшие значения, что вызвано увеличением реактивного сопротивления системы. При увеличении параметра  $l$  положение равновесия также принимает меньшие значения, что обозначает уменьшение числа витков катушки индуктивности  $i$ , следовательно, уменьшение плотности магнитного потока, пронизывающего ИМ.



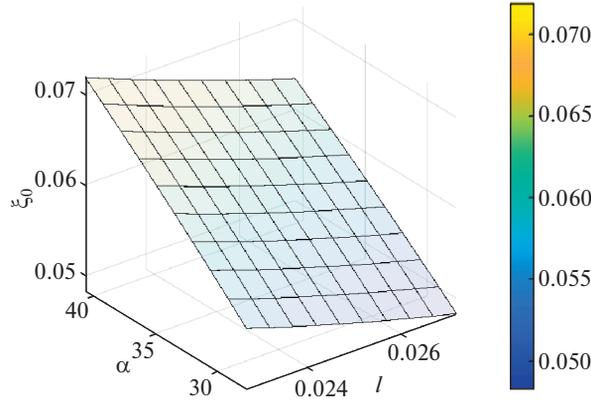
**Рис. 7.** Зависимость положения равновесия  $\xi_0$  от параметра  $r$  при  $\alpha = 21; 23.6; 26.2; 28.8; 31.5$  для системы после усреднения.



**Рис. 8.** Зависимость положения равновесия  $\xi_0$  от величины  $1/r$  при  $\alpha = 21; 23.6; 26.2; 28.8; 31.5$  для системы после усреднения.

**4. Исследование нелинейной динамики ИМ.** Для нахождения равномерно пригодного асимптотического решения системы (2.10) применим метод многих масштабов [23] и представим искомые функции в виде следующих разложений по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
 \xi(T_0, T_1, T_2, \varepsilon) &= \xi_0 + \varepsilon \xi_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \xi_2(T_0, T_1, T_2) \\
 j_2(T_0, T_1, T_2, \varepsilon) &= j_{20}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon j_{21}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 j_{22}(T_0, T_1, T_2) \\
 m_{12}(\xi) &= m_{12}(\xi_0) + \frac{dm_{12}(\xi_0)}{d\xi}(\xi - \xi_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 m_{12}(\xi_0)}{d\xi^2}(\xi - \xi_0)^2
 \end{aligned} \tag{4.1}$$



**Рис. 9.** Зависимость положения равновесия  $\xi_0$  от величин  $l$  и  $\alpha$  при  $r = 22 \times 10^{-6}$  для системы после усреднения.

$$\frac{dm_{12}(\xi)}{d\xi} = \frac{dm_{12}(\xi_0)}{d\xi} + \frac{d^2m_{12}(\xi_0)}{d\xi^2}(\xi - \xi_0) + \frac{1}{2} \frac{d^3m_{12}(\xi_0)}{d\xi^3}(\xi - \xi_0)^2$$

где  $T_0 = \tau$ ,  $T_1 = \varepsilon\tau$ ,  $T_2 = \varepsilon^2\tau$ ,  $D_n = \partial/\partial T_n$ . Далее принимается, что диссипация механической энергии мала, что позволяет перенормировать коэффициент  $\lambda$ :  $\lambda \rightarrow \varepsilon\lambda$ .

Подставляя уравнение (4.1) в уравнения (2.10) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем

$\varepsilon^0$

$$lD_0j_{20} + rj_{20} = -\frac{m_{12}(\xi_0)}{2}e^{iT_0} + \text{к.с.} \quad (4.2a)$$

$$D_0^2\xi_0 = 0 \quad (4.2b)$$

$\varepsilon$

$$lD_0j_{21} + rj_{21} = \frac{1}{2}m_{12}^{\xi}(\xi_0)(iD_0\xi_1 + D_1\xi_0 - \xi_1)e^{iT_0} + \text{к.с.} \quad (4.3a)$$

$$D_0^2\xi_1 = -\frac{i}{2}\alpha m_{12}^{\xi}(\xi_0)j_{20}e^{iT_0} - \frac{1}{2} + \text{к.с.} \quad (4.3b)$$

$\varepsilon^2$

$$lD_0j_{22} + rj_{22} = -\frac{1}{2}(m_{12}^{\xi\xi}(\xi_0)[\xi_2 - iD_0\xi_2] + m_{12}^{\xi\xi}(\xi_0)[\xi_1^2 - 2i\xi_1D_0\xi_1])e^{iT_0} + \text{к.с.} \quad (4.4a)$$

$$D_0^2\xi_2 = -\lambda D_0\xi_1 - \frac{i\alpha}{2}(m_{12}^{\xi}(\xi_0)j_{21} + m_{12}^{\xi\xi}(\xi_0)j_{20}\xi_1)e^{iT_0} + \text{к.с.} \quad (4.4b)$$

где количество верхних индексов  $\xi$  обозначает порядок производной по переменной  $\xi$ .

