

УДК 532.5.032

ОБ ОРИЕНТАЦИИ КОНВЕКТИВНЫХ ВАЛОВ В НАКЛОННОМ ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ

© 2019 г. Д. Е. Пивоваров

МГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

E-mail: pivovarov@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 26.04.2018 г.

После доработки 09.07.2018 г.

Принята к публикации 09.07.2018 г.

Представлен анализ линейной устойчивости конвективного течения в канале прямоугольного сечения, расположенном под углом к горизонту. Рассмотрено поведение монотонных трехмерных возмущений при различном значении ширины канала и свойствах жидкости. Аналитически получено основное течение. Определены два угла наклона, при которых происходит смена ориентации конвективных валов. Установлена сильная зависимость меньшего угла наклона от ширины канала и слабая его зависимость от характеристик среды и слабая зависимость большего угла наклона от ширины канала.

Ключевые слова: свободная тепловая конвекция, наклонный канал, устойчивость, вторичные течения

DOI: 10.1134/S0568528119010110

Конвективными валами в гидродинамике называют цепочку пары параллельных вихрей, вращающихся в разные стороны. Они являются одним из возможных решений задачи Рэлея–Бенара [1]. Это решение можно наблюдать в случае, когда горизонтальный слой покоящейся жидкости, подогреваемый снизу, ограничен твердыми стенками, разность температур между которыми выше критического значения. Последнее определяет границу устойчивости положения равновесия. При других видах граничных условий критическая температура может менять свое значение, а может и менять свой вид решения задачи.

Анализ устойчивости положения равновесия в рамках линейной теории позволяет определить частоту нормальных возмущений, но не их направление, поэтому в неограниченном горизонтальном слое конвективные валы ориентированы случайным образом. В экспериментах, где размеры слоя всегда конечны, а жидкость может занимать прямоугольную в плане область, прослеживается тенденция к выстраиванию конвективных валов параллельно короткой стороне [2]. К этому выводу приводят и численные расчеты [3]. Фактором, определяющим ориентацию этих валов, в случае бесконечных слоев является угол наклона слоя по отношению к горизонту [4]. Положение равновесия при ненулевом угле наклона невозможно и основное течение представляет собой ламинарное подъемно-опускное движение. Многочисленные теоретические расчеты, лабораторные и численные эксперименты, последний обзор которых представлен в [5], показывают, что конвективные валы выстраиваются вдоль основного течения. Такие валы принято называть продольными.

Для анализа влияния совместного действия упомянутых факторов на ориентацию валов необходимо рассматривать наклонные замкнутые слои. Этот вопрос в литературе освещен слабо. В экспериментальной работе [6], посвященной конвекции в узкой щели показано, что наличие боковых стенок не дает возможность развиваться продольным валам в наклонном положении. Вместо них возникает цепочка валов, ориентированных перпендикулярно линиям тока основного течения. Такие валы называют поперечными. Возможность возникновения продольных валов в работе не рассматривалась. В работе [7] вместо щели рассмотрен прямоугольный бокс, в котором наблюдалось возникновение как продольных, так и поперечных валов. Исследование было ограничено определением границ устойчивости по отношению к поперечным и продольным возмущениям в рамках линейной теории для фиксированной геометрии бокса. Критические параметры течения определялись итерационно, так как в условиях замкнутой задачи от них

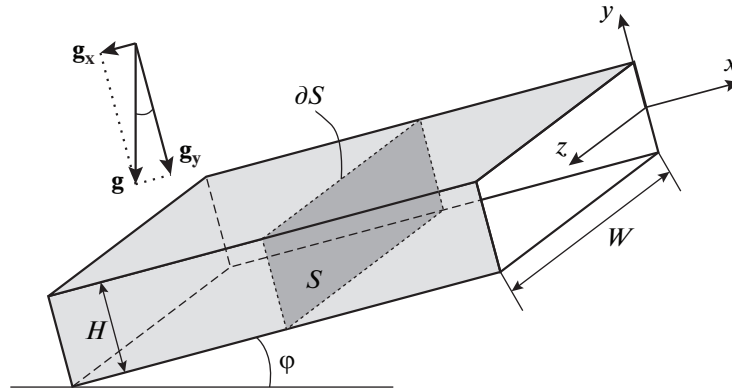


Рис. 1. Наклонный прямоугольный канал

зависит представление самого течения. Авторами было показано, что при малых углах наклона течение теряет устойчивость по отношению к малым возмущениям вдоль стенок, а при больших — вдоль потока.

