

УДК 532.5.031.2:536.25

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЕСТЕСТВЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО НАГРЕТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСТИ С СИНУСОИДАЛЬНЫМИ ГОФРИРОВАННЫМИ СТЕНКАМИ, ЗАПОЛНЕННОЙ СТЕПЕННОЙ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

© 2019 г. А. Салехпур<sup>a,\*</sup>, М. А. А. Садатлу<sup>b,\*\*</sup>, А. Соджуди<sup>a,\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Department of Mechanical Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

<sup>b</sup>Department of Engineering and Science, Sharif University of Technology-International Campus, Kish, Iran

\* E-mail: ali.salehpour@alumni.ut.ac.ir

\*\* E-mail: aminabdolahi.mech@yahoo.com

\*\*\* E-mail: sojoudi@ut.ac.ir

Поступила в редакцию 01.11.2017 г.

После доработки 17.04.2018 г.

Принята к публикации 20.06.2018 г.

Выполнено подробное численное исследование двумерного нестационарного конвективно-го теплообмена в дифференциально нагретом прямоугольном сосуде с синусоидальными гофрированными боковыми стенками, находящимися при постоянных температурах. Четырехсторонний объем заполнен степенной неньютоновской жидкостью, а его правая и левая стенки равномерно охлаждены и нагреты соответственно. Верхняя и нижняя стенки поддерживаются адиабатическими, а боковым стенкам придана синусоидальная гофрированная форма. Уравнения, описывающие задачу, решаются методом конечных объемов. Течение жидкости и теплообмен рассчитаны в диапазонах изменения показателя в степенном законе  $n$  от 0.6 до 1.4, числа Рэлея  $Ra$  от  $10^3$  до  $10^7$ , амплитуды волнистости  $CA$  от 0.1 до 0.5 и частоты волнистости  $CF$  синусоидальных боковых стенок от 1 до 5. Полученные результаты исследованы при различных значениях  $Ra$ ,  $n$ ,  $CA$  и  $CF$  и представлены в виде линий тока, изотерм и средних чисел Нуссельта  $\overline{Nu}$  горячей боковой стенки. Представлены характеристики теплообмена и изучены эффекты мгновенного дифференциального нагрева с последующим нестационарным поведением жидкости в рассмотренном диапазоне определяющих параметров.

**Ключевые слова:** нестационарный конвективный теплообмен, дифференциально нагретый прямоугольник, степенная неньютоновская жидкость, синусоидальные гофрированные формы

**DOI:** 10.1134/S0568528119010122

Прямоугольные полости с дифференциально нагретыми стенками широко исследуются ввиду того, что они представляют собой важный объект физических и численных экспериментов, а также ввиду важных применений в технике, в том числе в солнечных коллекторах, консервировании пищевых продуктов, компактных теплообменниках, систем охлаждения электроники и т.д. Обширный обзор литературы, посвященной естественной конвекции ньютоновской жидкости в дифференциально нагретых полостях, можно найти в [1–4]. Следует заметить, что в реальных промышленных ситуациях вместо ньютоновских жидкостей часто используются неньютоновские.

Поведение неньютоновских жидкостей в дифференциально нагретых полостях впервые исследовалось в работах [5, 6]. Впоследствии было выполнено большое количество исследований в силу особого интереса к псевдопластическим жидкостям, таким как химикалии, продукты питания, полимеры, расплавленные пластики, нефтепродукты и различные природные среды. К настоящему времени многие исследователи уделили существенное внимание физическим и реологическим свойствам подобных жидкостей, используя экспериментальные и численные методы [7–12].

В работе [13] исследована нестационарная плавучая конвекция степенной неньютоновской жидкости в дифференциально нагретой квадратной полости. Авторы применили метод конечных объемов и показали, что реологические свойства оказывают заметное влияние на нестационарное течение жидкости. Численные решения были в хорошем качественном соответствии с результатами масштабного анализа. Показано, что для больших  $Ra$  и умеренных значений числа Прандтля  $Pr$  интенсивность конвекции возрастает и теплообмен в целом увеличивается при уменьшении показателя  $n$ . Таким образом, эволюция течения в нестационарном процессе протекает быстрее. В работе [14] сделана попытка определить влияние нагретых боковых стенок, к которым приложен постоянный тепловой поток, на картину течения и теплообмен в квадратной полости, наполненной степенной неньютоновской жидкостью. Показано, что в случае сдвигового разжижения неньютоновской жидкости значения  $Nu$  оказываются больше, чем для ньютоновской жидкости при тех же номинальных значениях  $Ra$  вследствие интенсификации конвективного переноса. Аналогично, показано, что с увеличением показателя степени в степенном законе, то есть при  $n > 1$ ,  $\overline{Nu}$  стремится к единице.