Частное решение уравнения (4.2) при нулевой степени  $\varepsilon$  запишется как

$$j_{20} = \frac{im_{12}(\xi_0)}{2\sqrt{r^2 + l^2}}e^{i(T_0 + \phi)} + \text{к.с.} \quad (4.5)$$

где  $\xi_0$  – постоянная величина.

Подставляя уравнение (4.5) в уравнение (4.3b), получаем

$$\xi_1 = - \left( 1 + \frac{dm_{12}(\xi_0)}{d\xi} m_{12}(\xi_0) \frac{\alpha e^{i\phi}}{2\sqrt{l^2 + r^2}} \right) \frac{T_0^2}{4} - \frac{dm_{12}(\xi_0)}{d\xi} m_{12}(\xi_0) \frac{\alpha e^{i(\phi+2T_0)}}{16\sqrt{l^2 + r^2}} + \text{к.с.} \quad (4.6)$$

Из уравнения (4.6) видно, что в его правой части присутствует член, зависящий от квадрата времени  $T_0^2$ , что приводит к неограниченно возрастающему решению для величины  $\xi_1$ . Данное обстоятельство нарушает равномерную пригодность найденного решения, и для устранения этого вводится условие разрешимости [23] для уравнения (4.6), которое заключается в обнулении коэффициента при величине  $T_0^2$ . Используя определение величины  $\phi$  (3.3) и приводя подобные, условие на отсутствие секулярного слагаемого в уравнении (4.6) запишется как

$$\frac{dm_{12}(\xi_0)}{d\xi} m_{12}(\xi_0) = - \frac{2(l^2 + r^2)}{\alpha l} \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) полностью совпадает с уравнением (3.4) и определяет положение равновесия  $\xi_0$ . Решением трансцендентного уравнения (4.7) является постоянное перемещение  $\xi_0$ , которое определяет нетривиальное положение равновесия ИМ.

Подставляя (4.7) в (4.6), запишем  $\xi_1$  как

$$\xi_1 = \frac{e^{i(2T_0+\phi)}}{8 \cos \phi} + \text{к.с.} \quad (4.8)$$

и перепишем уравнение для тока  $j_{21}$  (4.3a) в форме

$$lD_0 j_{21} + r j_{21} = \frac{1}{8 \cos \phi} m_{12}^{\xi}(\xi_0) (e^{i(T_0+\phi)} - 3e^{i(3T_0+\phi)}) + \text{к.с.} \quad (4.9)$$

Решение уравнения (4.9)  $j_{21}$  имеет вид

$$j_{21} = \left( \frac{Y_1}{2} - \frac{iY_2}{2} \right) e^{i(T_0+\phi)} + \left( \frac{Y_3}{2} - \frac{iY_4}{2} \right) e^{i(3T_0+\phi)} + \text{к.с.} \quad (4.10)$$

где

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{m_{12}^{\xi}(\xi_0)}{8 \sin \phi} \frac{r(9l^2 + r^2)}{(9l^4 + 10l^2 r^2 + r^4)}, & Y_2 &= \frac{m_{12}^{\xi}(\xi_0)}{8 \sin \phi} \frac{l(9l^2 + r^2)}{(9l^4 + 10l^2 r^2 + r^4)} \\ Y_3 &= -\frac{m_{12}^{\xi}(\xi_0)}{8 \cos \phi} \frac{3r(l^2 + r^2)}{(9l^4 + 10l^2 r^2 + r^4)}, & Y_4 &= -\frac{m_{12}^{\xi}(\xi_0)}{8 \cos \phi} \frac{9l(l^2 + r^2)}{(9l^4 + 10l^2 r^2 + r^4)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Наконец, подставляя (4.11) в (4.4b) и интегрируя полученное уравнение, получаем выражение для переменной  $\xi_2$ :

$$\xi_2 = B_1 T_0^2 + B_2 \quad (4.12)$$

где

$$B_1 = \frac{\alpha(m_{12}^{\xi\xi}(\xi_0)m_{12}(\xi_0)(l^2 + r^2) + (m_{12}^{\xi}(\xi_0))^2(l^2 - r^2))}{32l(l^2 + r^2)} \quad (4.13)$$

$B_2$  – несекулярный член [23].

