

УДК 539.735

**О КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЕЙ ИЗ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА,
НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕННОГО ВНЕШНЕГО
ДАВЛЕНИЯ, ПРИ ЛИНЕАРИЗОВАННОМ ЗАКОНЕ
ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ**

© 2023 г. Б. Г. Миронов^{a,*}, Ю. Б. Миронов^{b,**}

^aРоссийский университет транспорта, 127994, Москва, Россия

^bМосковский технический университет связи и информатики,
111024, г. Москва, Россия

*e-mail: mbg.chspu@yandex.ru

**e-mail: i.b.mironov@mtuci.ru

Поступила в редакцию 06.03.2023 г.

После доработки 27.03.2023 г.

Принята к публикации 30.03.2023 г.

В работе исследовано кручение стержней из анизотропно упрочняющегося жестко-пластического материала при линеаризованном законе пластического течения. Предполагается, что на стержень действует внешнее давление, которое меняется линейно вдоль образующей. Определены компоненты тензоров напряжения и деформации, описывающих предельное состояние стержня.

Ключевые слова: пластичность, стержень, упрочнение, кручение, анизотропия, деформация, напряжение, линеаризация, ассоциированный закон течения

DOI: 10.31857/S0572329923600226, EDN: ZTZBHC

Кручение, как один из распространенных видов деформации тел, довольно часто встречается в практике. Исследованию кручения различных стержней посвящено много работ. Основополагающими среди них являются работы [1–3]. В работах [5, 6] и [8, 9] содержатся исследования кручения стержней из неоднородного материала. Кручение стержней из упрочняющегося материала рассмотрено в работах [4, 10]. В [7] и [10] исследовано кручение стержней в случае, когда они находятся под действием внешнего давления, линейно меняющегося вдоль образующей.

При кручении напряженно-деформированное состояние стержней из анизотропно упрочняющегося материала, находящихся под действием внешнего давления, линейно меняющегося вдоль образующей стержня, определяется из соотношений:

$$\begin{aligned}\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\lambda z + \mu (\lambda, \mu - \text{const}) \\ \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y)\end{aligned}\quad (1)$$

— уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \lambda \quad (2)$$

— условие текучести

$$(\tau_{xz} - ce_{xz})^2 + (\tau_{yz} - ce_{yz})^2 = k^2 (k - \text{const}) \quad (3)$$

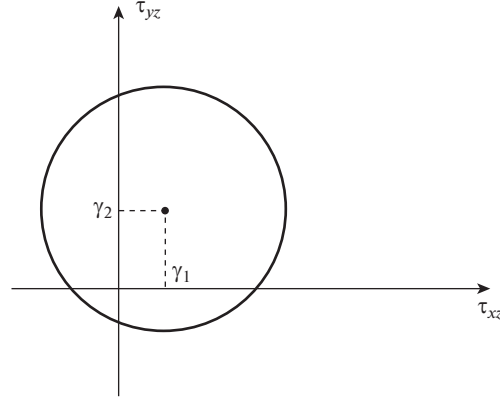


Рис. 1. Линеаризованное условие пластичности.

— соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$\frac{de_{xz}}{\tau_{xz} - ce_{xz}} = \frac{de_{yz}}{\tau_{yz} - ce_{yz}}, \quad e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0 \quad (4)$$

где e_{ij} — компоненты деформации, σ_{ij} — компоненты напряжения, k — предел текучести.

Предполагается, что упрочнение линейное ($c = \text{const}$).

В плоскости τ_{xz}, τ_{yz} уравнение (3) определяет окружность радиуса k (рис. 1) с центром в точке с координатами $\gamma_1 = ce_{xz}$, $\gamma_2 = ce_{yz}$.

Линеаризация соотношений ассоциированного закона пластического течения заключается в том, что во время всего процесса пластического деформирования компоненты приращения пластических деформаций пропорциональны компонентам напряжений, возникающим в начальный момент пластического течения, то есть компонентам напряжений, которые определяются из задачи теории идеальной пластичности

$$\frac{de_{xz}^0}{\tau_{xz}^0} = \frac{de_{yz}^0}{\tau_{yz}^0}, \quad e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0 \quad (5)$$

где компоненты напряжения τ_{xz}^0, τ_{yz}^0 удовлетворяют условию идеальной пластичности

$$(\tau_{xz}^0)^2 + (\tau_{yz}^0)^2 = k^2 \quad (6)$$

Учитывая, что компоненты перемещения u, v, w имеют вид

$$u = \theta yz, \quad v = -\theta xz, \quad w = w(x, y) \quad (7)$$

где w — депланация, θ — крутка. Соотношения связи между компонентами деформации и компонентами перемещения запишем в виде

$$e_{xz} = \frac{1}{2} \left(\theta y + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad e_{yz} = \frac{1}{2} \left(-\theta x + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (8)$$

Из (8) получим

$$\frac{\partial e_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} = \theta \quad (9)$$