Исследовано также влияние отношения сторон прямоугольной полости [15–17], конфигурации боковых стенок [18–22] и наклона полости [23–25] на течение ньютоновской жидкости и характеристики теплообмена.

Благодаря последним исследованиям течений в полостях, можно указать две характерные особенности использования наножидкостей в качестве неньютоновских жидкостей, а также применения активных и пассивных методов управления [26, 27] (например, применение магнитных полей или пористых сред) для интенсификации теплообмена [28–34].

Например, в [31] при помощи конечно-разностного метода решеточных уравнений Больцмана исследованы теплообмен и производство энтропии в наножидкости с частицами меди, находящейся в пористой полости. В этой работе рассмотрены различные параметры, включая  $Ra$ , объемное содержание наночастиц и число Дарси. Обнаружено, что увеличение концентрации наночастиц или  $Ra$  приводит к усилению теплообмена и росту энтропии.

В работе [32] методом конечных элементов исследовано МГД-течение наножидкости в полости с движущейся крышкой и гибкой боковой стенкой. Увеличение числа Ричардсона и уменьшение модуля Юнга гибкой стенки приводят к увеличению теплопереноса.

Широко применяются боковые стенки синусоидальной гофрированной формы. Этот вид стенок используется как модификация прямоугольной полости и упоминается в ряде исследований по естественной конвекции воздуха [35–42]. Применение полостей с волнистыми стенками связано с рядом важных технических приложений, как, например, для систем охлаждения микроэлектромеханических устройств, микроэлектронных устройств теплопереноса, солнечных коллекторов, теплообменников, подземных кабельных систем, резервуаров нефти и газа, а также в геофизических приложениях [43–47]. Большинство исследований в этой области проведено для полостей, заполненных воздухом, так что поведение неньютоновских жидкостей в полостях сложной геометрии изучено мало. Для различных значений  $SA$  и  $CF$  обнаружены различные картины течения; в частности, имеют место зоны в ядре потока и в области, прилегающей к стенке, в которых течение остается неизменным в ходе нестационарного процесса. Для случая неньютоновских жидкостей отсутствуют данные о влиянии волнистых стенок.

Цель настоящей работы состоит в подробном исследовании нестационарной естественной конвекции в диапазоне параметров  $Ra$ ,  $n$ ,  $SA$  и  $CF$  в случае синусоидальных боковых стенок. Рассматривается степенная неньютоновская жидкость в прямоугольной полости с синусоидальными гофрированными боковыми стенками. Основное внимание уделено влиянию определяющих параметров на картину течения и характеристики теплообмена в диапазонах  $10^3 < Ra < 10^7$ ,  $0.6 < n < 1.4$ ,  $0.1 < SA < 0.5$  и  $1 < CF < 5$ .

## 1. ПОСТАНОВКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается двумерная квадратная полость длины  $H$  с синусоидальными гофрированными стенками (рис. 1). Свободное пространство полости заполнено степенной неньютоновской жидкостью. Левая боковая стенка нагревается до постоянной температуры  $T_H$ , а правая стенка охлаждается до постоянной температуры  $T_c$ . Верхняя и нижняя прямолинейные стенки считаются теплоизолированными. Ввиду разницы температур левой и правой стенок возникает естественная конвекция в присутствии поля тяжести. В приближении Буссинеска основные уравнения принимают вид [13]

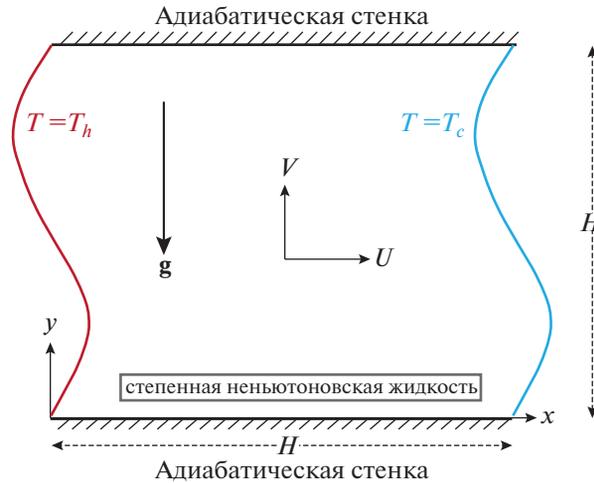


Рис. 1. Физическая модель и система координат

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) + g\beta(T - T_0) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (1.4)$$