Из уравнения (4.12) по аналогии с (4.6) следует, что значение  $B_1$  должно тождественно равняться нулю [23], откуда выводится следующее условие на отсутствие секулярного члена в уравнении (4.12):

$$m_{12}^{\xi\xi}(\xi_0)m_{12}(\xi_0) + (m_{12}^{\xi}(\xi_0))^2 \cos 2\phi = 0 \quad (4.14)$$

Данный результат может быть объяснен следующим образом: на начальном этапе асимптотической процедуры постулировалось, что первое приближение для величины  $\xi$  не зависит от более медленных времен  $T_1, T_2$ , что также могло привести к указанным особенностям полученных результатов.

Таким образом, асимптотическое разложение колебаний левитирующей массы для величин  $\xi, j_2$  запишется как:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \frac{\varepsilon}{4 \cos \phi} \cos(2T_0 + \phi) + \dots \\ j_2 &= -\frac{m_{12}(\xi_0)}{\sqrt{r^2 + l^2}} \sin(T_0 + \phi) + \dots \end{aligned} \quad (4.15)$$

Далее рассмотрен вопрос об оценке линейной жесткости магнитного подвеса.

$$\frac{\xi}{\xi_0} \ll 1 \quad (4.16)$$

В силу (4.16) функция взаимной индуктивности  $m_{12}(\xi)$  может быть разложена в ряд Тейлора вблизи точки  $\xi_0$ . Подставляя два последних выражения (4.1) во второе уравнение системы (2.10) с учетом выражения (3.2), линейная часть дифференциального уравнения смещения ИМ  $\xi_{lin}$  вблизи положения равновесия  $\xi_0$  записывается как:

$$\xi_{lin}'' + \lambda \xi_{lin}' + c_m \xi_{lin} = F_{\xi_{lin}} \quad (4.17)$$

где

$$c_m = \frac{\alpha \varepsilon}{l} (m_{12}^{\xi}(\xi_0))^2 \cos \phi \sin(\tau + \phi) \sin \tau \quad (4.18)$$

где  $F_{\xi_{lin}}$  – обобщенная сила, действующая на ИМ и включающая в себя нелинейные члены относительно  $\xi_{lin}$ .

Из уравнения (4.18) видно, что магнитная жесткость  $c_m$  имеет периодический характер и, в общем случае, знакопеременность, что означает колебательный режим левитации ИМ вблизи среднего положения равновесия.

Для более детального исследования зависимости жесткости  $c_m$  от параметров системы рассмотрим среднее значение жесткости  $\langle c_m \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} c_m(\tau) d\tau$ :

$$\langle c_m \rangle = \frac{\alpha \varepsilon l}{2(l^2 + r^2)} [m_{12}^{\xi\xi}(\xi_0)m_{12}(\xi_0) + (m_{12}^{\xi}(\xi_0))^2] \quad (4.19)$$

Из выражения (4.19) видно, что средняя за период магнитная жесткость всегда положительна, но неосредненная магнитная жесткость является периодической функцией, и это необходимо брать во внимание при проектировании электрической схемы компенсации жесткости  $c_m$ .

**5. Числовой пример.** Далее приведено сравнение аналитических результатов динамики ИМ вблизи положения равновесия  $\xi_0$  с данными численного расчета, проведенного в программном комплексе Matlab (исследуемая система интегрировалась с использованием встроенной функции ode45 при заданных начальных условиях  $[\xi, \xi', j_2]_{t=0} = [0.053, 0, 0]$  [26]). Согласно работам [6], [27] приняты следующие физические и геометрические свойства магнитного подвеса:  $r_{pm} = 250$  мкм,  $t_{pm} = 10$  мкм,  $\rho = 19300$  кг/м<sup>3</sup>,