Хорошо известно, что вблизи вертикального положения слоя течение теряет устойчивость по отношению к продольным возмущениям [8]. Таким образом, область наблюдения вторичного течения в общем случае можно разбить на три участка, границы которых задаются двумя углами наклона, при которых происходит смена ориентации валов. Меньший угол φ_1 определяет границу взаимодействия двух описанных факторов. Как было отмечено ранее, в литературе практически отсутствуют данные по значению этого угла. Большой угол φ_2 определяет границу тепловой и гидродинамической неустойчивости. Здесь известна сильная зависимость от теплофизических свойств среды и у жидких металлов может достигать нулевого значения [9]. Взаимное положение этих углов подчиняется соотношению $\varphi_1 \leq \varphi_2$.

В настоящей работе представлено исследование взаимного влияния двух факторов на значение угла φ_1 , а также влияние ширины канала на угол φ_2 . Поскольку при данном взаимодействии влияние торцевых стенок несущественно, исследование проведено для бесконечно длинного канала прямоугольного сечения при условии наличия торцевых перегородок, которые замыкают систему.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача термогравитационной конвекции в канале (рис. 1). Канал расположен под углом φ к горизонту и имеет прямоугольное поперечное сечение S размером $H \times W$. Между стенками, отстоящими на расстояние H друг от друга, задается постоянная разность температур Θ , причем нижняя в горизонтальном положении стенка нагрета сильнее. Две другие стенки теплоизолированы. Предполагается, что торцы канала ограничены бесконечно удаленными твердыми стенками. Это приводит к циркуляционному движению жидкости в канале. Вдоль более нагретой стенки жидкость поднимается вверх, а вдоль менее нагретой — опускается вниз. Интенсивность движения определяется углом наклона. Чем больше значение угла, тем выше скорость. В горизонтальном положении жидкость покоится. Разность температур определяет устойчивость течения.

Данное течение может быть описано безразмерной системой уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + T \gamma \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} \mathbf{u} \nabla T = \frac{\nabla^2 T}{\text{Pr}} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.3)$$

где \mathbf{u}, p, T – безразмерные вектор скорости, отклонение давления и температуры от своих средних значений. Уравнения записаны в прямоугольной системе координат, которую удобно связать с каналом. Наклон канала определяется направлением орта силы тяжести $\gamma = (-\sin\varphi, -\cos\varphi, 0)$. Процедура обезразмеривания является общепринятой для задачи об устойчивости течения в наклонных слоях, когда в качестве масштаба времени применяется характерная величина переноса импульса вязкостью ν между нагреваемыми стенками [10]. Задача включает в себя 2 геометрических параметра и 2 физических соответственно: φ – угол наклона канала относительно горизонтали; W/H – безразмерная ширина канала; $Ra = g\beta\Theta H^3/\nu\chi$ – число Рэлея (β – коэффициент объемного расширения); $Pr = \nu/\chi$ – число Прандтля (χ – коэффициент температуропроводности).

Значения функций T и $\mathbf{u} = (u, v, w)$ на твердых стенках определяются граничными условиями

$$\mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm W/2H \quad (1.4)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad T = \mp 0.5 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5 \quad (1.5)$$

Условие замкнутости течения выражается нулевым расходом жидкости через поперечное сечение канала

$$\iint_S u dy dz = 0 \quad (1.6)$$

2. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

Основное течение жидкости в наклонном канале может быть рассчитано из системы (1.1)–(1.6) при трех предположениях: стационарность и однонаправленность течения, теплопроводный режим теплообмена. Последнее, как показывают эксперименты, справедливо для вертикальных слоев, а следовательно и каналов, бесконечной протяженности. Получаемая при этом система уравнений оказывается линейной

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + T \sin \varphi \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = T \cos \varphi \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.4)$$

Точное решение системы (2.1)–(2.4) можно получить методом Фурье в виде ряда с известными аналитическими выражениями для его коэффициентов

$$u_0 = \frac{2H}{W} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_k z}{\mu_k^3} \left(\frac{\sinh \mu_k y}{\sinh \mu_k / 2} - 2y \right), \quad \left(\mu_k = \frac{H(2k-1)\pi}{W} \right) \quad (2.5)$$

$$p_0 = \text{const} - \frac{1}{2} y^2 \cos \varphi \quad (2.6)$$

$$T_0 = -y \quad (2.7)$$

Анализ устойчивости течения (2.5)–(2.6) проведен в рамках линейной теории. Уравнения для амплитуд возмущений выводятся (см. [11] подстановкой в (1.1)–(1.5) суммы стационарного основного течения \mathbf{u}_0, T_0, p_0 и нормальных возмущений

$$(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{p}) \propto (\hat{\mathbf{u}}, \hat{T}, \hat{p})(y, z) \exp \lambda t + ikx \quad (2.8)$$

где величины с символами $\langle \hat{\ } \rangle$ означают амплитуды возмущений.