где  $(u, v)$  означают компоненты скорости в горизонтальном  $x$  и вертикальном  $y$  направлениях соответственно,  $T$  – температура,  $p$  – давление,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\rho$ ,  $\beta$  и  $\alpha$  представляют собой плотность, коэффициент теплового расширения и коэффициент температуропроводности жидкости при опорной температуре  $T_0$  соответственно. Проводится обезразмеривание по следующим формулам

$$(X, Y) = \frac{(x, y)}{H}, \quad (U, V) = \frac{(u, v)}{\alpha/H}, \quad P = \frac{p}{\rho_0 \alpha^2 / H}, \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c} \quad (1.5)$$

На стенках  $U$  и  $V$  равны нулю. Тепловые граничные условия имеют вид

$$\theta = 1 \quad \text{при} \quad X = 0 \quad (1.6)$$

$$\theta = 0 \quad \text{при} \quad X = 1 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad \text{при} \quad Y = 0 \quad \text{и} \quad Y = 1 \quad (1.8)$$

Уравнение вертикальных поверхностей имеет вид

$$y = CA \sin \left[ CF \left( \frac{2\pi}{H} x \right) \right] \quad (1.9)$$

Движение жидкости описывается функцией тока  $\Psi$ , определяемой компонентами скорости  $u$  и  $v$ . Соотношение между функцией тока и компонентами скорости имеет вид

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1.10)$$

где  $\Psi = 0$  соответствует стенкам полости. Главная часть постановки задачи состоит в поиске адекватного основного соотношения, связывающего компоненты тензора напряжений с основ-

ными кинематическими переменными. В данном случае рассматривается чисто вязкая степенная неньютоновская жидкость, подчиняющаяся степенному закону Оствальда–де Вилиа [7]

$$\tau_{ij} = 2\mu_a D_{ij} = 2K(2D_{kl}D_{kl})^{(n-1/2)} D_{ij} \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) содержит два материальных параметра, а именно, показатель подвижности  $K$  и показатель в степенном законе  $n$ ;  $D_{ij}$  означает тензор скоростей деформации. Очевидно, что  $n = 1$  соответствует ньютоновским жидкостям с коэффициентом вязкости  $K$ ,  $n > 1$  – дилатантным жидкостям со сдвиговым утолщением и  $n < 1$  – псевдопластическим жидкостям со сдвиговым истончением. Вязкость псевдопластических жидкостей велика и изменяется при изменении температуры, оказывая непосредственное влияние на тепловые поля и поля течения. В данной постановке зависимость  $K$  от температуры не рассматривается и, разумеется, рассматриваются малые перепады температуры ( $\Delta T$ ).

В случае двумерных декартовых координат величина  $D_{ij}$  имеет вид

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.12)$$

Из уравнений (1.11) и (1.12) можно вывести следующее уравнение для кажущейся вязкости [7]

$$\mu_a = K \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\}^{n-1/2} \quad (1.13)$$

Очевидно, что при  $n = 1$   $K$  означает обычную вязкость. При  $n$ , не равном единице (неньютоновская жидкость), предполагается сложная зависимость вязкости от свойств жидкости и градиентов компонент скоростей. Основываясь на физических соображениях в сочетании с методом проб и ошибок, можно ввести в рассмотрение следующий комплекс, состоящий из коэффициента подвижности  $K$ , показателя в степенном законе  $n$ , плотности жидкости  $\rho_0$ , и высоты полости  $H$  [7]

$$v' = \left( \frac{K}{\rho_0} \right)^{1/(2-n)} H^{2(1-n)/(2-n)} \quad (1.14)$$

Следует заметить, что величина  $v'$ , имеющая размерность  $m^2c^{-1}$ , имеет смысл, подобный кинематической вязкости ньютоновской жидкости. При помощи выражения (1.14) можно следующим образом выразить числа  $Pr$  и  $Ra$  [7]:

$$Pr = \frac{\left( \frac{K}{\rho_0} \right)^{1/(2-n)} H^{2(1-n)/(2-n)}}{\alpha} \quad (1.15)$$

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TH^3}{\alpha \left( \frac{K}{\rho_0} \right)^{1/(2-n)} H^{2(1-n)/(2-n)}} \quad (1.16)$$

Величина  $\overline{Nu}$  для горячей стенки изучалась в многочисленных работах. Аналогичным образом исследуем величину  $\overline{Nu}$  для левой горячей волнистой стенки; она определяется следующим образом

$$\overline{Nu} = \int_0^1 Y \left[ -\frac{\partial \theta}{\partial X} \right] dY \quad (1.17)$$

