

УДК 539.374

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ АДГЕЗИОННЫХ СЛОЕВ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ

© 2023 г. В. В. Глаголев<sup>a,\*</sup>, А. А. Маркин<sup>a,\*\*</sup>

<sup>a</sup>Тулский государственный университет, Тула, Россия

\* e-mail: vadim@tsu.tula.ru

\*\* e-mail: markin-nikram@yandex.ru

Поступила в редакцию 17.01.2023 г.

После доработки 30.01.2023 г.

Принята к публикации 02.02.2023 г.

Рассматривается состояние предразрушения тонкого адгезионного слоя конечной толщины в окрестности трещиноподобного дефекта. Предлагается учитывать гидростатическое давление, формирующее энергию деформации объема, для нахождения критического состояния. Критическое значение  $J$ -интеграла для моды нагружения I+II предполагается зависимым от произведения энергии деформации объема и толщины слоя в торце адгезива. Предельное значение произведения энергии объема и толщины слоя при нагружении по моде I, а также критические значения  $J$ -интеграла для мод нагружения I и II определяют величину параметра разрыхления конкретно-го адгезива в предлагаемом критерии разрушения.

*Ключевые слова:* линейный параметр, энергетическое произведение, энергия деформации объема,  $J$ -интеграл, метод конечных элементов

DOI: 10.31857/S0572329923600019, EDN: KPBBKN

**Введение.** В силу того, что критические значения  $J$ -интегралов для адгезионных слоев при модах I и II существенно отличаются [1, 2], рассмотрим возможное влияние гидростатического давления на предел прочности трещиноподобных дефектов в адгезионных слоях при моде нагружения I+II. Принимаем, что напряженное состояние адгезионного слоя регулярно и определяется конечными значениями тензора напряжений в рамках модели “слоя взаимодействия” [3]. В этом случае поток упругой энергии в вершину трещиноподобного дефекта определяется  $J$ -интегралом, который представим в виде энергетического произведения ( $\mathcal{E}\Pi$ ) равному произведению удельной свободной энергии и толщины слоя  $\delta_0$  [4]. В силу конечных значений тензора напряжений при любых конечных значениях линейного параметра  $\delta_0$  возможно выделение энергии деформации формы и энергии деформации объема, определяемой через гидростатическое давление. При чистом сдвиге адгезионного слоя критическое значение  $J$ -интеграла определяет поток упругой энергии нагружения по моде II.

**1. Формулировка критерия.** Предельное состояние трещиноподобного дефекта в линейно упругом теле связывается концепцией  $J$ -интеграла с потоком упругой энергии в вершину трещины [5–7]. Для трещины в виде математического разреза поток упругой энергии  $G$  в случае смешанной моды нагружения I+II определяется через квадрат коэффициента интенсивности напряжений  $K^2 = K_I^2 + K_{II}^2$  [6, 7]:

**Таблица 1.** Механические свойства адгезивов

Механические свойства	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
$E$ (GPa)	4.9	1.85	0.49
$\nu$	0.35	0.33	0.3
$G_{IC}$ (N/m)	200	430	2360
$G_{IIC}$ (N/m)	380	4700	5410

$$G = \alpha \frac{K^2}{E} = \alpha(G_I + G_{II}) \quad (1.1)$$

где  $\alpha = 1$  для плоского напряженного состояния;  $\alpha = 1 - \nu^2$  для состояния плоской деформации;  $E$  – модуль упругости тела;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $K_I$  – коэффициент интенсивности напряжений для нагружения по моде I;  $K_{II}$  – коэффициент интенсивности напряжений для нагружения по моде II. Критическое значение потока энергии  $G_C$  определяет предельное состояние трещины. Экспериментальное подтверждение критерия в виде (1.1) для однородных тел является проблематичным в силу неустойчивости трещины моды II и отсутствия режима ее устойчивого подрастания.

Отметим, что аппарат линейной механики разрушения применяется для расчетов прочности адгезионных слоев композитов [1, 2]. В силу того, что механические свойства адгезивов могут существенно отличаться от свойств сопрягаемых ими тел, возможно обеспечить устойчивое подрастание трещины моды II и определить соответствующий критический поток упругой энергии  $G_{IIC}$  [8]. Согласно данным работ [1, 2] приведем в табл. 1 механические свойства ряда адгезивов.

