

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ УЗЛОВЫХ ТОЧЕК КВАДРАТУРНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

© 2023 г. А. В. Капцов^а, Е. И. Шифрин^{а,*}

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: shifrin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 14.03.2023 г.

После доработки 22.03.2023 г.

Принята к публикации 23.03.2023 г.

Рассматривается задача обнаружения и идентификации упругого включения в изотропной, линейно упругой плоскости. Предполагается, что на бесконечности заданы постоянные напряжения. Предполагается также, что на некоторой замкнутой кривой, содержащей внутри себя включение, известны действующие усилия и перемещения. В случае, когда область, занимаемая включением, является квадратурной, разработан метод идентификации ее узловых точек. Разработанный метод основан на применении принципа взаимности. Рассмотрены численные примеры.

Ключевые слова: упругость, плоская задача, квадратурная область, узловые точки, обратная задача

DOI: 10.31857/S0572329923600147, EDN: XOMURK

1. Введение. В случае, когда переопределенные данные (данные Дирихле и Неймана) известны на замкнутой кривой, охватывающей дефект (включение, полость или трещину), одним из наиболее эффективных методов его идентификации является метод, основанный на исследовании скачка в соотношении взаимности [1]. Этот метод был успешно применен к решению обратных задач статической теории упругости [2–8]. В указанных публикациях были решены задачи идентификации плоской трещины, эллипсоидального включения и нескольких эллипсоидальных включений в трехмерном упругом пространстве, а также множества прямолинейных трещин в упругой плоскости. Таким образом, в известных публикациях в основном решались задачи идентификации дефектов, имеющих каноническую форму. В настоящей публикации рассматривается задача идентификации некоторых характеристик областей, занимаемых дефектами не только канонической формы.

Поскольку ниже рассматриваются включения, занимающие квадратурные области, коротко напомним определение и основные свойства квадратурных областей. Ограничимся односвязными областями $D \subset R^2$, ограниченными гладкими, замкнутыми, жордановыми кривыми ∂D . Основы теории квадратурных областей были заложены в работах [9, 10]. Множество функций, голоморфных в области D и принадлежащих $L_1(D)$, обозначим $AL^1(D)$. Согласно [10] область D называется квадратурной если существует конечное число точек $z_1, z_2, \dots, z_m$, $z_i \in D$ таких, что для любых функций $f(z) \in AL^1(D)$ имеет место следующее тождество

$$\int_D f(z) dS = \sum_{k=1}^m \sum_{j=0}^{n_k-1} a_{kj} f^{(j)}(z_k) \quad (1.1)$$

Здесь Ox_1x_2 — декартовы координаты, $z = x_1 + ix_2$, a_{kj} — комплексные постоянные, не зависящие от функции $f(z)$. Точки $z_k = x_{k1} + ix_{k2}$ называются узловыми точками.

Величина $n = \sum_{k=1}^m n_k$ называется порядком квадратурного тождества (1.1).

Имеются также другие, эквивалентные определения квадратурной области [9, 10]. Напомним их, поскольку они понадобятся ниже.

Область называется квадратурной если существует функция $S(z)$, называемая функцией Шварца, которая удовлетворяет следующим условиям. $S(z)$ — мероморфная функция в области D . Полюсы функции $S(z)$ совпадают с узловыми точками z_k и порядки полюсов равны соответствующим величинам n_k . Кроме того, на границе ∂D имеет место следующее равенство

$$S(z) = \bar{z}, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2, \quad z \in \partial D \quad (1.2)$$

В случае, когда область D ограничена и односвязна, условие (1.1) эквивалентно следующим условиям. 1) Существует рациональная функция $\varphi(t)$, $t = t_1 + it_2$, осуществляющая конформное отображение единичного диска U на область D . 2) Полюсы функции $\varphi(t)$ расположены в точках $\tau_k^* = 1/\bar{\tau}_k$ и $\varphi(\tau_k) = z_k$, $\tau_k = \tau_{k1} + i\tau_{k2}$. Порядки полюсов τ_k^* равны соответствующим величинам n_k .

Важное свойство квадратурных областей было установлено в [11–13]. В упрощенной формулировке, достаточной для настоящей статьи, доказанное в [11–13] утверждение может быть сформулировано следующим образом.

Пусть D — односвязная область, ограниченная простой, замкнутой, C^∞ кривой. В этом случае существует квадратурная область, конформно эквивалентная области D и сколь угодно близкая к ней в смысле C^∞ .

Вопрос единственности для квадратурных областей, то есть вопрос о том, в какой степени равенство (1.1) определяет область D , до сих пор остается открытым. Здесь известны лишь частные результаты. Например, доказано, что квадратурная область порядка 1 ($m = 1$, $n_1 = 1$) является кругом. Другие результаты, касающиеся проблемы единственности для квадратурных областей можно найти в [10, 14].

2. Математическая формулировка задачи. Предположим, что область $D \subset R^2$ занята изотропным, линейно упругим телом с модулем сдвига μ_I и коэффициентом Пуассона ν_I . Как и выше, границу области D обозначаем ∂D . Предположим также, что область $S = R^2 \setminus D$ занята изотропным, линейно упругим телом с модулем сдвига μ_M и коэффициентом Пуассона ν_M . Введем декартову систему координат Ox_1x_2 . Предположим, что на бесконечности заданы постоянные напряжения σ_{11}^∞ , σ_{12}^∞ и σ_{22}^∞ . Будем помечать верхним индексом M напряженно деформированное состояние в матрице S : $\mathbf{u}^M(x)$ — вектор перемещений, $e_{\alpha\beta}^M(x)$ — тензор деформаций и $\sigma_{\alpha\beta}^M(x)$ — тензор напряжений. Уравнения плоской теории упругости в области S имеют вид:

$$\begin{aligned}
e_{\alpha\beta}^M(x) &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^M(x) + u_{\beta,\alpha}^M(x)), \quad \alpha = 1, 2, \quad \beta = 1, 2, \quad x = (x_1, x_2) \in S \\
\sigma_{\alpha\beta}^M(x) &= 2\mu_M \left(\frac{\nu_{M*}}{1 - 2\nu_{M*}} \theta^M(x) \delta_{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta}^M(x) \right), \quad \theta^M(x) = \sum_{k=1}^2 e_{kk}^M(x) \\
\sigma_{\alpha\beta,\beta}^M(x) &= 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера, $\nu_* = \nu$ в случае плоской деформации и $\nu_* = \nu/(1 + \nu)$ в случае плоского напряженного состояния.

Упругое поле во включении D будем помечать верхним индексом I : $\mathbf{u}^I(x)$ – вектор перемещений, $e_{\alpha\beta}^I(x)$ – тензор деформаций и $\sigma_{\alpha\beta}^I(x)$ – тензор напряжений. Уравнения плоской теории упругости в области D имеют вид:

$$\begin{aligned}
e_{\alpha\beta}^I(x) &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}^I(x) + u_{\beta,\alpha}^I(x)), \quad \alpha = 1, 2, \quad \beta = 1, 2, \quad x = (x_1, x_2) \in D \\
\sigma_{\alpha\beta}^I(x) &= 2\mu_I \left(\frac{\nu_{I*}}{1 - 2\nu_{I*}} \theta^I(x) \delta_{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta}^I(x) \right), \quad \theta^I(x) = \sum_{k=1}^2 e_{kk}^I(x) \\
\sigma_{\alpha\beta,\beta}^I(x) &= 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Между матрицей и включением предполагается полное сцепление.

$$\mathbf{u}^M(x^*) = \mathbf{u}^I(x^*), \quad \sigma_{\alpha\beta}^M(x^*) N_\beta(x^*) = \sigma_{\alpha\beta}^I(x^*) N_\beta(x^*), \quad x^* \in \partial D \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{N}(x^*) = (N_1(x^*), N_2(x^*))$ – единичная нормаль к границе ∂D включения D в точке x^* .

Пусть $D \subset \Omega$, где Ω – односвязная, ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Предполагается, что на границе $\partial\Omega$ известны действующие усилия и перемещения.

$$\sigma_{\alpha\beta}^M(x') n_\beta(x') = t_\alpha^0(x'), \quad x' \in \partial\Omega \tag{2.4}$$

$$\mathbf{u}^M(x') = \mathbf{u}^0(x'), \quad x' \in \partial\Omega \tag{2.5}$$

Здесь $n(x') = (n_1(x'), n_2(x'))$ – единичная внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$ в точке x' .

В общем случае задача заключается в идентификации включения D с помощью имеющихся данных. В настоящей статье рассматривается более скромная задача – идентификация узловых точек квадратного включения D .