## 2. МЕТОД РАСЧЕТА

Для решения системы безразмерных уравнений сохранения массы, импульса и энергии использован метод конечных объемов. Для разностного представления вязких и термодиффузионных членов в уравнениях (1.2)–(1.4) применена центральная схема второго порядка, а для адвективных членов в тех же уравнениях – противопоточная схема также второго порядка. Согласова-

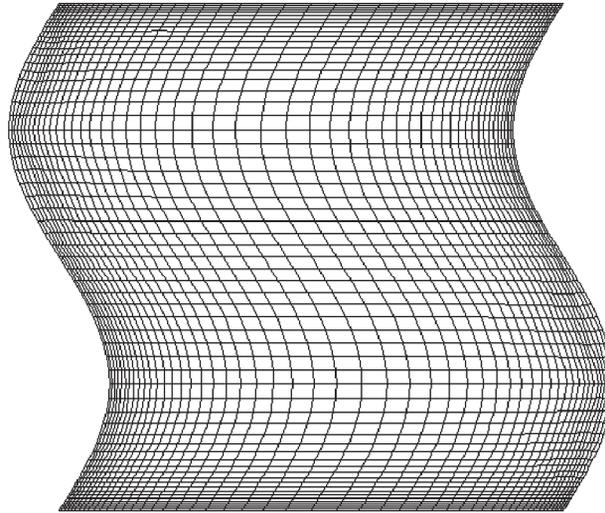


Рис. 2. Образец структурированной сетки, демонстрирующий ее основные особенности

ние между полями давления и скорости достигается при помощи известного алгоритма SIMPLE [48], который неявным образом согласуется с бездивергентным характером течения несжимаемой жидкости (то есть сохранению массы для несжимаемой жидкости). Разностные уравнения для узла сетки  $p$  могут быть записаны в следующем сокращенном виде:

$$a_p \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b_p \quad (2.1)$$

где  $\phi$  – неизвестная примитивная переменная,  $a_p$  и  $b_p$  – коэффициенты дискретизации в узле “ $p$ ” и нижний индекс  $nb$  указывает на узлы сетки, соседние с узлом “ $p$ ”. В качестве критерия сходимости принимается достижение величины  $10^{-6}$  всеми относительными (нормированными) невязками  $R_\phi$ , определяемыми следующим образом:

$$R_\phi = \sum_{Cell.p} |a_{nb} \phi_{nb} + b_p - a_p \phi_p| / \sum_{Cell.p} |a_p \phi_p| \quad (2.2)$$

В работе использованы согласованные с поверхностями, неортогональные, неравномерные, соотнесенные сетки. Они построены со сгущением узлов к стенкам, где ожидаемы большие градиенты переменных и сильнее проявляются эффекты вязкости [49]. На рис. 2 представлена структурированная сетка с ячейками в виде параллелограммов. Дополнительно проведен анализ сеточной чувствительности для случая простой (негофрированной) геометрии. С этой целью рассмотрен случай с  $Ra = 10^7$ ,  $n = 0.6$  и  $Pr = 100$ , рассчитанный на сетках с элементами девяти различных размеров. Для каждого количества элементов сетки определялось число  $\overline{Nu}$  горячей стенки и вычислялось его относительное изменение сравнительно с предыдущим значением.

Таблица 1. Геометрия сетки. Тест для квадратной полости при  $Ra = 10^7$ ,  $n = 0.6$  и  $Pr = 100$

Тип сетки	Количество элементов сетки	$\overline{Nu}$	Относительное различие (%)	Время расчета (с)
Чрезвычайно грубый	292	45.958	—	440
Очень грубый	635	42.582	7.345	580
Грубый	810	42.001	1.364	990
Нормальный	1354	41.547	1.08	1890
Тонкий	2856	41.016	0.99	1770
Более тонкий	9658	40.918	0.23	1890
Очень тонкий	24589	40.910	0.019	2600
Чрезвычайно тонкий	33894	40.909	0.002	2850

Таблица 2. Валидация вычислительного кода для квадратной полости

Ra	Pr	$n$	$\overline{Nu}$ , данная работа	$\overline{Nu}$ [13]	$\overline{Nu}$ [1]	Ошибка (%)
$10^7$	100	0.6	40.918	41.02	–	0.26
$10^6$	100	0.6	17.469	17.51	–	0.28
$10^7$	100	0.8	24.875	24.97	–	0.40
$10^7$	100	1	17.454	17.52	–	0.39
$10^7$	$10^4$	0.6	21.891	22.05	–	0.72
$10^5$	100	0.6	6.122	6.15	–	0.48
$10^3$	0.71	1	1.128	–	1.118	0.89
$10^4$	0.71	1	2.251	–	2.243	0.35
$10^5$	0.71	1	4.589	–	4.519	0.34
$10^6$	0.71	1	8.881	–	8.800	0.91