**Таблица 1.** Сравнение высот положения равновесия ИМ

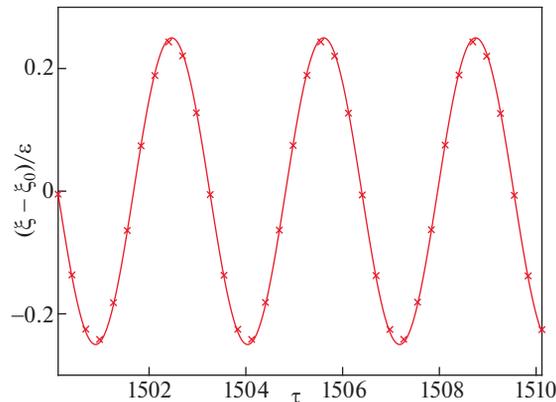
Аналитическая формула (2.9), мкм	Численный результат, мкм
26.185	26.194

$L_2 = 1.25$  нГн,  $r_c = 265$  мкм,  $t_c = 88$  мкм,  $w = 12$ ,  $L_1 = 56.5$  нГн,  $i_a = 0.35$  А,  $\omega = 6.28$  Мрад/с. Безразмерные величины, определяемые выражениями (2.9), равняются:  $a = 0.94$ ,  $l = 0.022$ ,  $r = 0.0022$ ,  $\alpha = 35.28$ ,  $\beta = 0.006$ ,  $\varepsilon = 4.7 \times 10^{-12}$ ,  $\lambda = 2 \times 10^{-12}$ ,  $\omega = 6.28$  Мрад/с. В табл. 1 приведено сравнение величин положений равновесия  $\xi_0$ . Из нее видно, что нахождение среднего положения с достаточной степенью точности совпадает с численными результатами. Относительная ошибка при этом составляет порядка 0.03%, что связано с возможными погрешностями численного определения положения равновесия.

Далее на рис. 10 приведен график установившегося процесса колебаний ИМ в случае численного расчета и аналитических выражений (2.10), (4.15).

Из рис. 10 видно, что аналитические выражения в достаточной степени совпадают с прямыми численными результатами, что говорит о корректности применения асимптотической методики анализа нелинейной динамики ИМ под действием электромагнитных сил. Видно, что в системе присутствуют колебания вблизи положения равновесия  $\xi_0$ , но их амплитуда имеет порядок  $\varepsilon$ , что является достаточно малой величиной по отношению к  $\xi_0$ .

**6. Выводы.** В представленной работе был рассмотрен электромагнитный неконтактный подвес, запитываемый переменным электрическим током. Получены выражения для нахождения положения равновесия дископодобной левитирующей массы. Оценена магнитная жесткость системы и показано, что она имеет вид периодической функции. С помощью методов теории бифуркаций получены области в пространстве параметров, отвечающие устойчивым и неустойчивым движениям системы. Исследованы особенности применения асимптотического метода многих масштабов к анализу нелинейной динамики рассматриваемого класса электромеханических систем с малой переменной жесткостью подвеса. Предметом дальнейших исследований является распространение предложенного подхода на анализ нелинейной динамики простран-



**Рис. 10.** График зависимости безразмерного перемещения ИМ  $\xi$  от безразмерного времени  $\tau$  в случае прямого численного счета (красные крестики) и аналитических формул (2.10), (4.15) (красная сплошная линия).

ственных движений проводящих твердых тел в неконтактных индукционных подвесах.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10009, <https://rscf.ru/project/21-71-10009/>