3. Функционал скачка в соотношении взаимности. Упругие поля, удовлетворяющие уравнениям (2.1) во всей плоскости, будем называть регулярными упругими полями и помечать верхним индексом r : $\mathbf{u}^r(x)$ – вектор перемещений, $e_{\alpha\beta}^r(x)$ – тензор деформаций, $\sigma_{\alpha\beta}^r(x)$ – тензор напряжений, $x \in R^2$. Рассмотрим функционал, определенный на пространстве регулярных упругих полей

$$RG(\mathbf{u}^r) = \int_{\partial\Omega} (t_\alpha^0(x') u_\alpha^r(x') - t_\alpha^r(x') u_\alpha^0(x')) dl, \quad t_\alpha^r(x') = \sigma_{\alpha\beta}^r(x') n_\beta(x') \tag{3.1}$$

Из принципа взаимности следует, что в случае, когда область Ω не содержит неоднородностей, равенство $RG(\mathbf{u}^r) = 0$ имеет место для любых регулярных полей $\mathbf{u}^r(x)$. Из равенств (2.1), (2.4), (2.5) и (3.1) следует, что в случае, когда область Ω содержит внутри включение D , функционал $RG(\mathbf{u}^r)$ может быть записан в виде

$$RG(\mathbf{u}^r) = \int_{\partial D} \left(t_{\alpha}^M(x^*) u_{\alpha}^r(x^*) - t_{\alpha}^r(x^*) u_{\alpha}^M(x^*) \right) dl \quad (3.2)$$

$$t_{\alpha}^M(x^*) = \sigma_{\alpha\beta}^M(x^*) N_{\beta}(x^*)$$

Из равенства (3.2) и условий полного сцепления (2.3) имеем

$$RG(\mathbf{u}^r) = \int_{\partial D} \left(t_{\alpha}^I(x^*) u_{\alpha}^r(x^*) - t_{\alpha}^r(x^*) u_{\alpha}^I(x^*) \right) dl, \quad t_{\alpha}^I(x^*) = \sigma_{\alpha\beta}^I(x^*) N_{\beta}(x^*) \quad (3.3)$$

Из равенства (3.3), формулы Грина и уравнений (2.2) следует

$$RG(\mathbf{u}^r) = \int_D [(\lambda_I - \lambda_M) \theta^I \theta^r + 2(\mu_I - \mu_M) e_{\alpha\beta}^I e_{\alpha\beta}^r] dx \quad (3.4)$$

Здесь $\lambda_I = 2\mu_I \nu_{I^*} / (1 - 2\nu_{I^*})$, $\lambda_M = 2\mu_M \nu_{M^*} / (1 - 2\nu_{M^*})$ — постоянные Ламе, $\theta^r(x) = \sum_{k=1}^2 e_{kk}^r(x)$.

4. Вид функционала на некотором подмножестве регулярных упругих полей. Регулярные упругие поля плоской теории упругости представляются с помощью двух голоморфных функций [15]

$$2\mu_M(u_1^r + iu_2^r) = \kappa_M \Phi_r(z) - z\Phi_r'(z) - \overline{\Psi_r(z)} \quad (4.1)$$

$$\sigma_{11}^r + \sigma_{22}^r = 4 \operatorname{Re}[\Phi_r(z)], \quad \sigma_{22}^r - \sigma_{11}^r + 2i\sigma_{12}^r = 2[\bar{z}\Phi_r'(z) + \Psi_r(z)]$$

Здесь $\kappa_M = 3 - 4\nu_M$ в случае плоского деформированного состояния и $\kappa_M = (3 - \nu_M)/(1 + \nu_M)$ в случае плоского напряженного состояния, $\Phi_r(z) = \phi_r'(z)$, $\Psi_r(z) = \psi_r'(z)$.

Рассмотрим подмножество регулярных упругих полей, удовлетворяющих условию $\Phi_r(z) = 0$. Из (4.1) следует, что для упругих полей из данного подмножества справедливы равенства

$$\theta^r = 0, \quad \sigma_{\alpha\beta}^r = 2\mu_M e_{\alpha\beta}^r \quad (4.2)$$

Из (3.4) и (4.2) имеем

$$RG(\mathbf{u}^r) = \frac{(\mu_I - \mu_M)}{\mu_M} \int_D e_{\alpha\beta}^I \sigma_{\alpha\beta}^r dx \quad (4.3)$$

Рассмотрим регулярное упругое поле $\mathbf{u}^r$, построенное с помощью голоморфных функций $\Phi_r(z) = 0$ и $\Psi_r(z) = \mu_M H(z)$. Из (4.1) и (4.3) следует

$$RG(\mathbf{u}^r) = (\mu_I - \mu_M) \int_D [(e_{22}^I - e_{11}^I) \operatorname{Re} H + 2e_{12}^I \operatorname{Im} H] dx \quad (4.4)$$

Пометим верхним индексом ρ регулярное упругое поле, отвечающее голоморфным функциям $\Phi_{\rho}(z) = 0$ и $\Psi_{\rho}(z) = i\mu_M H(z)$. Из (4.1) и (4.3) получим

$$RG(\mathbf{u}^{\rho}) = (\mu_I - \mu_M) \int_D [(e_{11}^I - e_{22}^I) \operatorname{Im} H + 2e_{12}^I \operatorname{Re} H] dx \quad (4.5)$$

Из равенств (4.4) и (4.5) следует

$$RG(\mathbf{u}^r) - iRG(\mathbf{u}^{\rho}) = (\mu_I - \mu_M) \int_D [(e_{22}^I - e_{11}^I) - 2ie_{12}^I] H dx \quad (4.6)$$

Выражение (4.6) может быть рассмотрено как функционал, определенный на пространстве голоморфных функций $H(z) \in AL^1(D)$. Введем следующее обозначение для этого функционала

$$RG(\mathbf{u}^r) - iRG(\mathbf{u}^p) = P(H(z)) \quad (4.7)$$

Учитывая равенства (2.2) и обозначение (4.7), равенство (4.6) может быть записано в виде

$$P(H) = \frac{(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_D [(\sigma_{22}^I - \sigma_{11}^I) - 2i\sigma_{12}^I] H(z) dx \quad (4.8)$$

5. Свойства функционала $P(H)$ и различные формы его представления. Лемма 1. Справедливо следующее равенство

$$\begin{aligned} P(H'(z)) &= \frac{(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_D [(\sigma_{22}^I - \sigma_{11}^I) - 2i\sigma_{12}^I] H'(z) dx = \\ &= -\frac{(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_{\partial D} H(z) (t_1^I + it_2^I) dl \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $t^I = (t_1^I, t_2^I)$ – определенные в (3.3) усилия, действующие на границу включения ∂D .

Доказательство. Преобразуем правую часть равенства (5.1) с помощью формулы Гаусса–Остроградского и уравнения равновесия.

$$-\frac{(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_{\partial D} H(z) (\sigma_{1\beta}^I n_\beta + i\sigma_{2\beta}^I n_\beta) dl = -\frac{(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_D H_{,\beta}(z) (\sigma_{1\beta}^I + i\sigma_{2\beta}^I) dx \quad (5.2)$$

Равенство (5.1) следует из (5.2) и равенств $H_{,1} = H'(z)$, $H_{,2} = iH'(z)$.

В случае, когда область D односвязна, напряженное состояние во включении может быть представлено двумя голоморфными функциями, аналогично (4.1), см. [15]

$$\begin{aligned} 2\mu_I(u_1^I + iu_2^I) &= \kappa_I \Phi_I(z) - \overline{z\Phi_I'(z) - \Psi_I(z)} \\ \sigma_{11}^I + \sigma_{22}^I &= 4\operatorname{Re}[\Phi_I(z)], \quad \sigma_{22}^I - \sigma_{11}^I + 2i\sigma_{12}^I = 2[\overline{z}\Phi_I'(z) + \Psi_I(z)] \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $\Phi_I(z) = \varphi_I'(z)$, $\Psi_I(z) = \psi_I'(z)$, $\kappa_I = 3 - 4\nu_I$ в случае плоской деформации, $\kappa_I = (3 - \nu_I)/(1 + \nu_I)$ в случае плоского напряженного состояния.