Соотношение (5) интегрируется

$$\frac{e_{xz}}{\tau_{xz}^0} = \frac{e_{yz}}{\tau_{yz}^0}, \quad e_x = e_y = e_z = e_{xy} = 0 \quad (10)$$

Полагая, что компоненты деформаций при кручении стержня из анизотропно упрочняющегося материала остаются теми же, что и при кручении стержня из идеально пластического материала можно удовлетворить соотношениям (9) и (10). Соответствующая задача теории идеальной пластичности о кручении стержня из идеально пластического материала, находящегося под действием внешнего давления, может считаться решенной, то есть компоненты деформаций e_{xz}, e_{yz} можно считать определенными. При этом

$$e_{xz} = -\frac{\lambda\theta(x+c_1)(x+c_2)}{\sqrt{k^2 - (\lambda x)^2}}, \quad e_{yz} = -\theta(x+c_1) \quad (11)$$

где c_1 и c_2 — постоянные вдоль характеристик соотношения (9).

Система уравнений, исследуемая в дальнейшем, представляет собой систему из соотношений (1–3), (9), (10).

Дифференцируя соотношение (3) по переменной x , получим

$$(\tau_{xz} - ce_{xz}) \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + (\tau_{yz} - ce_{yz}) \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = c \left((\tau_{xz} - ce_{xz}) \frac{\partial e_{xz}}{\partial x} + (\tau_{yz} - ce_{yz}) \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right) \quad (12)$$

Согласно (12), из уравнения равновесия (2) имеем

$$(\tau_{yz} - ce_{yz}) \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} (\tau_{xz} - ce_{xz}) \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = \left(c \frac{\partial e_{xz}}{\partial x} - \lambda \right) (\tau_{xz} - ce_{xz}) + c \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} (\tau_{yz} - ce_{yz}) \quad (13)$$

Система уравнений для определения характеристик соотношения (13) имеет вид

$$\frac{dx}{(\tau_{yz} - ce_{yz})} = -\frac{dy}{(\tau_{xz} - ce_{xz})} = \frac{d\tau_{yz}}{\left(c \frac{\partial e_{xz}}{\partial x} - \lambda \right) (\tau_{xz} - ce_{xz}) + c \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} (\tau_{yz} - ce_{yz})} \quad (14)$$

Из (14) следует, что характеристики определяются из уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\tau_{xz} - ce_{xz}}{\tau_{yz} - ce_{yz}} \quad (15)$$

Вдоль характеристик (15) справедливы соотношения

$$\tau_{xz} = \lambda x + \alpha, \quad \tau_{yz} = ce_{yz} \pm \sqrt{k^2 - (\lambda x + \alpha - ce_{xz})^2} \quad (16)$$

где $\alpha = \text{const}$ вдоль каждой характеристики.

Аналогично дифференцируя соотношение (3) по переменной y , получим

$$(\tau_{xz} - ce_{xz}) \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + (\tau_{yz} - ce_{yz}) \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = c \left((\tau_{xz} - ce_{xz}) \frac{\partial e_{xz}}{\partial y} + (\tau_{yz} - ce_{yz}) \frac{\partial e_{yz}}{\partial y} \right) \quad (17)$$

Тогда из уравнения равновесия (2) имеем

$$-(\tau_{yz} - ce_{yz}) \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + (\tau_{xz} - ce_{xz}) \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = c \frac{\partial e_{xz}}{\partial y} (\tau_{xz} - ce_{xz}) + \left(c \frac{\partial e_{yz}}{\partial y} - \lambda \right) (\tau_{yz} - ce_{yz}) \quad (18)$$

Система уравнений для определения характеристик и соотношений вдоль характеристик уравнения (18) имеет вид

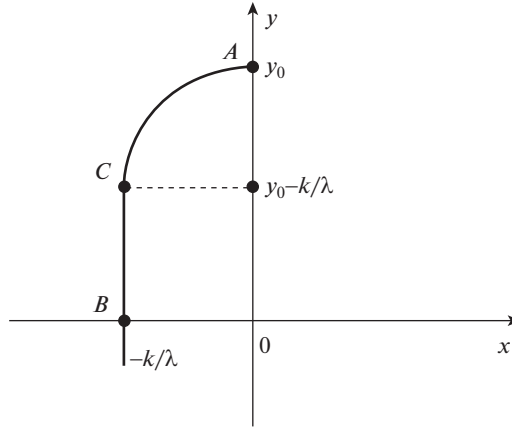


Рис. 2. Огибающая семейства характеристик.

$$-\frac{dx}{(\tau_{yz} - ce_{yz})} = \frac{dy}{(\tau_{xz} - ce_{xz})} = \frac{d\tau_{xz}}{c \frac{\partial e_{xz}}{\partial y} (\tau_{xz} - ce_{xz}) + \left(c \frac{\partial e_{yz}}{\partial y} - \lambda \right) (\tau_{yz} - ce_{yz})} \quad (19)$$

Из (19) и (3) следует, что вдоль характеристик (15) справедливы соотношения

$$\tau_{xz} = ce_{xz} \pm \sqrt{k^2 - (\lambda y + \beta - ce_{yz})^2}, \quad \tau_{yz} = \lambda y + \beta \quad (20)$$

где $\beta = \text{const}$ вдоль каждой характеристики.