Из табл. 1 видим, что критериальная характеристика в виде (1.1) не является корректной в силу существенного различия двух предельных значений  $G_{IC}$  и  $G_{IIC}$ . В работе [9] предложено рассматривать в качестве критерия следующую взаимосвязь между потоками упругой энергии:

$$\left(\frac{G_I}{G_{IC}}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIC}}\right)^{\alpha_2} = 1 \quad (1.2)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  – постоянные материала.

Постоянные  $\alpha_1, \alpha_2$ , следуя работе [10], полагаются равными:  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Для нахождения постоянной  $\alpha_1$  строится набор кривых при различных значениях  $\alpha_1$  и проводится сравнение с тестируемым материалом [2, 10, 11]. В случае рассмотрения двух постоянных в критерии (1.2) их нахождение не очевидно.

Рассмотрим альтернативный подход к критериям (1.1), (1.2). Положим, что процесс разрушения локализуется в адгезиве с регулярным распределением напряженно-деформированного состояния по его толщине  $\delta_0$ . В случае обратимого деформирования значение J-интеграла равно потоку упругой энергии в вершину трещиноподобного дефекта и принимает вид [4]:

$$G = \delta_0 \phi \quad (1.3)$$

где  $\phi$  – изменение удельной свободной энергии на торце адгезионного слоя;  $\delta_0 \phi$  – энергетическое произведение.

Представим приращение удельной свободной энергии в виде суммы инвариантных слагаемых [12]:

$$\varphi = (3(1 - 2\nu)\sigma^2 + (1 + \nu)\tau^2)/(2E) = \varphi^\sigma + \varphi^\tau \quad (1.4)$$

где  $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$  – гидростатическое давление;  $\tau^2 = \tilde{\sigma} \cdot \tilde{\sigma}$  – свертка девиаторных составляющих тензора напряжений;  $\varphi^\sigma$  – изменение свободной энергии деформации объема;  $\varphi^\tau$  – изменение свободной энергии деформации формы.

Таким образом энергетическое произведение (1.3) представимо в виде суммы энергетических произведений энергии деформации объема  $\delta_0\varphi^\sigma$  и энергии деформации формы  $\delta_0\varphi^\tau$ .

В силу того, что в окрестности трещиноподобного дефекта при нагружении по моде I реализуется высокое положительное гидростатическое давление, а при нагружении по моде II гидростатическое давление равно нулю, считаем, что гидростатическое давление является причиной существенного различия в критических значениях J-интеграла при нагружении адгезионного слоя по моде I и моде II. Положительное гидростатическое давление способствует “разрыхлению” адгезива и уменьшает его прочностные свойства. С другой стороны, гидростатическое сжатие материального объема не должно приводить к его разрушению.

С учетом (1.3), (1.4) критерий разрушения сформулируем в следующем виде:

$$\delta_0((1 + \text{sign}(\sigma)\beta)\varphi^\sigma + \varphi^\tau) = G_{\text{IIС}} \quad (1.5)$$

где  $\beta$  – параметр, характеризующий “разрыхление” адгезива.

В критическом состоянии моды II, когда  $\varphi_{\text{IIС}}^\sigma = 0$  из (1.5) приходим к тождеству:  $\delta_0\varphi_{\text{IIС}}^\tau = G_{\text{IIС}}$ .

В силу того, что в критическом состоянии моды I  $\delta_0(\varphi_{\text{IС}}^\sigma + \varphi_{\text{IС}}^\tau) = G_{\text{IС}}$  из (1.5) и последнего равенства получаем представление параметра в виде

$$\beta = \frac{G_{\text{IIС}} - G_{\text{IС}}}{\delta_0\varphi_{\text{IС}}^\sigma} \quad (1.6)$$

Из данной формулы следует, что при известных критических значениях  $G_{\text{IС}}$  и  $G_{\text{IIС}}$  параметр  $\beta$  определяется критическим для данной моды I значением  $\varphi_{\text{IС}}^\sigma$  и толщиной слоя.