Следует заметить, что для самого первого случая относительное изменение  $\overline{Nu}$  не определялось. В табл. 1 приведены результаты, соответствующие всем девяти размерам сетки, а также времена расчета. Можно видеть, что относительное изменение  $\overline{Nu}$  убывает с ростом числа ячеек сетки. Чрезвычайно тонкие сетки обеспечивают наилучшую точность, но, имея в виду, что соответствующие времена расчета слишком велики, мы остановились на более тонких сетках. Вообще говоря, нет сильно выраженного различия между результатами, полученными на чрезвычайно и более тонких сетках.

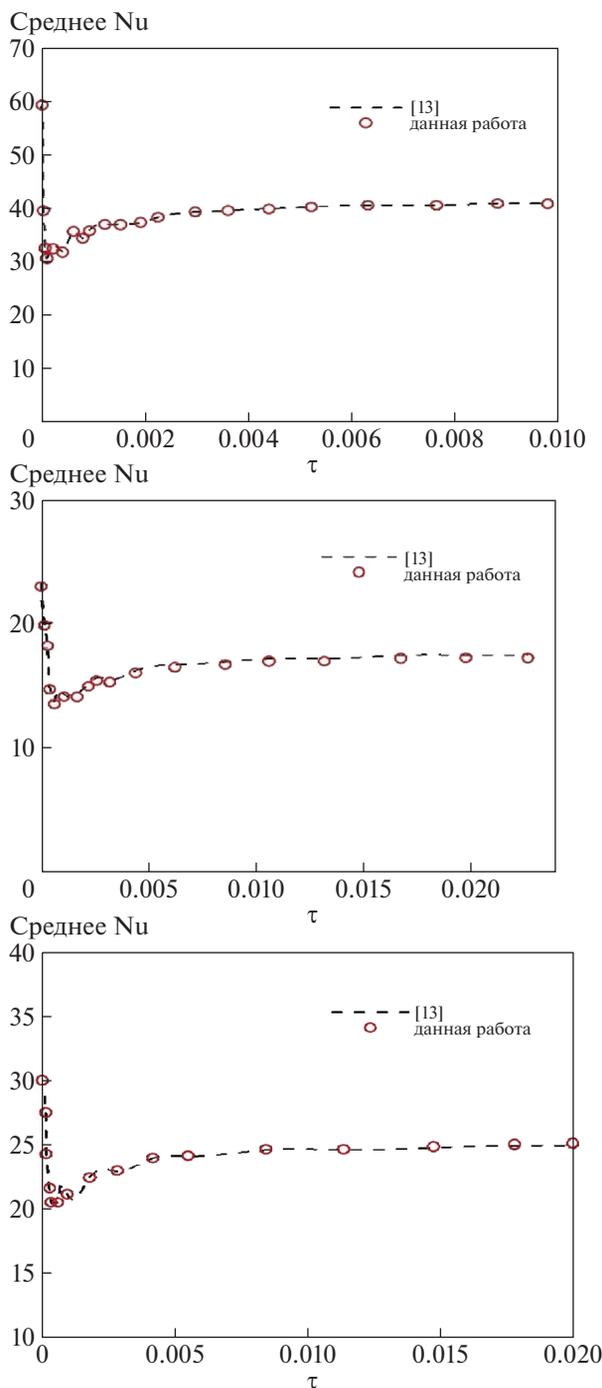
Для выяснения точности использованного вычислительного кода проведено сравнение между результатами, полученными в настоящей работе и предыдущих исследованиях. В табл. 2 приведены данные для величины  $\overline{Nu}$  нагретой стенки простой полости, наполненной неньютоновской жидкостью с различными реологическими свойствами (при различных значениях показателя степени в степенном законе). Проведенное сравнение показывает, что использованный вычислительный код обеспечивает высокую точность и вполне пригоден для расчетов в выбранном диапазоне определяющих параметров.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В настоящем разделе описано численное моделирование в выбранном диапазоне определяющих параметров, а именно при Ra, меняющемся от  $10^3$  до  $10^7$ ,  $n$  от 0.6 до 1.4 и параметров синусоидальных боковых стенок CA от 0.1 до 0.5 и CF от 1 до 5. С целью анализа полей течения и тепловых процессов в вышеупомянутом диапазоне параметров построены линии тока и изотермы. Кроме того, сравнение различных вариантов проводится по значениям  $\overline{Nu}$  на нагретой стенке. Следует заметить, что в данной работе расчеты проведены при постоянном значении Pr = 100.