Рассмотрим кручение стержня полигонального сечения. На рис. 2 показана часть поперечного сечения стержня: линия AO – свободная граница стержня ($x = 0$). AC – характеристика и BC – огибающая семейства характеристик ($x = -\frac{k}{\lambda}$) (определяемые из решения задачи теории идеальной пластичности). На контуре сечения вектор касательного напряжения $\vec{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz})$ параллелен контуру.

Компоненты деформаций (в соответствии с теорией идеальной пластичности) в области $ABCO$ могут быть записаны в виде

$$e_{xz} = -\frac{\lambda \theta \left(x + \frac{k}{\lambda} \right) x}{\sqrt{k^2 - (\lambda x)^2}}, \quad e_{yz} = -\theta \left(x + \frac{k}{\lambda} \right) \quad (21)$$

С учетом (21) из (16) получим соотношения для компонент напряжений

$$\tau_{xz} = \lambda x, \quad \tau_{yz} = -c\theta \left(x + \frac{k}{\lambda} \right) + \sqrt{k^2 - \left(\lambda x + \frac{c\lambda \theta \left(x + \frac{k}{\lambda} \right) x}{\sqrt{k^2 - (\lambda x)^2}} \right)^2} \quad (22)$$

Согласно (21) и (22) из (15) найдем уравнение характеристик

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\lambda x + \frac{c\lambda\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)x}{\sqrt{k^2 - (\lambda x)^2}}}{\sqrt{k^2 - \left(\lambda x + \frac{c\lambda\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)x}{\sqrt{k^2 - (\lambda x)^2}}\right)^2}} \quad (23)$$

Из (23) следует, что характеристики ортогональны контуру AO поперечного сечения стержня и касаются огибающей BC .

Согласно (22), компонента напряжения τ_{yz} может быть представлена в виде

$$\tau_{yz} = \sqrt{k^2 - \tau_{xz}^2 \left(1 + \frac{c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)\left(2\sqrt{k^2 - (\lambda x)^2} + c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)\right)}{k^2 - (\lambda x)^2} \right)} - c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right) \quad (24)$$

С учетом первого соотношения (22) из (24) имеем

$$\tau_{yz} = \sqrt{k^2 - \tau_{xz}^2 \left(1 + \frac{c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)^2}{\sqrt{k^2 - \tau_{xz}^2}} \right)} - c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right) \quad (25)$$

Как и в случае идеальной пластичности, компонента напряжения τ_{xz} линейно зависит от величины x . В начальный момент пластического деформирования $\theta = 0$ и $\tau_{yz} = \sqrt{k^2 - \tau_{xz}^2}$. В случае, когда $\theta \neq 0$ распределение τ_{yz} относительно θ носит нелинейный характер. При этом компонента напряжения τ_{yz} уменьшается с ростом крутки θ . Следует также отметить, что при возрастании крутки θ величина

$$\begin{aligned} \tau^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2 - \tau_{xz}^2 \frac{c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)\left(2\sqrt{k^2 - (\lambda x)^2} + c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)\right)}{k^2 - (\lambda x)^2} - \\ - 2c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right) \sqrt{k^2 - \tau_{xz}^2 \left(1 + \frac{c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)\left(2\sqrt{k^2 - (\lambda x)^2} + c\theta\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)\right)}{k^2 - (\lambda x)^2} \right)} + c^2\theta^2\left(x + \frac{k}{\lambda}\right)^2 \end{aligned} \quad (26)$$

убывает.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
2. Прагер В., Ходж Ф.Г. Теория идеально пластических тел. М.: ИЛ, 1956. 398 с.
3. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
4. Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. 2. Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. М.: Физматлит, 2002. 448 с.
5. Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир, 1964. 156 с.

6. *Миронов Б.Г.* К теории кручения неоднородных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 4(22). С. 236–240.
7. *Миронов Б.Г., Козлова Л.С.* Кручение призматических стержней при действии давления, линейно меняющегося вдоль образующей // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 3. С. 107–113.
8. *Mironov B.G., Mironov Yu.B.* Torsion anisotropic and composite cylindrical rod // J. Phys. Conf. Ser. 2019. V. 1203. P. 012009.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012009>
9. *Mironov B.G., Mironov Yu.B.* Torsion of Non-Uniform Cylindrical and Prismatic Rods Made of Ideally Plastic Material under Linearized Yield Criterion // Mech. Solids. 2020. V. 55. P. 813–819.
<https://doi.org/10.3103/S0025654420060102>
10. *Mironov B.G., Mironov Yu.B.* Problem on Torsion of Rods Made of a Hardening Material under the Action of Variable External Pressure Using a Linearized Plasticity condition // Mech. Solids. 2022. V. 57. № 2. P. 271–277.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922020143>