Функцию Эри для напряженного состояния во включении обозначим $U^I(x_1, x_2)$.

$$\sigma_{11}^I = \frac{\partial^2 U^I}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22}^I = \frac{\partial^2 U^I}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12}^I = -\frac{\partial^2 U^I}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (5.4)$$

В соответствии с [15] введем функцию

$$f_I(x_1, x_2) = \frac{\partial U^I}{\partial x_1} + i \frac{\partial U^I}{\partial x_2} \quad (5.5)$$

В [15] показано, что функция, определенная в (5.5), выражается через введенные выше голоморфные функции следующим образом

$$f_I(x_1, x_2) = \Phi_I(z) + z\Phi_I'(z) + \overline{\Psi_I(z)} \quad (5.6)$$

Из результатов [15] также следует, что на границе включения справедливо равенство

$$t_1^I(x') + it_2^I(x') = -i \frac{\partial f_I(x')}{\partial l} \quad (5.7)$$

Из (5.1) и (5.7) следует

$$P(H'(z)) = \frac{i(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_{\partial D} H(z) \frac{\partial f_I}{\partial l} dl \quad (5.8)$$

Интегрируя в правой части (5.8) по частям, получим

$$P(H'(z)) = -\frac{i(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_{\partial D} H'(z) f_I(x_1, x_2) dz \quad (5.9)$$

Поскольку любые голоморфные функции в односвязной области D являются производными от некоторых других голоморфных функций, равенство (5.9) может быть записано в виде

$$P(H(z)) = -\frac{i(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_{\partial D} H(z) f_I(x_1, x_2) dz \quad (5.10)$$

Из (5.6), (5.10) и того факта, что интеграл от голоморфной функции по замкнутому контуру равен нулю, следует

$$P(H(z)) = -\frac{i(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_{\partial D} H(z) (\overline{z\Phi'_I(z)} + \overline{\Psi_I(z)}) dz \quad (5.11)$$

Используя равенства (5.11) и (5.3), можно выразить функционал $P(H)$ через перемещения на границе включения

$$P(H(z)) = i(\mu_I - \mu_M) \int_{\partial D} H(z) (u_1^I + iu_2^I) dz \quad (5.12)$$

6. Представление функционала $P(H)$ в виде линейной комбинации дельта-функций и их производных. Поскольку усилия, действующие на границу включения ∂D самоуравновешены, напряженное состояние в матрице $S = R^2 \setminus D$ выражается с помощью двух голоморфных функций аналогично (4.1) и (5.3)

$$\begin{aligned} 2\mu_M(u_1^M + iu_2^M) &= \kappa_M \Phi_M(z) - z\Phi'_M(z) - \overline{\Psi_M(z)} \\ \sigma_{11}^M + \sigma_{22}^M &= 4 \operatorname{Re}[\Phi_M(z)], \quad \sigma_{22}^M - \sigma_{11}^M + 2i\sigma_{12}^M = 2[\overline{z}\Phi'_M(z) + \Psi_M(z)] \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $\Phi_M(z) = \Phi'_M(z)$, $\Psi_M(z) = \Psi'_M(z)$.

Кроме того, согласно [15], справедливо следующее представление

$$\Phi_M(z) = \Gamma z + \Phi_M^0(z), \quad \Psi_M(z) = \Gamma' z + \Psi_M^0(z), \quad \Phi_M^0(\infty) = \Psi_M^0(\infty) = 0 \quad (6.2)$$

Постоянные Γ и Γ' выражаются через напряжения, заданные на бесконечности

$$\Gamma = \frac{1}{4}(\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty), \quad \Gamma' = \frac{1}{2}(\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty + 2i\sigma_{12}^\infty) \quad (6.3)$$

Аналогично (5.6), рассмотрим функцию

$$f_M(x_1, x_2) = \Phi_M(z) + z\Phi'_M(z) + \overline{\Psi_M(z)} \quad (6.4)$$

В терминах введенных функций условия полного сцепления между матрицей и включением (2.3) имеют вид [15]

$$\begin{aligned} f_I(x_1, x_2) &= \Phi_I(z) + z\Phi'_I(z) + \overline{\Psi_I(z)} = f_M(x_1, x_2) = \Phi_M(z) + z\Phi'_M(z) + \overline{\Psi_M(z)} \\ \frac{1}{2\mu_I}[\kappa_I \Phi_I(z) - z\Phi'_I(z) - \overline{\Psi_I(z)}] &= \frac{1}{2\mu_M}[\kappa_M \Phi_M(z) - z\Phi'_M(z) - \overline{\Psi_M(z)}] \end{aligned} \quad (6.5)$$

$(x_1, x_2) \in \partial D$

Обозначим D' область, симметричную области D относительно вещественной оси. Пусть $g(z)$ — голоморфная функция в области D . Определим голоморфную функцию в области D' [9]

$$\bar{g}(z) = \overline{g(\bar{z})}, \quad z \in D' \quad (6.6)$$

Нетрудно видеть [9], что справедливо следующее равенство

$$\bar{g}(\bar{z}) = g(z), \quad z \in D \quad (6.7)$$

Принимая во внимание равенство (6.7), условия сопряжения (6.5) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \varphi_I(z) + z\bar{\Phi}_I(\bar{z}) + \bar{\Psi}_I(\bar{z}) &= \varphi_M(z) + z\bar{\Phi}_M(\bar{z}) + \bar{\Psi}_M(\bar{z}) \\ \kappa_I\varphi_I(z) - z\bar{\Phi}_I(\bar{z}) - \bar{\Psi}_I(\bar{z}) &= \gamma[\kappa_M\varphi_M(z) - z\bar{\Phi}_M(\bar{z}) - \bar{\Psi}_M(\bar{z})], \quad z \in \partial D \end{aligned} \quad (6.8)$$

Здесь $\gamma = \frac{\mu_I}{\mu_M}$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_M(z) &= x, \quad z\bar{\Phi}_I(\bar{z}) + \bar{\Psi}_I(\bar{z}) = y, \quad \varphi_I(z) = a, \\ z\bar{\Phi}_M(\bar{z}) + \bar{\Psi}_M(\bar{z}) &= b, \quad z \in \partial D \end{aligned} \quad (6.9)$$

Используя условия полного сцепления (6.8), выразим величины x и y через величины a и b . В результате получим

$$x = \frac{(\kappa_I + 1)a + (\gamma - 1)b}{\gamma\kappa_M + 1}, \quad y = \frac{(\kappa_I - \gamma\kappa_M)a + \gamma(\kappa_M + 1)b}{\gamma\kappa_M + 1} \quad (6.10)$$

Определим аналитические функции двух переменных

$$Q_1(z, \zeta) = \varphi_I(z) + z\bar{\Phi}_I(\bar{\zeta}) + \bar{\Psi}_I(\bar{\zeta}), \quad z \in D, \quad \zeta \in D \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} Q_2(z, \zeta) &= \frac{1}{\gamma\kappa_M + 1} [(\kappa_I + 1)\varphi_I(z) + \gamma(\kappa_M + 1)(z\bar{\Phi}_M(\bar{\zeta}) + \bar{\Psi}_M(\bar{\zeta}))] \\ & \quad z \in D, \quad \zeta \notin \bar{D} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Здесь $\bar{D}$ — замыкание области D .

Пусть $S(z)$ — мероморфная функция Шварца в замкнутой области $\bar{D}$. Определим мероморфную функцию

$$Q(z) = \begin{cases} Q_1(z, S(z)), & z \in D, \quad S(z) \in D \\ Q_2(z, S(z)), & z \in D, \quad S(z) \notin \bar{D} \end{cases} \quad (6.13)$$

Из (5.6), (6.4), (6.5), (6.7) и (6.9)–(6.12) имеем

$$Q_1(z, S(z)) = Q_2(z, S(z)) = f_I(x_1, x_2), \quad z \in \partial D \quad (6.14)$$

Предположим для простоты, что полюсы функции Шварца в области D — простые. Обозначим эти полюсы $z_1, z_2, \dots, z_n$. Таким образом, в окрестности точки z_k функция $S(z)$ имеет вид

$$S(z) = \frac{R_k}{z - z_k} + g_k(z) \quad (6.15)$$

где $g_k(z)$ — голоморфная функция в некоторой окрестности точки z_k .

Учитывая поведение упругого поля $\mathbf{u}^M = (u_1^M, u_2^M)$ на бесконечности (6.2), получим асимптотику функции $Q_2(z, S(z))$ при $z \rightarrow z_k$.

$$Q_2(z, S(z)) = \frac{\gamma(\kappa_M + 1) \bar{\Gamma}' R_k}{(\gamma \kappa_M + 1)(z - z_k)} + G_k(z) \quad (6.16)$$

Здесь $G_k(z)$ — голоморфная функция в окрестности точки z_k .