**2. Определение параметра адгезива.** Рассмотрим нахождение параметра  $\beta$  для адгезионных слоев, представленных в табл. 1. В этом случае необходимо определить напряженное состояние в вершине адгезионного слоя при его нормальном разрыве для малой, но конечной толщины  $\delta_0$ .

На рис. 1 представлена схема нагружения слоистого композита длиной  $l + a$ , состоящего из трех тел. Тела 1 и 2 с одинаковыми толщинами  $h$  и механическими свойствами связаны адгезионным слоем 3 толщиной  $\delta_0$  с отличными от сопрягаемых им тел свойствами. Правый торец образца жестко закреплен от горизонтальных перемещений, на левых торцах тел действует симметричная распределенная нагрузка  $P$ . Вся остальная поверхность образца свободна от внешней нагрузки. Данная схема определяет стандартный для эксперимента ДКБ-образец и используется для нахождения прочностной характеристики – критического потока упругой энергии или  $J_c$ -интеграла согласно схеме податливости Ирвина [1].

Вариационные уравнения равновесия системы двух тел, связанных слоем [3], в силу симметрии задачи преобразуются в вариационное уравнение для тела 1 [14]:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_l \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5 \delta_0 \int_l \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\delta} \mathbf{u} dl \quad (2.1)$$

где  $S_1$  – площадь тела 1;  $\mathbf{u}$  – векторное поле перемещений тела 1;  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензоры напряжений и деформаций;  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  – тензор средних напряжений;  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  – тензор средних деформаций слоя с соответствующими компонентами:

$$\bar{\varepsilon}_{11}(x_1) = \frac{du_1^+(x_1)}{dx_1}, \quad \bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \frac{2u_2^+(x_1)}{\delta_0} \quad (2.2)$$

$u_s^+$  – компоненты вектора перемещений верхней границы слоя;  $s = 1, 2$ ;  $L_1$  – граница приложения внешней нагрузки для тела 1;  $\cdot \cdot$  – двойное скалярное умножение;  $\cdot$  – скалярное умножение. Постулируется жесткое сцепление между границами области 3 и областями 1.

Для материала слоя взаимодействия 3 определяющие соотношения считаем справедливыми для средних компонент тензоров напряжений и деформаций. При линейно упругом деформировании слоя связь средних напряжений и деформаций определяется законом Гука:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij} = \frac{E_3}{1 + \nu_3} \left( \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} + \frac{\nu_3}{1 - 2\nu_3} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \delta_{ij} \right) \quad (2.3)$$

где  $E_3$ ,  $\nu_3$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона адгезионного слоя;  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  – объемная деформация слоя;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $i, j = 1, 2, 3$ .

Определяющие соотношения тел будем рассматривать в форме закона Гука:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \frac{E_1}{1 + \nu_1} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_1}{1 - 2\nu_1} \boldsymbol{\varepsilon} \delta_{ij} \right) \quad (2.4)$$

где  $E_1$ ,  $\nu_1$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – объемная деформация.

Уравнение (2.1) совместно со связями (2.2)–(2.4) и граничными условиями:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 0, \quad \sigma_{12} = -P; & x_1 &= -a, \quad x_2 \in [\delta_0/2; \delta_0/2 + h] \\ \sigma_{11} &= 0, \quad \sigma_{12} = 0; & x_1 &= [-a; l], \quad x_2 = \delta_0/2 + h \\ u_1 &= 0, \quad u_2 = 0; & x_1 &= l, \quad x_2 \in [\delta_0/2; \delta_0/2 + h] \\ \sigma_{11} &= 0 \quad \sigma_{12} = 0; & x_1 &= [-a; 0], \quad x_2 = \delta_0/2 \end{aligned}$$

является замкнутым, однозначно определяет поле перемещений тела и его напряженное состояние. Согласно (2.2), (2.3) находится напряженное состояние адгезионного слоя. Задача может быть решена численным методом. В работе используем метод конечных элементов (МКЭ) [15] с квадратичным распределением поля перемещений по элементу в состоянии плоской деформации. Размер грани элемента в концевой зоне адгезионного слоя соответствовал линейному параметру  $\delta_0$ .