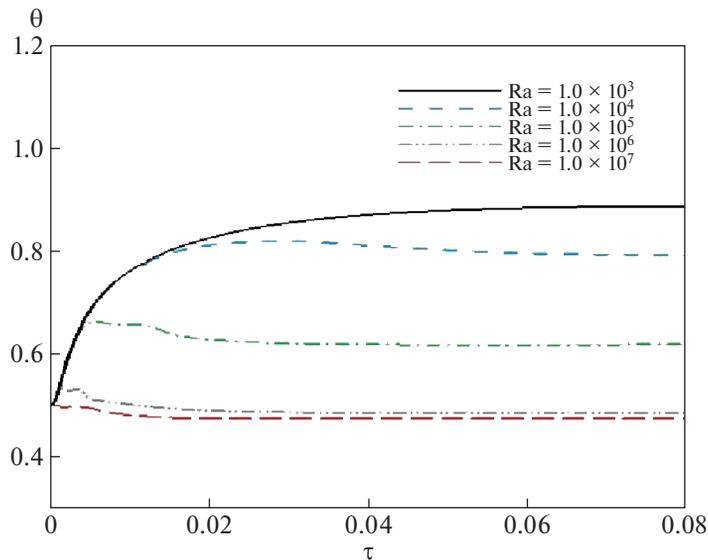
На рис. 3а–3в рассчитанные зависимости от времени величины  $\overline{Nu}$  нагретой стенки сравниваются с численными результатами работы [13]. Результаты находятся в хорошем соответствии; таким образом, метод настоящей работы позволяет провести расчет нестационарных процессов с точностью, сравнимой с точностью [13]. На рис. 3а Ra и  $n$  равны  $10^7$  и 6 соответственно. При малых и промежуточных значениях времени нестационарный процесс имеет колебательный характер. Причиной этих кратковременных пульсаций являются волны, бегущие по пограничному слою в начальные моменты времени. При средних и больших значениях времени эти колебания подавляются. При уменьшении Ra или увеличении  $n$  колебательный характер процесса становится менее выраженным, что показывают рис. 3б и 3в. В этих случаях колебания менее заметны и затухают сравнительно быстро.

Далее рассматривается изменение безразмерной температуры в выбранной точке (0.01, 0.5) вблизи нагретой стенки полости в зависимости от безразмерного времени при различных значениях Ra. На рис. 4 Ra меняется от  $10^3$  до  $10^7$ , параметры CA и CF равны 0.1 и 1, а сам процесс рас-



**Рис. 3.** Сравнение эволюции среднего числа Нуссельта на нагретой стенке простого квадрата (среднее значение Nu для  $Pr = 100$ ) с данными [13]; (а)  $n = 0.6, Ra = 10^7$ , (б)  $n = 0.6, Ra = 10^6$ , (в)  $n = 0.8, Ra = 10^7$ .

смотрен от мгновенного дифференциального нагрева стенки при  $\tau = 0$  до достижения стационарного состояния. Можно заметить, что безразмерная температура в выбранной точке сначала резко растет, а затем входит в промежуточный переходной режим. Начальный подъем безразмерной температуры связан с абсолютной теплопроводностью пограничного слоя в начальной стадии эволюции. После периода резкого роста безразмерной температуры устанавливается промежуточное состояние. Переходная стадия характеризуется подъемами и понижениями кривых при больших значениях  $Ra$ . При уменьшении  $Ra$  переходная стадия исчезает, а подъемы и понижения на кривых сглаживаются вследствие того, что определяющим механизмом теплопе-



**Рис. 4.** Зависимость безразмерной температуры  $\theta$  от безразмерного времени  $\tau$  для точки  $(0.01, 0.5)$  при  $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, n = 1, CA = 0.1, CF = 1$

реноса становится теплопроводность. Изменения температуры при меньших значениях  $Ra$  растут ввиду снижения уровня конвективного движения. Кроме того, при бóльших значениях  $Ra$  для достижения стационарного состояния требуется большее время. Начальные и промежуточные стадии четче выражены для меньших значений  $Ra$ , а соответствующие им промежутки времени с увеличением  $Ra$  убывают. Стационарное состояние начинается при  $\tau = 0.05$  для  $Ra = 10^3$  и при меньших значениях времени в других случаях.