Из (6.13) и (6.16) следует, что $Q(z)$ — мероморфная функция в области D , простые полюсы которой расположены в точках $z_1, z_2, \dots, z_n$. Из (5.10), (6.13) и (6.14) получим

$$P(H(z)) = -\frac{i(\mu_I - \mu_M)}{2\mu_I} \int_{\partial D} H(z) Q(z) dz \quad (6.17)$$

Интеграл в (6.17) равен сумме вычетов подынтегральной функции в точках z_k

$$P(H(z)) = \sum_{k=1}^n A_k H(z_k) \quad (6.18)$$

$$\text{где } A_k = \frac{\pi(\mu_I - \mu_M) \gamma(\kappa_M + 1) \bar{\Gamma}' R_k}{\mu_I (\gamma \kappa_M + 1)}.$$

Принимая во внимание выражение для γ , имеем

$$A_k = \frac{\pi(\mu_I - \mu_M)(\kappa_M + 1) \bar{\Gamma}' R_k}{(\mu_I \kappa_M + \mu_M)} \quad (6.19)$$

7. Определение узловых точек квадратурного включения. Рассмотрим последовательность голоморфных функций $H_m(z) = \left(\frac{z}{L}\right)^m$, где L — некоторый линейный размер, $m = 0, 1, 2, \dots$. Обозначим

$$P(H_m(z)) = b_m \quad (7.1)$$

Из (6.18) и (7.1) получим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^n A_k w_k^m = b_m, \quad w_k = \frac{z_k}{L} \quad (7.2)$$

Уравнения (7.2) содержат $2n$ неизвестных: A_k и w_k , $k = 1, \dots, n$. Методы нахождения этих неизвестных с помощью известных значений b_m , $m = 0, \dots, 2n-1$ хорошо разработаны [16–18]. В соответствии с [16], рассмотрим ганкелевы матрицы

$$\mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_n & \cdots & b_{2n-2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_2 & b_3 & \cdots & b_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_{n+1} & \cdots & b_{2n-1} \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

Искомые величины w_k являются собственными значениями обобщенной задачи на собственные значения

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{a} = w \mathbf{H}_0 \mathbf{a} \quad (7.4)$$

Здесь $\mathbf{a}$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению w .

После определения неизвестных w_k , $k = 1, \dots, n$, коэффициенты A_k определяются из системы линейных, алгебраических уравнений (7.2) для $m = 0, 1, \dots, n-1$.

Число узловых точек, соответствующих области D , заранее неизвестно. В связи с этим, необходимо решать последовательность задач в предположении, что имеется $n = 1, 2, \dots$ узловых точек. В случае, когда предполагаемое количество узловых точек n превосходит действительное количество узловых точек области D , некоторые из полу-

ченных собственных значений w_k являются паразитными. Для исключения паразитных решений ниже используется следующий критерий.

Обозначим $A_{n\max} = \max_{k=1, \dots, n} |A_k|$. Собственные значения w_k , для которых соответствующие коэффициенты A_k удовлетворяют неравенству $|A_k|/A_{n\max} < \varepsilon_{cr}$, где ε_{cr} некоторая малая величина, рассматриваются как паразитные и исключаются из рассмотрения. В численных примерах, рассмотренных ниже, принимается $\varepsilon_{cr} = 0.01$.

8. Численные примеры. В представленных выше теоретических результатах предполагается, что упругое тело безгранично. В рассмотренных ниже примерах упругое тело ограничено, однако характерные размеры дефекта много меньше размеров тела, что дает возможность использовать полученные результаты. Во всех примерах предполагается, что упругое тело занимает квадратную область $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : |x_i| \leq L, i = 1, 2\}$, $L = 10$ см. В качестве упругих постоянных материала приняты: модуль Юнга $E_M = 68.5$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu_M = 0.36$. Такие упругие постоянные соответствуют алюминию. Во всех примерах рассматривается плоское напряженное состояние и предполагается, что усилия, приложенные к границе тела $\partial\Omega$, соответствуют одноосному растяжению в направлении оси x_2 .

$$\mathbf{t}^0(x') = (0, \sigma_2(x')), \quad x' \in \partial\Omega \quad (8.1)$$

где $\sigma = 100$ МПа.

Используемые в примерах переопределенные данные (перемещения внешней границы тела $\partial\Omega$) получены путем численного решения прямой задачи для тела с неоднородностью при заданных граничных условиях (8.1) на внешней границе $\partial\Omega$.

Наиболее известным примером квадратурной области является круг. В случае, когда область D является кругом с центром в точке z_0 , из теоремы о среднем следует, что для любой голоморфной функции $f(z)$ справедливо равенство

$$\int_D f(z) dS = |D| f(z_0) \quad (8.2)$$

где $|D|$ — площадь круга.

Из (8.2) следует, что круг — квадратурная область порядка 1. Единственная узловая точка расположена в центре круга.

Отметим, что также справедливо и обратное утверждение. Если порядок квадратурной области равен 1, то эта область является кругом, центр которого совпадает с узловой точкой [10].

Напомним, что функция Шварца для круга с центром в точке z_0 и радиусом r_0 имеет вид [9].

$$S_{\text{circ}}(z) = \frac{r_0^2}{z - z_0} + \bar{z}_0 \quad (8.3)$$

Пример 1. В этом примере в качестве неоднородности рассматривается круговая полость с центром в точке $(x_{01}, x_{02}) = (4, 3)$ и радиусом $r_0 = 1$, см. рис. 1. Здесь все величины даны в сантиметрах.

Узловые точки были определены при различных предположениях о количестве узловых точек n . Величина n варьировалась от 1 до 10. В результате использования сформулированного выше критерия оказалось, что для всех рассмотренных значений n определяется только одна узловая точка. Проиллюстрируем это на примере, в котором ожидаемое количество узловых точек $n = 10$. В табл. 1 представлены координаты полученных узловых точек $z_k = L \cdot w_k$ и соответствующие им нормированные коэффициенты $\alpha_k = |A_k|/A_{n\max}$.

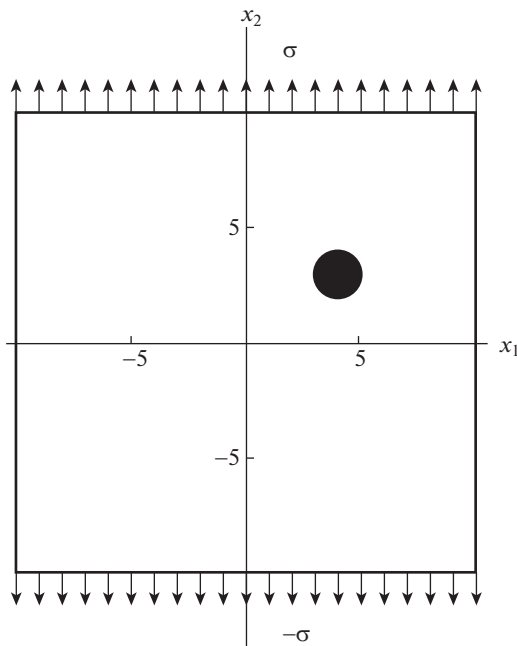


Рис. 1. Квадратная пластина с круговой полостью.

Как видно из табл. 1, для 9 из 10 полученных узловых точек выполнено неравенство $\alpha_k < \varepsilon_{cr} = 0.01$. Отметим, что значения α_k для этих девяти точек много меньше выбранного критериального значения. Таким образом, согласно сформулированному в предыдущем разделе критерию, эти девять точек должны быть исключены и остается только одна узловая точка, имеющая в табл. 1 номер 6. Координаты оставшейся точки, как и ожидалось, с точностью до двух десятичных знаков совпадают с координатами центра круга.

Зависимость координат установленной узловой точки от предполагаемого количества узловых точек n представлена в табл. 2.

Из табл. 2 следует, что с точностью до трех десятичных знаков, координаты определяемой узловой точки не зависят от предполагаемого значения n и совпадают с координатами центра круга с очень высокой точностью.

Таблица 1. Узловые точки и нормированные коэффициенты для круговой полости в случае $n = 10$ и параметров круга $z_0 = 4 + 3i$, $r_0 = 1$

k	1	2	3	4	5
α_k	5.29×10^{-14}	4.04×10^{-10}	1.14×10^{-9}	2.15×10^{-10}	3.82×10^{-7}
z_k	$-15.79 + 4.9i$	$-9.47 - 9.39i$	$-7.18 - 6.47i$	$-6.51 + 7.61i$	$3.55 + 4.99i$
k	6	7	8	9	10
α_k	1	3.9×10^{-5}	1.28×10^{-8}	4.8×10^{-9}	1.13×10^{-9}
z_k	$4 + 3i$	$4.3 + 2.68i$	$8.41 - 6.76i$	$9.68 - 9.43i$	$10.37 - 3.02i$

Таблица 2. Зависимость координат установленной узловой точки от величины n

n	1	2	3	4	5
z_0	$4.0025 + 3.0024i$	$4.0024 + 3.0023i$	$4.0024 + 3.0022i$	$4.0024 + 3.0022i$	$4.0024 + 3.0022i$
n	6	7	8	9	10
z_0	$4.0024 + 3.0022i$	$4.0024 + 3.0023i$	$4.0024 + 3.0022i$	$4.0024 + 3.0022i$	$4.0024 + 3.0022i$

Поскольку в данном примере установлено, что имеется только одна узловая точка, то, как указано выше, отсюда следует, что искомая неоднородность является кругом [10]. Если предположить, что неоднородность является полостью, то радиус круга также может быть определен.