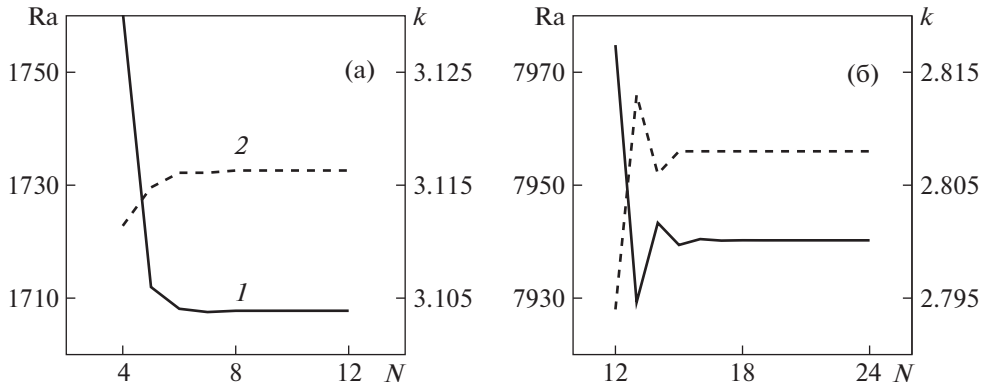


Рис. 2. Критическое число Ra (1) и волновое число k (2) при различном числе точек коллокации по нормали к изотермическим поверхностям для горизонтального (а) и вертикального (б) слоев

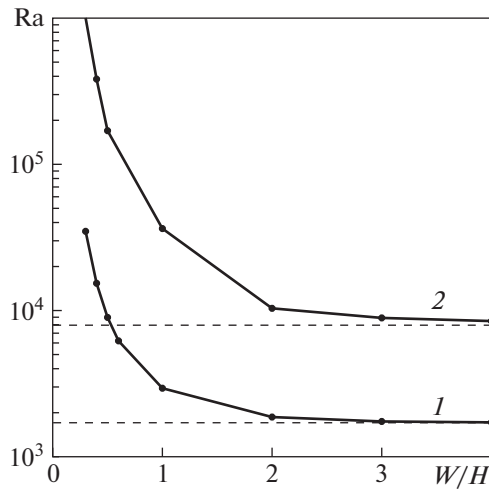


Рис. 3. Зависимость критического числа Ra от ширины: 1 – горизонтальный канал, 2 – вертикальный канал

Известно [12], что неустойчивость основного течения в наклонном слое носит монотонный характер при числах Pr < 12.7. Предполагая справедливость этого допущения для возмущений (2.8), декремент λ оказывается действительным и граница устойчивости может быть найдена при λ = 0. В этом случае амплитудные уравнения представляют обобщенную задачу на собственные значения для числа Ra

$$\frac{Ra}{Pr}(\mathbf{u}_0 \nabla \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}} \nabla \mathbf{u}_0) + \nabla \hat{p} + \nabla^2 \hat{\mathbf{u}} = \hat{T} \gamma \tag{2.9}$$

$$Ra(\mathbf{u}_0 \nabla \hat{T} + \hat{\mathbf{u}} \nabla T_0) - \nabla^2 \hat{T} = 0 \tag{2.10}$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \tag{2.11}$$

$$\nabla = ik + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla^2 = -k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

с однородными граничными условиями

$$\hat{\mathbf{u}} = 0, \quad \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm W/2H \tag{2.12}$$

$$\hat{\mathbf{u}} = 0, \quad \hat{T} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm 0.5 \tag{2.13}$$

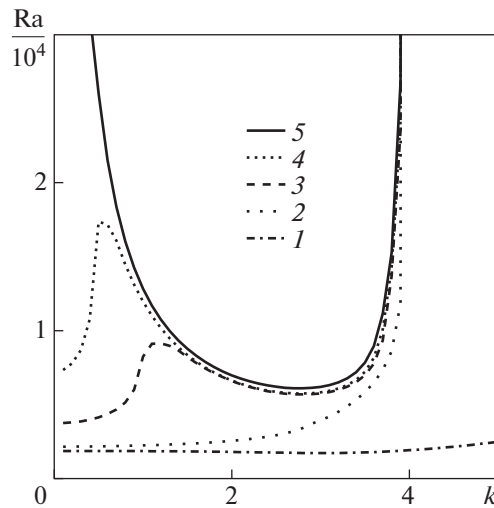


Рис. 4. Нейтральные кривые для различных значений угла φ при числе $Pr = 0.71$: 1–5 – $\varphi = 0, 30, 60, 75, 90^\circ$