На рис. 5 при  $n = 1, Ra = 10^5, CF = 1$  и  $CA = 0.1$  представлено изменение картин изотерм с момента мгновенного дифференциального нагрева стенок до достижения стационарного состояния. С самого начала процесса, носящего пульсационный характер, по полости бегут волны. В начальные моменты времени вблизи гофрированных боковых стенок образуются два слоя жидкости, а именно горячий и холодный слои, связанные с левой горячей волнистой и правой холодной волнистой стенками. Эти слои движутся в полости прямолинейно и параллельно верхней и нижней границам, на которых образуются пограничные слои, с образованием волн, набегающих на верхнюю границу у горячей стенки и нижнюю границу у холодной стенки. Из пограничных слоев, начиная с областей вторжения волн, жидкость входит в центральную часть полости. По истечении определенного времени это движение прекращается и достигается стационарное состояние в полости. Для этого состояния на фигурах можно видеть горизонтальную стратификацию жидкости и слои изотерм.

Далее были рассмотрены тепловые процессы и картины течения степенной неньютоновской жидкости в дифференциально нагретой полости с синусоидальными волнистыми стенками в стационарном состоянии. Для этого состояния построены изотермы и линии тока, представленные на рис. 6. Для изучения влияния изменения  $Ra$  в стационарном состоянии исследование проведено при постоянных значениях  $n, CA$  и  $CF$ , равных 1, 0.1 и 1 соответственно. Можно видеть, что при  $Ra = 10^3$  сгущение изотерм вблизи боковых стенок не наблюдается, а проникновение к верхним и нижним стенкам незначительно. Низкая плотность изотерм и их, в основном, вертикальная ориентированность при  $Ra = 10^3$  говорят о том, что в этом случае теплоперенос в полости в значительной степени определяется теплопроводностью. Картина разреженных линий тока у боковых стенок и малая площадь центральной зоны в полости также свидетельствуют о низком уровне конвекции при  $Ra = 10^3$  и об определяющем влиянии теплопроводности в теплопереносе. При увеличении  $Ra$  изотермы сгущаются, а набегающие волны расширяют зону своего действия вследствие увеличения уровня плавучести. При этом изотермы в центральной зоне становятся все более плоскими, имея, однако, резкие изгибы на своих концах. Что касается линий тока, очевидно, что рост  $Ra$  ведет к интенсификации течения, чего и следовало ожидать,