Из (7.2) следует, что в случае, когда имеется единственная узловая точка, справедливо равенство $A_1 = b_0$. Следовательно, из формулы (6.19), предполагая, что дефект является полостью ($\mu_I = 0$), имеем

$$-\pi(\kappa_M + 1)\bar{\Gamma}' R_1 = b_0 \quad (8.4)$$

В случае одноосного растяжения вдоль оси x_2 , из (6.3) получим

$$\Gamma' = \frac{\sigma}{2} \quad (8.5)$$

Из (6.15) и вида функции Шварца (8.3) следует

$$R_1 = r_0^2 \quad (8.6)$$

Наконец, из формул (8.4)–(8.6) получим

$$r_0^2 = \frac{-2b_0}{\pi(\kappa_M + 1)\sigma} \quad (8.7)$$

В результате вычислений было получено $b_0 = -(486.1754 + 1.4725i)$ Мпа · см². Отметим, что из-за погрешностей вычислений величина b_0 оказалась комплексной, однако мнимая часть числа на несколько порядков меньше его вещественной части. Если пренебречь мнимой частью и подставить вещественную часть в формулу (8.7), получим $r_0 \approx 1.026$. Таким образом, радиус круговой полости вычисляется с достаточно высокой точностью.

Замечание. Параметры круговой полости с помощью переопределенных данных на всей внешней границе тела можно также определить с помощью метода, описанного в [3]. Однако, в методе [3] нужно априори предполагать, что полость имеет форму круга. В представленном здесь методе тот факт, что полость имеет форму круга, не предполагается, а устанавливается.

Пример 2. В этом примере дефект D также является круговой полостью, центр которой расположен в точке $(x_{01}, x_{02}) = (-6, -4)$, а радиус равен $r_0 = 0.5$. Как и в примере 1, количество предполагаемых узловых точек n варьировалось от 1 до 10. Вычисления показали, что при всех рассмотренных значениях n после исключения паразитных решений оставалась только одна узловая точка. Проиллюстрируем этот результат в случае $n = 10$. Координаты всех десяти узловых точек z_k и соответствующие им нормированные коэффициенты α_k представлены в табл. 3.

Таблица 3 показывает, что согласно сформулированному выше критерию остается только одна узловая точка под номером 3. Остальные узловые точки являются паразитными. Координаты установленной узловой точки с точностью до нескольких десятичных знаков совпадают с координатами центра круга. Точность определения коор-

Таблица 3. Узловые точки и нормированные коэффициенты для круговой полости в случае $n = 10$ и параметров круга $z_0 = -6 - 4i$, $r_0 = 0.5$

k	1	2	3	4	5
α_k	9.69×10^{-9}	2.67×10^{-10}	1	1.24×10^{-4}	9.92×10^{-8}
z_k	$-9.62 - 9.71i$	$-8.77 + 7.93i$	$-6 - 4i$	$-5.61 - 4.2i$	$-5.52 - 8.16i$
k	6	7	8	9	10
α_k	2.25×10^{-7}	4.25×10^{-8}	1.19×10^{-10}	9.66×10^{-16}	1.68×10^{-8}
z_k	$0.42 - 5.05i$	$6.99 - 8.05i$	$7.65 + 9.23i$	$9.25 + 21.5i$	$9.45 - 9.63i$

Таблица 4. Зависимость координат установленной узловой точки для круговой полости с параметрами $z_0 = -6 - 4i$ и $r_0 = 0.5$ от числа предполагаемых узловых точек n

n	1	2	3	4	5
z_0	$-6.0006 - 4.0002i$	$-6.0006 - 4.0002i$	$-6.0006 - 4.0002i$	$-6.0004 - 4.0003i$	$-6.0006 - 4.0002i$
n	6	7	8	9	10
z_0	$-6.0005 - 4.0002i$	$-6.0006 - 4.0002i$	$-6.0007 - 4.0003i$	$-6.0006 - 4.0003i$	$-6.0006 - 4.0003i$

динат центра круга иллюстрируется в табл. 4, где представлены координаты установленной узловой точки в зависимости от предполагаемого количества узловых точек n . Так как в этом примере радиус круговой полости меньше, чем в примере 1, центр круга определяется с более высокой точностью.

Полученная в результате вычислений величина b_0 оказалась равной $b_0 = -(117.9 + 0.1i)$ МПа $\cdot$ см². Пренебрегая мнимой частью, которая много меньше вещественной части, и подставив вещественную часть в формулу (8.7), получим $r_0 = 0.505$. Таким образом, погрешность в определении радиуса круговой полости составляет один процент.

Пример 3. В этом примере неоднородность представляет собой жесткое круговое включение, занимающее ту же область, что и круговая полость в примере 2. Проведенные вычисления показали, что и в данном примере обнаруживается единственная узловая точка. В табл. 5 представлены координаты полученных узловых точек z_k и соответствующие им нормированные коэффициенты α_k для случая, когда предполагаемое количество узловых точек $n = 10$.

Из табл. 5 следует, что согласно принятому критерию остается только одна узловая точка, идущая под номером 5. Координаты этой точки совпадают с координатами центра круга.

Таблица 5. Узловые точки и нормализованные коэффициенты для жесткого кругового включения

k	1	2	3	4	5
α_k	4.37×10^{-9}	1.11×10^{-9}	4.46×10^{-13}	2.42×10^{-4}	1
z_k	$-9.43 - 9.38i$	$-8.43 + 8.02i$	$-7.47 + 15.69i$	$-6.19 - 4.01i$	$-6.00 - 4.00i$
k	6	7	8	9	10
α_k	1.86×10^{-7}	9.25×10^{-9}	9.73×10^{-9}	2.40×10^{-10}	3.72×10^{-9}
z_k	$-3.19 + 0.52i$	$2.30 + 5.19i$	$6.75 - 7.55i$	$8.87 + 8.62i$	$9.45 - 9.56i$

Вычисления показали, что при любом предполагаемом количестве узловых точек n от $n = 1$ до $n = 10$ координаты оставшейся после исключения паразитных решений узловой точки отличаются от координат центра круга только начиная с четвертого десятичного знака после запятой. Например, в случае $n = 10$ полученные координаты узловой точки $z_0 = -5.9998 - 3.9999i$.

Чтобы определить радиус жесткого кругового включения перейдем к формуле (6.19) к пределу при $\mu_I \rightarrow \infty$. В результате получим

$$A_1 = b_0 = \frac{\pi(\kappa_M + 1)\bar{\Gamma}' R_1}{\kappa_M} \quad (8.8)$$

Из (8.8), учитывая (8.3) и (8.5), получаем

$$r_0^2 = \frac{2\kappa_M b_0}{\pi(\kappa_M + 1)\sigma} \quad (8.9)$$

В результате вычислений было получено $b_0 = 58.9 - 0.0334i$ МПа $\cdot$ см². Можно видеть, что мнимая часть b_0 много меньше вещественной части. Пренебрегая мнимой частью и подставив вещественную часть b_0 в формулу (8.9), получим $r_0 = 0.497$, что с достаточно высокой точностью совпадает с радиусом рассматриваемого, жесткого, кругового включения.

Пример 4. Пусть полость D имеет форму кардиоиды. Напомним, что кардиоида является квадратурной областью, которая может быть получена путем сдвига и поворота области, чья граница описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a \left(\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) \\ x_2(t) &= a \left(\sin t + \frac{1}{2} \sin 2t \right), \quad 0 \leq t < 2\pi \end{aligned} \quad (8.10)$$

Здесь a – параметр.

В примере рассматривается случай, когда кардиоида D определяется параметром $a = 0.5$ и сдвинута на вектор $(x_{01}, x_{02}) = (4, 3)$. Рассматриваемая кардиоида представлена на рис. 2.

Согласно [19], для любой функции $f(z) \in AL^1(D)$, в случае, когда область D задается уравнениями (8.10) и сдвинута на вектор z_0 , справедливо равенство

$$\int_D f(z) dS = \frac{3\pi a^2}{2} f(z_0) + \frac{\pi a^3}{2} f'(z_0) \quad (8.11)$$

где $z_0 = x_{01} + ix_{02}$.

Из (8.11) следует, что кардиоида имеет единственную узловую точку z_0 порядка 2. Вследствие этого функция Шварца имеет один полюс в точке z_0 порядка 2.

Расчеты показали, что, начиная с $n = 2$, обнаруживаются две простые узловые точки, весьма близкие к кратной узловой точке, отвечающей рассматриваемой кардиоиде. Координаты получаемых узловых точек и соответствующие им нормированные коэффициенты в случае $n = 10$ представлены в табл. 6.

Как видно из табл. 6, согласно принятому критерию, остаются только две узловые точки под номерами 6 и 7, координаты которых очень близки к точным координатам двойной узловой точки.

Устойчивость результатов по отношению к количеству предполагаемых узловых точек n иллюстрируется в табл. 7.