Согласно данным работы [1] рассмотрим образец со следующими геометрическими и механическими характеристиками:  $a = 0.055$  м,  $h = 0.0127$  м,  $b = 0.025$  м,  $l = 0.245$  м,  $E_1 = 200$  ГПа,  $\nu_1 = 0.3$ , где  $b$  – толщина образца в направлении нормали к рассматриваемому сечению.

Следуя работам [16, 17] приведем выражение J-интеграла для ДКБ-образца, найденное из решения 2D задачи для модели слоя нулевой толщины:

$$J_1 = \frac{12(F/b)^2 (1 - \nu_1^2)}{h E_1} \left( \frac{a}{h} \right)^2 \left( 1 + 0.673 \frac{h}{a} \right)^2 \quad (2.5)$$

**Таблица 2.** Критические значения силы

$F_{cr}$ (N)		
Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
1078	1580	3702

**Таблица 3.** Сходимость энергетического произведения

$\delta_0$ (m)	$\delta_0 \Phi_{IC}$ (N/m)		
	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
$10^{-3}$	207	488	3105
$10^{-4}$	194	432	2541
$10^{-5}$	190	415	2330
$10^{-6}$	193	418	2295

где  $F = Pbh$  – внешняя сила.

Из (2.5) и связи  $J_{IC} = G_{IC}$  найдем значение критической силы:

$$F_{cr} = b \sqrt{\frac{G_{IC} h E_1}{12(1 - \nu_1^2)}} \left( \frac{a}{h} \left( 1 + 0.673 \frac{h}{a} \right) \right)^{-1} \quad (2.6)$$

Результаты расчетов по (2.6) с учетом данных табл. 1 и заявленных характеристик консолей поместим в табл. 2.

Полученные критические значения силы соответствуют значениям начала роста трещины в адгезиве, найденным по R-кривым, согласно работе [1]. Критическое значение распределенной внешней касательной нагрузки для граничного условия определяем в виде:  $P = F_{cr}/(bh)$ .

Результаты расчетов критического энергетического произведения для известной критической силы в случае различных толщин слоя при решении задачи (2.1)–(2.4) МКЭ поместим в табл. 3.

Сравнение результатов табл. 3 со значением  $G_{IC}$  из табл. 1, показывает, что решение МКЭ для относительно тонкого слоя с учетом осевых напряжений приводит практически к одинаковому результату (с точностью до 4%). Таким образом значение ЭП для тонких, но имеющих конечную толщину слоев, соответствует известным 2D решениям по нахождению J-интеграла для классической модели трещины в виде математического разреза.

В табл. 4 поместим результаты расчетов из определения (1.4) зависимости предельного значения энергетического произведения энергии деформации объема  $\delta_0 \Phi_{IC}^o$  от толщины слоя для  $F_{cr}$  МКЭ.

Из результатов расчетов видно, что при уменьшении толщины слоя, как и для ЭП, имеет место вычислительная сходимость характеристики  $\delta_0 \Phi_{IC}^o$ . Однако в слое нулевой толщины выделение энергетического произведения энергии формы на торце слоя не имеет смысла, а ее прямое экспериментальное определение не очевидно.

В табл. 5 поместим значения коэффициента  $\beta$  для рассмотренных адгезивов. Значения критических потоков упругой энергии  $G_{IC}$  и  $G_{IIC}$ , брались согласно данным табл. 1. Критическое значение энергетического произведения энергии деформации объема определялось согласно данным табл. 4 для  $\delta_0 = 10^{-6}$  м.