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Post R.F., Ryutov D.D.* The Inductrack: A simpler approach to magnetic levitation // IEEE Trans. Appl. Supercond. 2000. V. 10. № 1. P. 901–904.  
<https://doi.org/10.1109/77.828377>
2. *Kordyuk A.A.* Magnetic levitation for hard superconductors // J. Appl. Phys. 1998. V. 83. № 1. P. 610–612.  
<https://doi.org/10.1063/1.366648>
3. *Крюков О.В.* Преимущества электромагнитного подвеса приводных электродвигателей газоперекачивающих агрегатов // Главный энергетик. 2015. Т. 5–6. № 9. С. 16–23.
4. *Han H., Kim D.* Magnetic levitation. Springer. 2016.  
<https://doi.org/10.1007/978-94-017-7524-3>
5. *Maxwell J.* Electricity and magnetism. Dover New York. 1954. V. 2.
6. *Poletkin K.V., Chernomorsky A.I., Shearwood C.* Proposal for micromachined accelerometer, based on a contactless suspension with zero spring constant // IEEE Sens. J. 2012. V. 12. № 7. P. 2407–2413.  
<https://doi.org/10.1109/JSEN.2012.2188831>
7. *Poletkin K.V., Asadollahbaik A., Kampmann R., Korvink J.* Levitating micro-actuators: A review // Actuators. 2018. V. 7. № 2. P. 17.  
<https://doi.org/10.3390/act7020017>
8. *Lu Z., Poletkin K., den Hartogh B. et al.* 3D micro-machined inductive contactless suspension: Testing and modeling // Sens. Actuator A Phys. 2014. V. 220. P. 134–143.  
<https://doi.org/10.1016/j.sna.2014.09.017>
9. *Poletkin K., Lu Z., Wallrabe U., Badilita V.* A new hybrid micromachined contactless suspension with linear and angular positioning and adjustable dynamics // J. Microelectromechanical Syst. 2015. V. 24. № 5. P. 1248–1250.  
<https://doi.org/10.1109/JMEMS.2015.2469211>
10. *Poletkin K., Lu Z., Wallrabe U. et al.* Stable dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions // Int. J. Mech. Sci. 2017. V. 131–132. P. 753–766.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.08.016>
11. *Poletkin K.* On the static pull-in of tilting actuation in electromagnetically levitating hybrid micro-actuator: Theory and experiment // Actuators. 2021. V. 10. № 10. P. 256.  
<https://doi.org/10.3390/act10100256>
12. *Poletkin K.V.* Static pull-In behavior of hybrid levitation microactuators: Simulation, modeling, and experimental study // IEEE/ASME Trans. Mechatron. 2021. V. 26. № 2. P. 753–764.  
<https://doi.org/10.1109/TMECH.2020.2999516>
13. *van de Vegte J.* Feedback control systems // Automatica. 1996. V. 6. № 32. P. 945–946.
14. *Poletkin K.V., Shalati R., Korvink J.G., Badilita V.* Pull-in actuation in hybrid micromachined contactless suspension // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. V. 1052. P. 012035.  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1052/1/012035>
15. *Poletkin K.V., Lu Z., Wallrabe U. et al.* A qualitative technique to study stability and dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions // 2017 19th International Conference on Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems (TRANSDUCERS). 2017. P. 528–531.  
<https://doi.org/10.1109/TRANSDUCERS.2017.7994102>
16. *Poletkin K.V.* Calculation of magnetic force and torque between two arbitrarily oriented circular – laments using Kalantarov–Zeitlin’s method // Int. J. Mech. Sci. 2022. V. 220. P. 107159.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107159>
17. *Poletkin K.* Levitation micro-systems: Applications to sensors and actuators. Springer Nature. 2020.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-58908-0>
18. *Rosa E., Grover F.* Formulas and tables for the calculation of mutual and self-inductance. No. 169. US Government Printing Office. 1948.

19. *Poletkin K.V., Korvink J.G.* Modeling a pull-in instability in micro-machined hybrid contactless suspension // *Actuators*. 2018. V. 7. № 1. P. 11.  
<https://doi.org/10.3390/act7010011>
20. *Lu Z., Poletkin K., Wallrabe U., Badilita V.* Performance characterization of micromachined inductive suspensions based on 3D wire-bonded microcoils // *Micromachines*. 2014. V. 5. № 4. P. 1469–1484.  
<https://doi.org/10.3390/mi5041469>
21. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Физматлит. 2003.
22. *Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А.* Расчет индуктивностей. Справочная книга. Л.: Энергоатомиздат. 1986.
23. *Nayfeh A.H.* Perturbation methods. John Wiley & Sons. 2008.  
<https://doi.org/10.1002/9783527617609>
24. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of applied bifurcation theory. Springer-Verlag. 1998.  
<https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3978-7>
25. *Dhooge A., Govaerts W., Kuznetsov Yu.A.* MATCONT: A MATLAB Package for numerical bifurcation analysis of ODEs // *ACM Trans. Math. Softw.* 2003. V. 29. № 2. P. 141–164.  
<https://doi.org/10.1145/779359.779362>
26. *Higham D., Higham N.* MATLAB Guide. Third edition. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2017. P. 500. ISBN: 978-1-61197-465-2.
27. *Williams C.B., Shearwood C., Mellor P.H., Yates R.B.* Modelling and testing of a frictionless levitated micromotor // *Sens. Actuator A Phys.* 1997. V. 61. № 1. P. 469–473.  
[https://doi.org/10.1016/S0924-4247\(97\)80307-X](https://doi.org/10.1016/S0924-4247(97)80307-X)