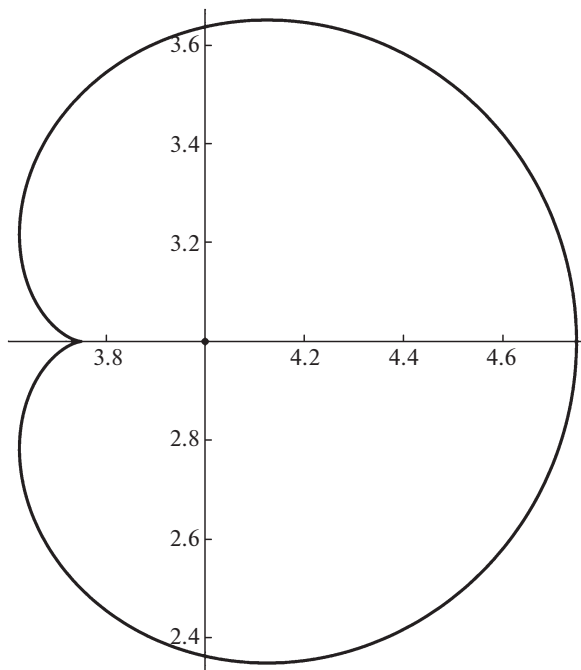


Рис. 2. Полость, имеющая форму кардиоиды.

Пример 5. Еще одним известным примером квадратурной области является овал Неймана. Овалом Неймана называется область, которая может быть получена путем сдвига и поворота области, чья граница описывается следующей кривой

$$x_1(t) = \sqrt{a^2 + 4\varepsilon^2 \cos^2(t)} \cos t, \quad x_2(t) = \sqrt{a^2 + 4\varepsilon^2 \cos^2(t)} \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi \quad (8.12)$$

Здесь a и ε – постоянные.

Согласно [9], функция Шварца для овала Неймана, граница которого описывается уравнениями (8.12), имеет вид

$$S(z) = \frac{z(a^2 + 2\varepsilon^2) + z\sqrt{a^4 + 4(a^2 + z^2)\varepsilon^2}}{2(z^2 - \varepsilon^2)} \quad (8.13)$$

Из (8.13) следует, что функция Шварца для овала Неймана имеет два простых полюса в точках $z = \pm\varepsilon$.

Таблица 6. Узловые точки и нормированные коэффициенты для полости, имеющей форму кардиоиды в случае $n = 10$

k	1	2	3	4	5
α_k	1.04×10^{-19}	6.61×10^{-10}	1.89×10^{-9}	2.07×10^{-10}	5.21×10^{-9}
z_k	$-27.00 - 27.25i$	$-9.37 - 9.45i$	$-6.50 - 6.81i$	$-5.92 + 7.69i$	$-0.39 + 5.74i$
k	6	7	8	9	10
α_k	0.77	1	1.04×10^{-8}	4.09×10^{-9}	3.27×10^{-16}
z_k	$3.97 + 3.00i$	$4.02 + 3.00i$	$7.45 - 6.79i$	$9.52 - 9.42i$	$25.13 - 4.90i$

Таблица 7. Зависимость положения обнаруженных узловых точек от числа предполагаемых узловых точек для полости в виде кардиоиды

n	1	2	3	4	5
z_1, z_2	$4.1877 + 3.0003i$	$3.9601 + 2.9927i$	$3.9739 + 3.0060i$	$3.9716 + 2.9999i$	$3.9710 + 3.0002i$
		$4.0278 + 3.0057i$	$4.0177 + 2.9958i$	$4.0192 + 3.0006i$	$4.0196 + 3.0004i$
n	6	7	8	9	10
z_1, z_2	$3.9712 + 2.9997i$	$3.9709 + 2.9999i$	$3.9707 + 2.9994i$	$3.9707 + 2.9995i$	$3.9707 + 2.995i$
	$4.0194 + 3.0008i$	$4.0197 + 3.0006i$	$4.0198 + 3.0010i$	$4.0198 + 3.0010i$	$4.0198 + 3.0009i$

В рассматриваемом примере взяты следующие значения параметров овала Неймана: $a = 0.3$, $\varepsilon = 0.25$, описываемый в (8.13) овал Неймана сдвинут на вектор $z_0 = 1 + 2i$ и повернут на угол $\pi/2$, см. рис. 3. Таким образом, координаты узловых точек полости расположены в точках $z_1 = 1 + 1.75i$ и $z_2 = 1 + 2.25i$. Рассматриваемая полость изображена на рис. 3.

Проведенные численные расчеты показали, что, начиная с $n = 2$, после применения принятого выше критерия остается ровно две узловых точки. Проиллюстрируем это

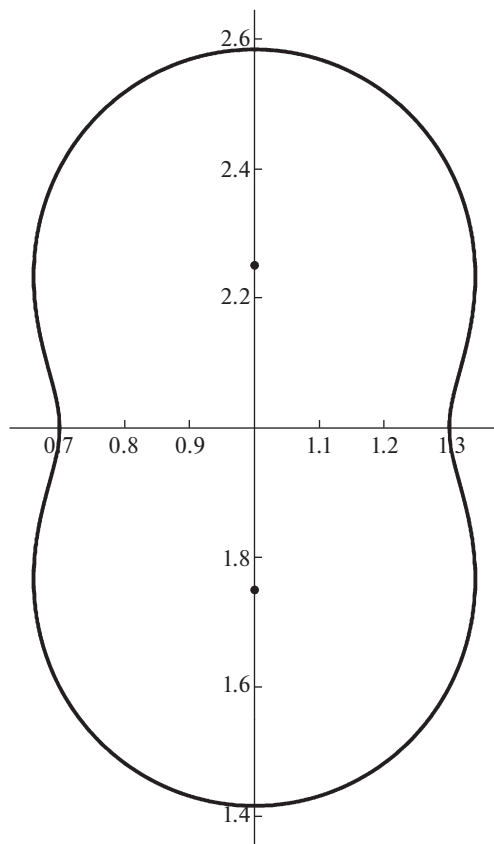
**Рис. 3.** Полость, имеющая форму овала Неймана.

Таблица 8. Узловые точки и нормированные коэффициенты для полости, имеющей форму овала Неймана, в случае $n = 10$

k	1	2	3	4	5
α_k	2.42×10^{-9}	2.21×10^{-9}	6.98×10^{-8}	2.96×10^{-7}	0.98
z_k	$-12.38 + 3.57i$	$-11.19 + 11.60i$	$-9.75 - 9.98i$	$-7.8 - 7.40i$	$0.998 + 1.717i$
k	6	7	8	9	10
α_k	1.0	8.46×10^{-5}	2.22×10^{-7}	9.18×10^{-8}	1.74×10^{-9}
z_k	$0.998 + 2.276i$	$2.83 + 0.72i$	$7.21 - 7.64i$	$9.4 - 9.65i$	$11.34 + 10.91i$

Таблица 9. Зависимость положения установленных узловых точек от числа предполагаемых узловых точек для полости в виде овала Неймана

n	1	2	3	4	5
z_1, z_2	$1 + 2i$	$0.998 + 1.716i$ $0.998 + 2.274i$	$1.0 + 1.722i$ $1.0 + 2.281i$	$1.0 + 1.719i$ $0.988 + 2.277i$	$1.0 + 1.721i$ $1.0 + 2.278i$
n	6	7	8	9	10
z_1, z_2	$0.999 + 1.719i$ $1.0 + 2.277i$	$1.0 + 1.721i$ $1.0 + 2.278i$	$0.999 + 1.718i$ $0.997 + 2.277i$	$1.0 + 1.717i$ $1.0 + 2.276i$	$0.998 + 1.717i$ $0.998 + 2.276i$

результатом расчетов для случая $n = 10$. В табл. 8 представлены все 10 узловых точек z_k , отвечающих $n = 10$, и соответствующие им нормированные коэффициенты α_k .

Из табл. 8 следует, что согласно принятому критерию остаются только две узловые точки под номерами 5 и 6. Координаты этих точек достаточно близки к точным координатам. Погрешность в определении узловых точек менее 2%.

Устойчивость получаемых результатов по отношению к количеству предполагаемых узловых точек n иллюстрируется в табл. 9.

Таблица 9 показывает исключительную устойчивость результатов.

Пример 6. Здесь рассматривается случай полости, имеющей форму квадратурной области третьего порядка. Рассматриваемая квадратурная область строится следующим образом. Три узловые точки расположены в вершинах равностороннего треугольника: $z_1 = \frac{R}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -R$, $z_3 = \frac{R}{2} - \frac{R\sqrt{3}}{2}i$. Граница области получается путем пересечения окружностей радиуса R с центрами в начале координат и в указанных узловых точках [14], см. рис. 4. Рассматриваемая область ограничена внешними частями дуг окружностей.

В примере принято $R = 0.4$. В этом случае координаты узловых точек, с учетом приближенного значения величины $\sqrt{3}$, равны: $z_1 = 0.2 + 0.3464i$, $z_2 = -0.4$, $z_3 = 0.2 - 0.3464i$. Соответствующая область изображена на рис. 5.