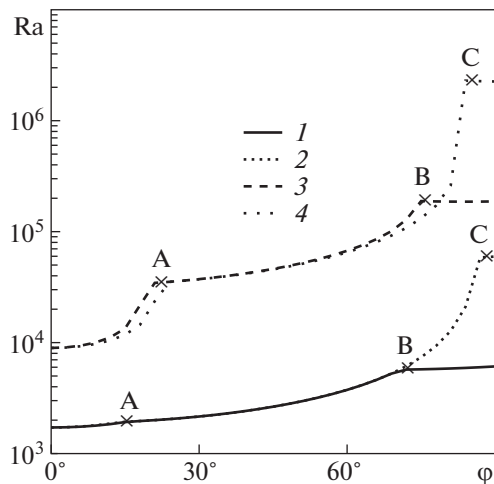


Рис. 5. Критические кривые для продольных и поперечных возмущений для двух значений отношения W/H и числа Pr : 1 – $Pr = 0.71, W/H = 4$; 2 – $Pr = 6.7, W/H = 4$; 3 – $Pr = 0.71, W/H = 0.5$; 4 – $Pr = 6.7, W/H = 0.5$

Задача на собственные значения (2.9)–(2.13) решается методом, разработанным и реализованным автором в [13]. Решение задачи аппроксимируется полиномом Лагранжа, построенным в нулях полинома Чебышева и удовлетворяющим граничным условиям для возмущений. Для нахождения коэффициентов полинома применяется метод коллокаций в нулях полинома Чебышева. Эта процедура была разработана для анализа устойчивости течений в замкнутых объемах, но может быть применена и к частично неограниченным областям, таким как слои и каналы.

Метод [13] был протестирован на задачах об устойчивости течения в вертикальных и горизонтальных слоях. На рис. 2а и 2б показана зависимость критического числа Ra и волнового числа k от количества точек аппроксимации между изотермическими поверхностями. Хорошо прослеживается сходимость метода. Критические значения в горизонтальном слое совпадают с данными монографии [14]. При этом замечено, что приемлемое для сходимости количество точек в вертикальном слое больше, чем в горизонтальном. Во всех последующих расчетах выбиралось число точек, соответствующее сходимости в вертикальном слое.

Критические числа Ra в горизонтальном и вертикальном каналах должны иметь большие значения вследствие влияния боковых стенок. Это подтверждают результаты расчетов, показанных на рис. 3. С увеличением ширины канала критическое число Ra выходит на асимптоту,

соответствующую значению, вычисленному для слоя. Соответствующие асимптоты обозначены пунктирными прямыми.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Задача на собственные значения (2.9)–(2.13) для чисел Ra решалась в диапазоне углов наклона от 0 до 90° при ширине канала от 0.5 до 4 и числе Pr от 0.2 до 6.7 .

При анализе устойчивости течения относительно нормальных возмущений главной характеристикой является нейтральная кривая, отделяющая области параметров, при которых течение устойчиво и неустойчиво.

В отличие от наклонного слоя, где требуется анализировать нейтральные кривые относительно продольных и поперечных возмущений, в рассматриваемой задаче возмущения периодичны вдоль одного направления, вдоль канала. На рис. 4 построены нейтральные кривые для разных углов наклона. Точка минимума нейтральной кривой определяет критическое число Ra , при котором происходит потеря устойчивости течения, и соответствующее ему критическое волновое число k . В зависимости от угла φ можно наблюдать два локальных минимума, один из которых находится в области длинноволновых возмущений. Если глобальный минимум наблюдается при $k = 0$, то критическими оказываются продольные возмущения, в противном случае – поперечные. Можно заметить, что возможны оба вида критических возмущений. Так из рис. 4 видно, что для продольных возмущений минимум наблюдается при $\varphi = 60^\circ$, а для поперечных при $\varphi = 75^\circ$.

Для определения точки смены направления критических мод был построен график зависимости критического числа Ra от угла наклона канала (рис. 5). Представленные на графике кривые соответствуют различным значениям ширины канала и числа Pr . Все представленные графики имеют по два излома, обозначенные на фигуре буквами. Изломы A соответствуют углу φ_1 , а изломы B и C – углу φ_2 . При этих углах возможно появление системы как продольных, так и поперечных валов. По данным, полученным из нейтральных кривых, левее φ_1 и правее φ_2 основное течение теряет устойчивость по отношению к поперечным возмущениям, а между указанными углами – к продольным. Таким образом, общий вид критической кривой, о котором упоминалось во введении, оказывается кусочно-гладким с двумя точками разрыва производной (см. кривую 3).