**Таблица 4.** Сходимость значения энергетического произведения энергии деформации объема

$\delta_0$ (m)	$\delta_0 \Phi_{IC}^\sigma$ (N/m)		
	Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
$10^{-3}$	148	330	1949
$10^{-4}$	135	287	1580
$10^{-5}$	130	274	1443
$10^{-6}$	132	276	1420

**Таблица 5.** Значение коэффициента  $\beta$  для адгезивов

$\beta$		
Araldite AV138	Araldite 2015	Sikaforce 7752
1.4	15.5	2.1

Отметим, что для нахождения коэффициента  $\beta$  согласно формуле (1.6) необходимы критические значения  $J$ -интеграла для нагружения адгезионного слоя по моде I и моде II. Данные характеристики могут быть получены в результате стандартных экспериментов над компактными образцами для классической модели трещины в виде математического разреза с сингулярным распределением поля напряжений. Нахождение критического значения энергетического произведения энергии объема возможно только для модели с конечным напряженным состоянием разрушаемого адгезионного слоя. В этом случае существенным будет значение коэффициента Пуассона адгезива. Так уменьшение коэффициента Пуассона для адгезива Sikaforce 7752 до нуля приведет к уменьшению энергетического произведения энергии объема с 1420 Н/м до 783 Н/м при неизменном значении  $J$ -интеграла. Таким образом коэффициент Пуассона предельно тонкого адгезионного слоя оказывает влияние на коэффициент  $\beta$ .

Нулевой коэффициент Пуассона для адгезива в рамках рассматриваемой постановки (2.1)–(2.4) приводит к аналитическому решению в рамках теории пластин Миндлина–Рейснера [18, 19] для тела I. В этом случае имеет место следующее распределение напряжений на торце тонкого адгезионного слоя [14]:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{22}|_{x_1=0} &= \frac{2(F/b)\sqrt{6(1+\nu_1)}}{\sqrt{\delta_0 h}} \sqrt{\frac{E_3}{E_1}} \left( \frac{a}{h} \sqrt{1-\nu_1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \\ \bar{\sigma}_{11}|_{x_1=0} &= \frac{12(F/b)}{5\sqrt{\delta_0 h}} \left( \frac{E_3}{E_1} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{a}{h} \sqrt{1-\nu_1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) (\sqrt{6(1+\nu_1)}^{\frac{3}{2}} - 1)\end{aligned}$$

Таким образом, в силу существенного различия в модулях упругости рассматриваемых тел:  $E_3/E_1 \approx 2.5 \times 10^{-3}$ , гидростатическое давление на торце слоя будет формировать напряжение отрыва. При этом напряженное состояние в слое может быть найдено в рамках упругих связей Прандтля [20, 21]. Энергетическое произведение энергии объема в этом случае будет равно:

$$\delta_0 \Phi_{IC}^\sigma = \frac{4(F/b)^2(1-\nu_1^2)}{hE_1} \left( \frac{a}{h} \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{5(1-\nu_1)}} \frac{h}{a} \right)^2 \quad (2.7)$$

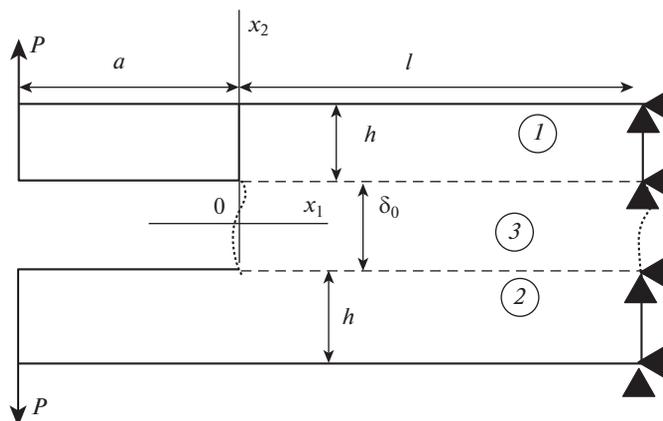


Рис. 1. Модель ДКБ-образца.

Представление (2.7) не зависит от свойств адгезива и принимает значение 744 Н/м, что на 5% отличается от расчетного значения по МКЭ для  $\delta_0 = 10^{-6}$  м.

**Заключение.** Предложена система критериев (1.4)–(1.6), отражающая влияние гидростатической составляющей напряжений на экспериментально установленное существенное различие критических значений потоков энергии через торцевую часть адгезива, ослабленного трещиноподобным дефектом, при нагружениях по моде I и моде II.