Из проведенных численных расчетов следует, что, начиная с $n = 3$, из всех получающихся узловых точек остается ровно 3 простые узловые точки. В табл. 10 представлены все полученные узловые точки z_k и соответствующие им нормированные коэффициенты α_k для случая $n = 10$ предполагаемых узловых точек.

Согласно принятому критерию, из десяти узловых точек таблицы 10 остается только три точки с номерами 4, 5 и 6. Эти три точки достаточно близки к указанному выше точному расположению узловых точек. Погрешности составляют порядка 10%. Устойчивость определяемых положений узловых точек по отношению к количеству предпо-

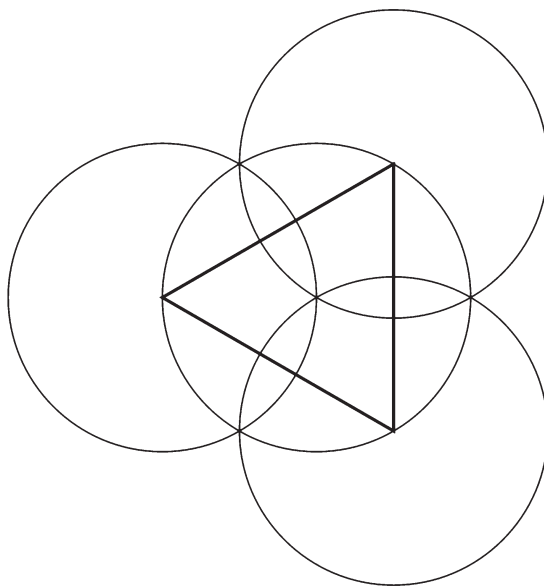


Рис. 4. Построение квадратурной области третьего порядка.

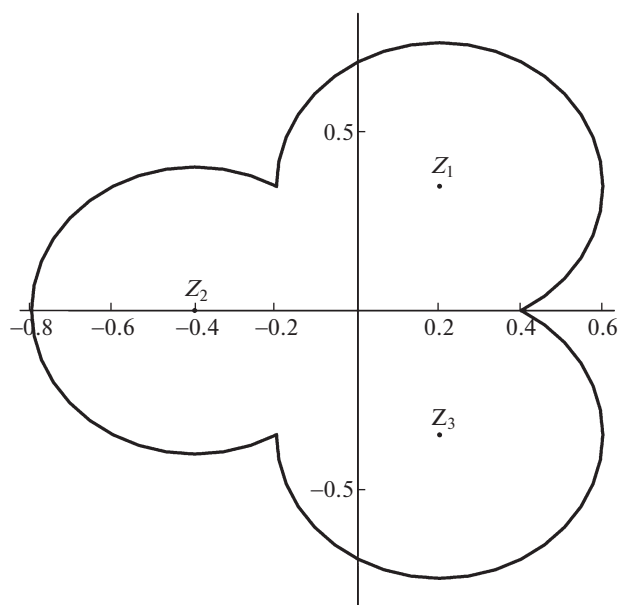


Рис. 5. Полость в виде квадратурной области третьего порядка.

Таблица 10. Узловые точки и нормированные коэффициенты для полости, имеющей форму квадратурной области третьего порядка, в случае $n = 10$

k	1	2	3	4	5
α_k	3.76×10^{-8}	3.41×10^{-8}	9.50×10^{-8}	0.995	1
z_k	$-9.55 - 9.63i$	$-8.11 + 8.31i$	$-7.56 - 7.96i$	$-0.38 - 0.009i$	$0.203 - 0.305i$
k	6	7	8	9	10
α_k	0.924	1.96×10^{-7}	7.00×10^{-8}	1.42×10^{-10}	2.78×10^{-8}
z_k	$0.226 + 0.309i$	$2.932 + 3.503i$	$7.583 - 8.102i$	$8.996 + 8.182i$	$9.552 - 9.655i$

Таблица 11. Зависимость положений установленных узловых точек от числа предполагаемых узловых точек для полости в виде квадратурной области третьего порядка

n	3	4	5	6	7
z_1, z_2, z_3	$0.13175 + 0.2650i$ $-0.4522 - 0.0831i$ $0.1211 - 0.2197i$	$0.3776 + 0.3055i$ $-0.4325 - 0.1637i$ $0.0451 - 0.2219i$	$0.2262 + 0.3112i$ $-0.3789 - 0.0102i$ $0.2008 - 0.3071i$	$0.2413 + 0.2912i$ $-0.3988 - 0.0213i$ $0.1906 - 0.2826i$	$0.2469 + 0.2809i$ $-0.4086 - 0.0273i$ $0.1869 - 0.2719i$
n	8	9	10	11	12
z_1, z_2, z_3	$0.2460 + 0.2809i$ $-0.4086 - 0.0263i$ $0.1878 - 0.2722i$	$0.2208 + 0.3105i$ $-0.3781 - 0.0055i$ $0.2071 - 0.3083i$	$0.2260 + 0.3090i$ $-0.3801 - 0.0091i$ $0.2027 - 0.3048i$	$0.2233 + 0.3101i$ $-0.3789 - 0.0073i$ $0.2048 - 0.3070i$	$0.2222 + 0.3106i$ $-0.3782 - 0.0065i$ $0.2057 - 0.3080i$
n	13	14	15		
z_1, z_2, z_3	$0.2194 + 0.3107i$ $-0.3775 - 0.0043i$ $0.2088 - 0.3091i$	$0.2184 + 0.3093i$ $-0.3784 - 0.0031i$ $0.2104 - 0.3079i$	$0.2185 + 0.3093i$ $-0.3784 - 0.0032i$ $0.2102 - 0.3079i$		

лагаемых узловых точек n иллюстрируется в табл. 11. В этой таблице представлены полученные координаты узловых при различных значениях n .

Результаты, представленные в табл. 11, показывают, что хотя то, что имеются 3 узловые точки определяется с $n = 3$, их координаты начинают устанавливаться с $n = 5$. Окончательная стабилизация результатов происходит начиная с $n = 9$. Установленные координаты узловых точек достаточно близки к точным значениям, но содержат систематическую ошибку порядка 10%. Такая ошибка, вероятно, связана с неточностью в исходных данных, часть из которых определяется путем решения прямой задачи. Решение прямой задачи для тела с полостью столь сложной, невыпуклой формы содержит некоторую погрешность.

Пример 7. В предыдущих примерах неоднородности представляли собой квадратурные области. Цель данного примера выяснить, что дает разработанный метод в случае, когда область, занимаемая дефектом, не является квадратурной. Известно, что эллипс, согласно данному выше определению, не является квадратурной областью. Для эллипса, ограниченного кривой

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0 \quad (8.14)$$

функция Шварца имеет вид [9]

$$S(z) = \frac{a^2 + b^2}{c^2} - \frac{2ab}{c^2} \sqrt{z^2 - c^2} \quad (8.15)$$

Таблица 12. Узловые точки и нормированные коэффициенты для эллиптической полости в случае $n = 5$

k	1	2	3	4	5
α_k	2.48×10^{-9}	8.08×10^{-7}	0.536	1	0.472
z_k	$-9.17 - 10.30i$	$-1.58 - 0.48i$	$3.38 + 2.76i$	$4.03 + 2.99i$	$4.66 + 3.23i$

Таблица 13. Узловые точки и нормированные коэффициенты для эллиптической полости в случае $n = 10$

k	1	2	3	4	5
α_k	2.22×10^{-9}	8.46×10^{-11}	5.61×10^{-9}	6.34×10^{-8}	0.444
z_k	$-9.53 - 9.58i$	$-8.75 + 8.39i$	$-7.46 - 7.71i$	$-2.57 - 1.02i$	$3.30 + 2.74i$
k	6	7	8	9	10
α_k	1	0.825	0.266	3.05×10^{-9}	6.52×10^{-10}
z_k	$3.81 + 2.92i$	$4.37 + 3.13i$	$4.77 + 3.28i$	$9.31 + 8.39i$	$10.33 - 9.44i$

Здесь $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Отсюда следует, что для любой голоморфной в эллиптической области D функции $f(z)$ справедливо равенство [9]

$$\int_D f(z) dS = \frac{2ab}{c^2} \int_{-c}^c f(x) \sqrt{c^2 - x^2} dx \quad (8.16)$$

Таким образом, интеграл от голоморфной функции по эллиптической области выражается через интеграл по отрезку, соединяющему два фокуса. Поскольку, по определению, интеграл от голоморфной функции по квадратурной области должен выражаться с помощью линейной комбинации значений функции и их производных в конечном числе точек, эллиптическая область не является квадратурной.