В предельном случае бесконечно широкого канала [9], т.е. слоя, левый излом отсутствует, а положение правого определяется числом Pr . Это можно заметить и в случае широких каналов. Между точкой B кривой 1 и точкой C кривой 2 расстояние по углу равно приблизительно 15° . В случае узких каналов первый излом практически не смещается при вариации числа Pr . Точка A на кривых 1 и 2 обозначает один излом, который незначительно смещается вправо, если сравнить кривые 3 и 4. Последнее соответствует узким каналам.

При уменьшении ширины канала общий график смещается вверх, в зону больших чисел Ra (кривые 3, 4). Это объясняется запирающим действием боковых стенок, тормозящих движением из-за условия прилипания. При этом левая точка A кривой 1 смещается вправо приблизительно на 8° , в то время как точка B остается практически на месте (смещение на 2°). Таким образом, сужение канала приводит к расширению диапазона углов наклона, при которых наблюдаются поперечные валы, за счет увеличения φ_1 по мере сужения канала.

При одном и том же числе $Pr = 6.7$ в узких каналах замечено, что точка C смещается левее, а при $Pr = 0.71$ точка B смещается правее. Таким образом характер зависимости угла φ_2 от ширины канала меняется при различных числах Pr .

Замечено, что в отличие от монотонной асимптотики числа Рэлея, волновое число оказывается выше в узких каналах, а при $W/H \sim 3$ достигает минимального значения, после чего возрастает до значения в горизонтальном слое.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построено аналитическое решение задачи тепловой конвекции в наклонном канале при теплопроводном режиме теплообмена. Проведен анализ линейной устойчивости полученного решения. Показано, что потеря устойчивости может происходить при воздействии пространственных возмущений периодичных вдоль или поперек потока.

Определены два угла наклона, при которых происходит смена направления критических возмущений. Установлено, что при вариации ширины канала значение меньшего угла φ_1 существенно меняется, в то время как изменения большего угла φ_2 невелики. При вариации числа Pr наблюдается обратная ситуация: слабое изменение угла φ_1 и сильное изменение угла φ_2 .

Представленные результаты показывают, что изучение конвективных валов в плоской постановке задачи при наличии угла наклона не отражает действительной картины течения и может быть произведено лишь с учетом влияния боковых границ.

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-31-00521.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гетлинг А.В.* Конвекция Рэлея–Бенара. М.: Едиториал УРСС, 1999. 248 с.
2. *Stork K., Möller U.* Convection in boxes: experiments // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 54. № 4. P. 599–611.
3. *Davis S.H.* Convection in a box: linear theory // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 30. № 3. P. 465–478.
4. *De Graaf J., Van Der Held E.* The relation between the heat transfer and the convection phenomena in enclosed plane air layers // *Appl. Sci. Res.* 1953. V. 3. № 6. P. 393–409.
5. *Bodenschatz E., Pesch W., Ahlers G.* Recent developments in Rayleigh–Benard convection // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2000. V. 32. P. 709–778.
6. *Symons J.G., Peck M.K.* Natural convection heat transfer through inclined longitudinal slots // *J. Heat Transfer.* 1984. V. 106. № 4. P. 824–829.
7. *Kirchartz K.R., Oertel J.H.* Three-dimensional thermal cellular convection in rectangular boxes // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 192. P. 249–286.
8. *Бирюх Р.В., Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Рудаков Р.Н.* Гидродинамическая и тепловая неустойчивость стационарного конвективного движения // *ПММ.* 1968. Т. 32. № 2. С. 256–263.
9. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Об устойчивости плоскопараллельного конвективного движения относительно пространственных возмущений // *ПММ.* 1969. Т. 33. № 5. С. 855–860.
10. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
11. *Drazin F.* *Introductin to hydrodynamic stability.* Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 258 p.
12. *Korpela S.A.* A study on the effect of Prandtl number on the stability of the conduction regime of natural convection in an inclined slot // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1974. V. 17. № 2. P. 215–222.
13. *Pivovarov D.* The solution of problems of the stability of three-dimensional convective flows in a closed rectangular cavity by the collocation method // *J. Appl. Mathem. Mechanics.* 2014. V. 78. № 2. P. 137–143.
14. *Chandrasekhar S.* *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability.* N.Y.: Dover Publ., 1961. 652 p.