Использование данных критериев возможно для предельно тонких адгезионных слоев с регулярным распределением поля напряжений по длине слоя. Для конкретизации критерия разрушения материала адгезионного слоя необходимы критические значения J-интеграла для мод нагружения I и II. Нахождение энергетического произведения энергии объема возможно из решения задачи (2.1)–(2.4) с учетом (2.6) и анализом вычислительной сходимости.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00017, <https://rscf.ru/project/23-21-00017/>, в Тульском государственном университете.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lopes R.M., Campilho R.D.S.G., da Silva F.J.G., Faneco T.M.S. Comparative evaluation of the double-cantilever beam and tapered double-cantilever beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints // *Int. J. Adhes.* 2016. V. 67. P. 103–111. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2015.12.032>
2. Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G. Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility // *Int. J. Fract.* 2017. V. 207. P. 55–71. <https://doi.org/10.1007/s10704-017-0219-x>
3. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter // *Int. J. Solids Struct.* 2019. V. 158. P. 141–149. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002>
4. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. Relationship between Jc and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite // *Int. J. Fract.* 2020. V. 224. № 2. P. 277–284. <https://doi.org/10.1007/s10704-020-00464-0>
5. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
6. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Сам. ун-т, 2001. 630 с.

7. *Kanninen M.F., Popelar C.H.* Advanced fracture mechanics. N.Y.: Oxford University Press, 1985. 563 p.
8. *Campilho R.D.S.G., Pinto A.M.G., Banea M.D., da Silva L.F.M.* Optimization study of hybrid spot-welded/bonded single-lap joints // *Int. J. Adhes.* 2012. V. 37. P. 86–95.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2012.01.018>
9. *Wu E.M., Reuter R.C.J.* Crack extension in fiberglass reinforced plastics. University of Illinois TAM Report № 275. 1965.  
<https://doi.org/10.21236/ad0613576>
10. *Alfano G., Crisfield M.A.* Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: Mechanical and computational issues // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2001. V. 50. № 7. P. 1701–1736.  
<https://doi.org/10.1002/nme.93>
11. *Neves L.F.R., Campilho R.D.S.G., Sánchez-Arce I.J., Madani K., Prakash C.* Numerical modelling and validation of mixed-mode fracture tests to adhesive joints using J-integral concepts // *Processes.* 2022. V. 10. № 12. P. 2730.  
<https://doi.org/10.3390/pr10122730>
12. *Хан Х.Г.* Теория упругости. Основы линейной теории. М.: Мир, 1988. 343 с.
13. *Irwin G.R., Kies J.A.* Critical energy rate analysis of fracture strength // *Welding J. Res. Suppl.* 1954. V. 33. № 4. P. 193–198.
14. *Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A.* On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Part I. Elastic deformation // *PNR-PU Mech. Bulletin.* 2022. № 3. P. 116–124.  
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.3.12>
15. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
16. *Suo Z., Hutchinson J.W.* Interface crack between two elastic layers // *Int. J. Fract.* 1990. V. 43. P. 1–18.  
<https://doi.org/10.1007/BF00018123>
17. *Andrews M.G., Massabó R.* The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // *Eng. Fract. Mech.* 2007. V. 74. № 17. P. 2700–2720.  
<https://doi.org/10.1016/J.ENGFRACMECH.2007.01.013>
18. *Mindlin R.D.* Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // *J. Appl. Mech.* 1951. V. 18. P. 31–38.  
[https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8865-4\\_29](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8865-4_29)
19. *Reissner E.* Reflections on the theory of elastic plates // *Appl. Mech. Rev.* 1985. V. 38. № 11. P. 1453–1464.  
<https://doi.org/10.1115/1.3143699>
20. *Prandtl L., Knauss W.G.* A thought model for the fracture of brittle solids // *Int. J. Fract.* 2011. V. 171. P. 105–109.  
<https://doi.org/10.1007/s10704-011-9637-3>
21. *Ентов В.М., Салганик Р.Л.* К модели хрупкого разрушения Прандтля // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1968. № 6. С. 87–99.