Пусть полость D имеет форму эллипса с полуосями $a_1 = 1$, $a_2 = 0.25$. Предположим, что центр эллипса расположен в точке $(4, 3)$ и большая ось эллипса наклонена к оси x_1 под углом 20° . Проведенные расчеты показали, что с увеличением числа предполагаемых узловых точек n количество определяемых узловых точек постепенно увеличивается. Все определяемые узловые точки находятся вблизи большей оси эллипса между его фокусами. В табл. 12 приведены значения определяемых узловых точек z_k и соответствующих им нормированных коэффициентов α_k в случае $n = 5$.

Согласно принятому критерию остаются три узловые точки под номерами 3, 4 и 5. Точка z_4 близка к центру эллипса. Нетрудно видеть, что фокусы эллипса расположены в точках $F_1 = 3.09 + 2.67i$ и $F_2 = 4.91 + 3.33i$. Уравнение прямой, проходящей через фокусы и центр эллипса имеет вид

$$x_2 = 0.364x_1 + 1.545 \quad (8.17)$$

Точки z_3 и z_5 расположены очень близко к прямой (8.17) и находятся между фокусами. Эллиптическая полость с установленными тремя узловыми точками изображена на рис. 6.

В случае $n = 10$ обнаруживаются 4 узловые точки. Значения определяемых узловых точек z_k и соответствующих им нормированных коэффициентов α_k в случае $n = 10$ приведены в табл. 13.

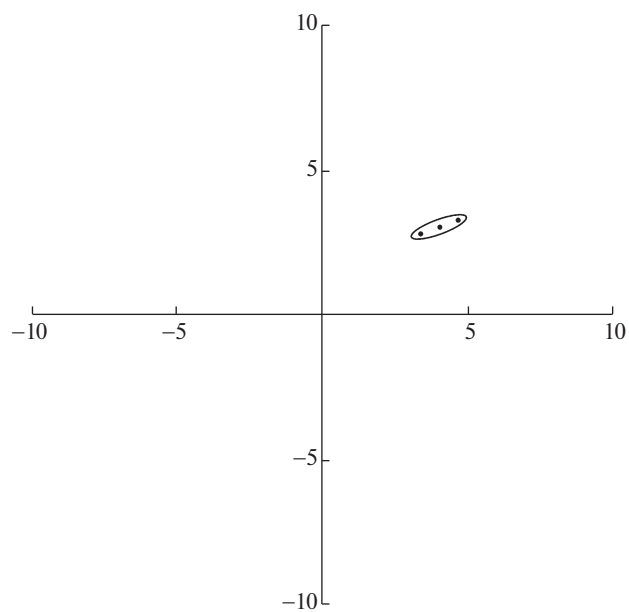


Рис. 6. Эллиптическая полость с узловыми точками, отвечающими $n = 5$.

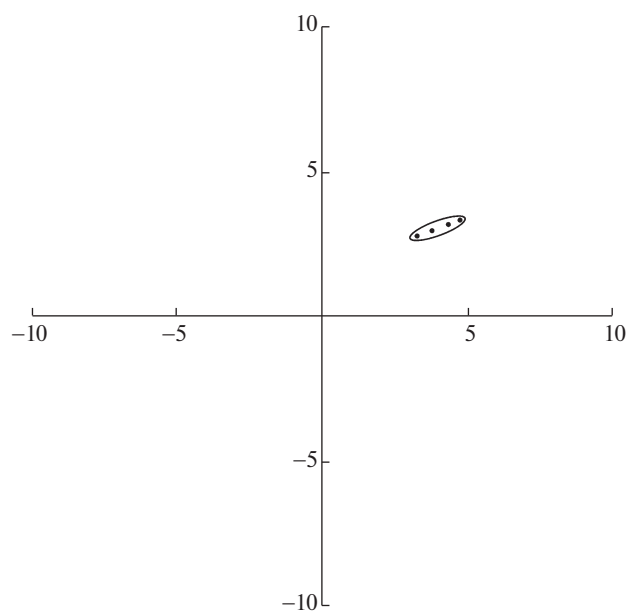


Рис. 7. Эллиптическая полость с узловыми точками, отвечающими $n = 10$.

Из табл. 13 видно, что, согласно принятому критерию, остаются только 4 узловые точки $z_5, \dots, z_8$. Эти точки расположены очень близко к прямой (8.17) и находятся между фокусами эллипса. Изображение эллиптической полости и обнаруженных четырех узловых точек представлено на рис. 7.

9. Заключение. Рассмотрена плоская задача теории упругости об идентификации неоднородности (полости или включения) в упругом теле. Разработан метод, позволяющий в случае, когда неоднородность занимает квадратурную область, определять ее узловые точки, представляющие собой полюсы функции Шварца. Рассмотрен ряд численных примеров, иллюстрирующих полученные теоретические результаты. Представлен также пример, в котором область, занимаемая неоднородностью, не является квадратурной и множество особых точек функции Шварца занимает некоторую кривую. В этом случае получаемый с помощью разработанного метода дискретный набор особенностей принадлежит особому множеству функции Шварца и с увеличением числа искомых особенностей начинает аппроксимировать множество особенностей функции Шварца.

Часть из представленных в статье результатов в краткой форме изложена в публикации [20].

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации 123021700050-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Andrieux S., Ben Abda A.* Identification of planar cracks by complete overdetermined data: inversion formulae // *Inverse Probl.* 1996. V. 12. P. 553–563.
2. *Andrieux S., Ben Abda A., Bui H.* Reciprocity principle and crack identification // *Inverse Probl.* 1999. V. 15. P. 59–65.
3. *Goldstein R.V., Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Application of invariant integrals to the problems of defect identification // *Int. J. Fract.* 2007. V. 147. P. 45–54.
https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6929-1_6
4. *Шифрин Е.И.* Идентификация эллипсоидального дефекта в упругом теле по результатам одного испытания на одноосное растяжение (сжатие) // *Изв. РАН. МТТ.* 2010. № 3. С. 131–142.
5. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of a spheroidal defect in an elastic solid using a reciprocity gap functional // *Inverse Probl.* 2010. V. 26. 055001.
<https://doi.org/10.1088/0266-5611/26/5/055001>
6. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of an ellipsoidal defect in an elastic solid using boundary measurements // *Int. J. Solids Struct.* 2011. V. 48. № 7–8. P. 1154–1163.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.12.016>
7. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of small well-separated defects in an isotropic elastic body using boundary measurements // *Int. J. Solids Struct.* 2013. V. 50. № 22–23. P. 3707–3716.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.07.009>
8. *Shifrin E.I., Kaptsov A.V.* Identification of multiple cracks in 2D elasticity by means of the reciprocity principle and cluster analysis // *Inverse Probl.* 2018. V. 34. 015009. <https://doi.org/https://doi.org/10.1088/1361-6420/aa9d74>
9. *Davis P.J.* The Schwarz function and its applications. The Carus Mathematical Monographs 17. Mathematical Association of America. 1974.
10. *Aharonov D., Shapiro H.S.* Domains on which analytic functions satisfy quadrature identities // *J. d'Analyse Math.* 1976. V. 30. P. 39–73.
11. *Gustafsson B.* Quadrature identities and the Schottky double // *Acta Appl. Math.* 1983. V. 1. P. 209–240.
12. *Bell S.R.* Quadrature domains and kernel function zipping // *Arkiv mat.* 2005. V. 43. P. 271–287.
13. *Bell S.R.* Density of quadrature domains in one and several complex variables // *Complex Var. Elliptic Equ.* 2009. V. 54. № 3–4. P. 165–171.

14. *Ameur Y., Helmer M., Tellander F.* On the uniqueness problem for quadrature domains // *Comput. Methods Funct. Theory*. 2021. V. 21. P. 473–504.
<https://doi.org/10.1007/s40315-021-00373-w>
15. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
16. *Golub G.H., Milanfar P., Varah J.* A stable numerical method for inverting shape from moments // *SIAM J. Sci. Comput.* 1999. V. 21. № 4. P. 1222–1243.
<https://doi.org/10.1137/S1064827597328315>
17. *El Badia A., Ha-Duong T.* An inverse source problem in potential analysis // *Inverse Probl.* 2000. V. 16. № 3. P. 651–663.
<https://doi.org/10.1088/0266-5611/16/3/308>
18. *Kang H., Lee H.* Identification of simple poles via boundary measurements and an application of EIT // *Inverse Probl.* 2004. V. 20. № 6. P. 1853–1863.
<https://doi.org/10.1088/0266-5611/20/6/010>
19. *Lee S.-Y., Makarov N.G.* Topology of quadrature domains // *J. Am. Math. Soc.* 2016. V. 29. P. 333–369.
20. *Шифрин Е.И., Капцов А.В.* Идентификация узловых точек упругого включения в упругой плоскости // *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления*. 2023. Т. 509. С. 77–82.
<https://doi.org/10.31857/S268695432370011X>