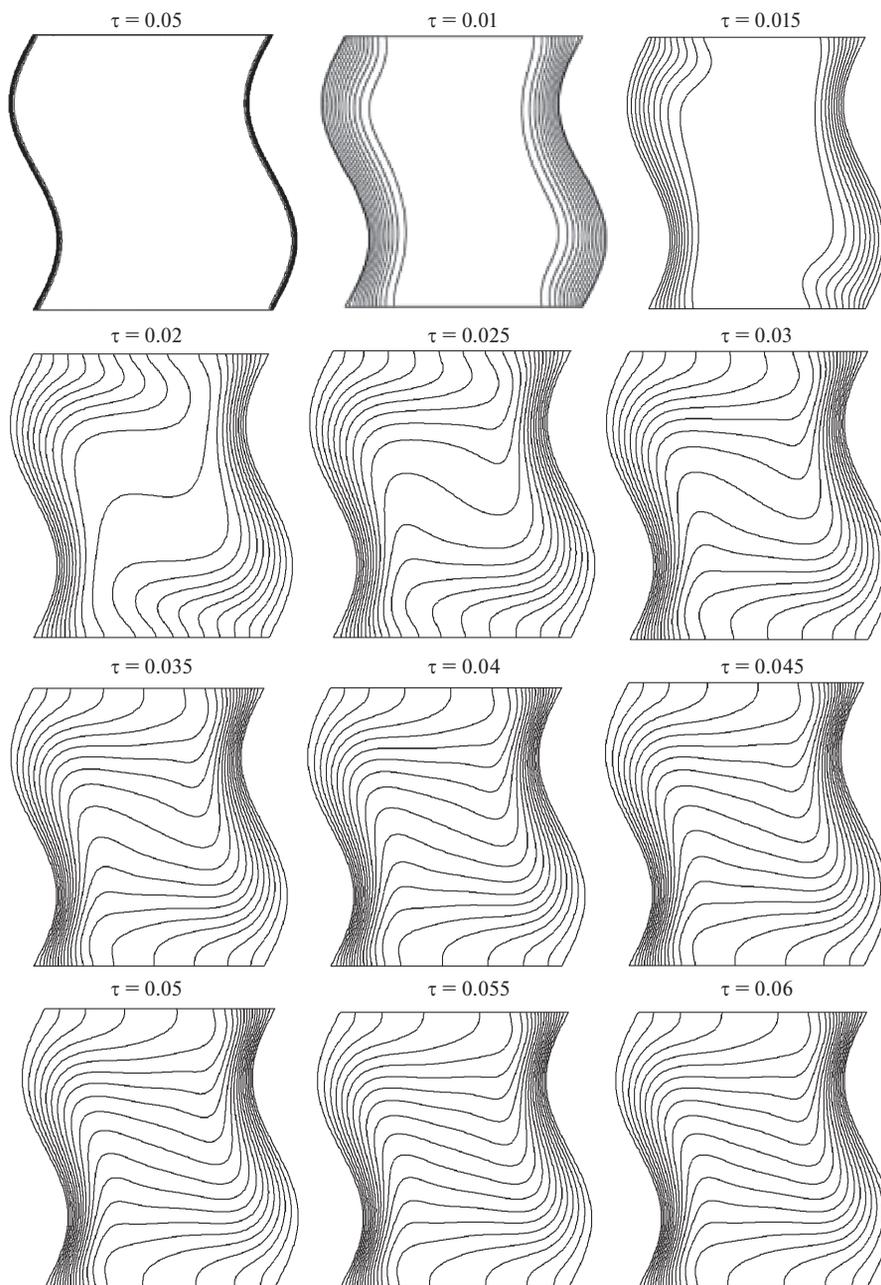
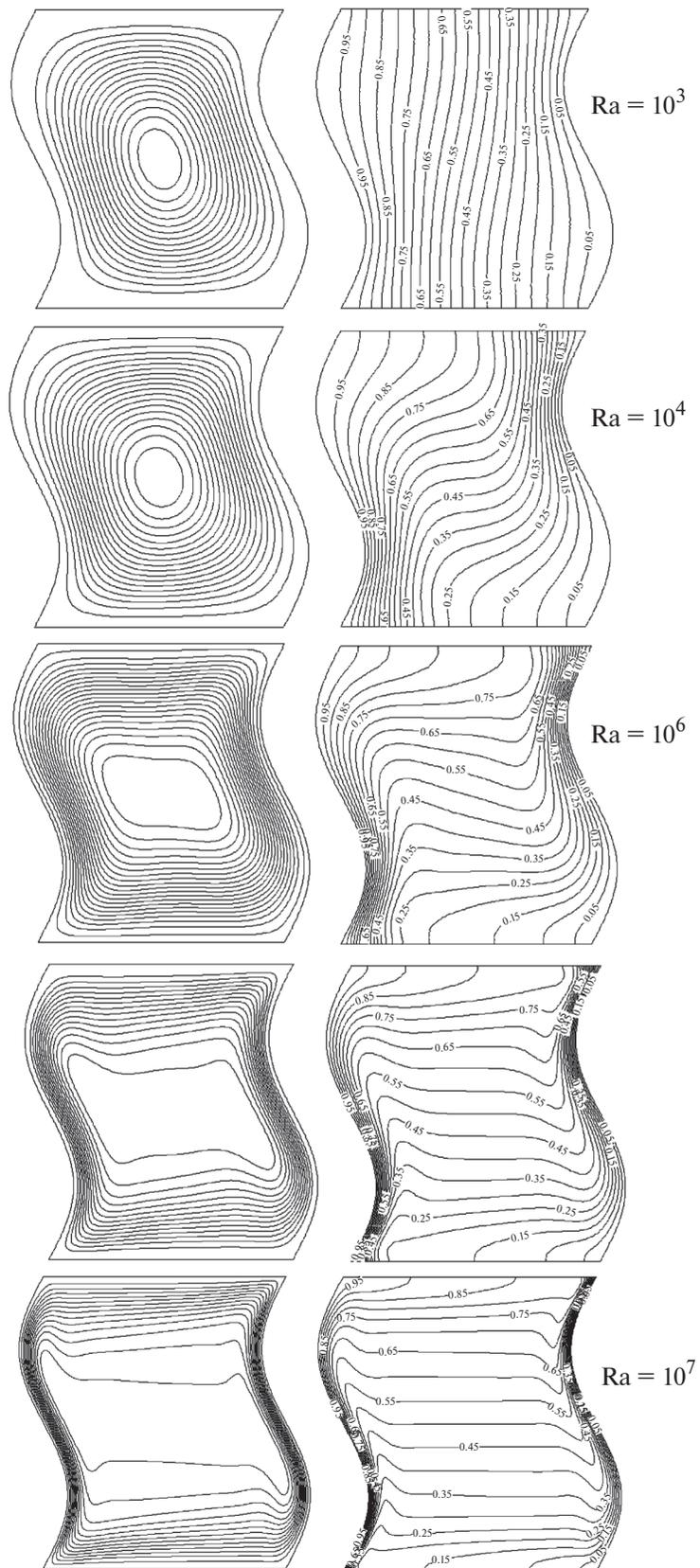


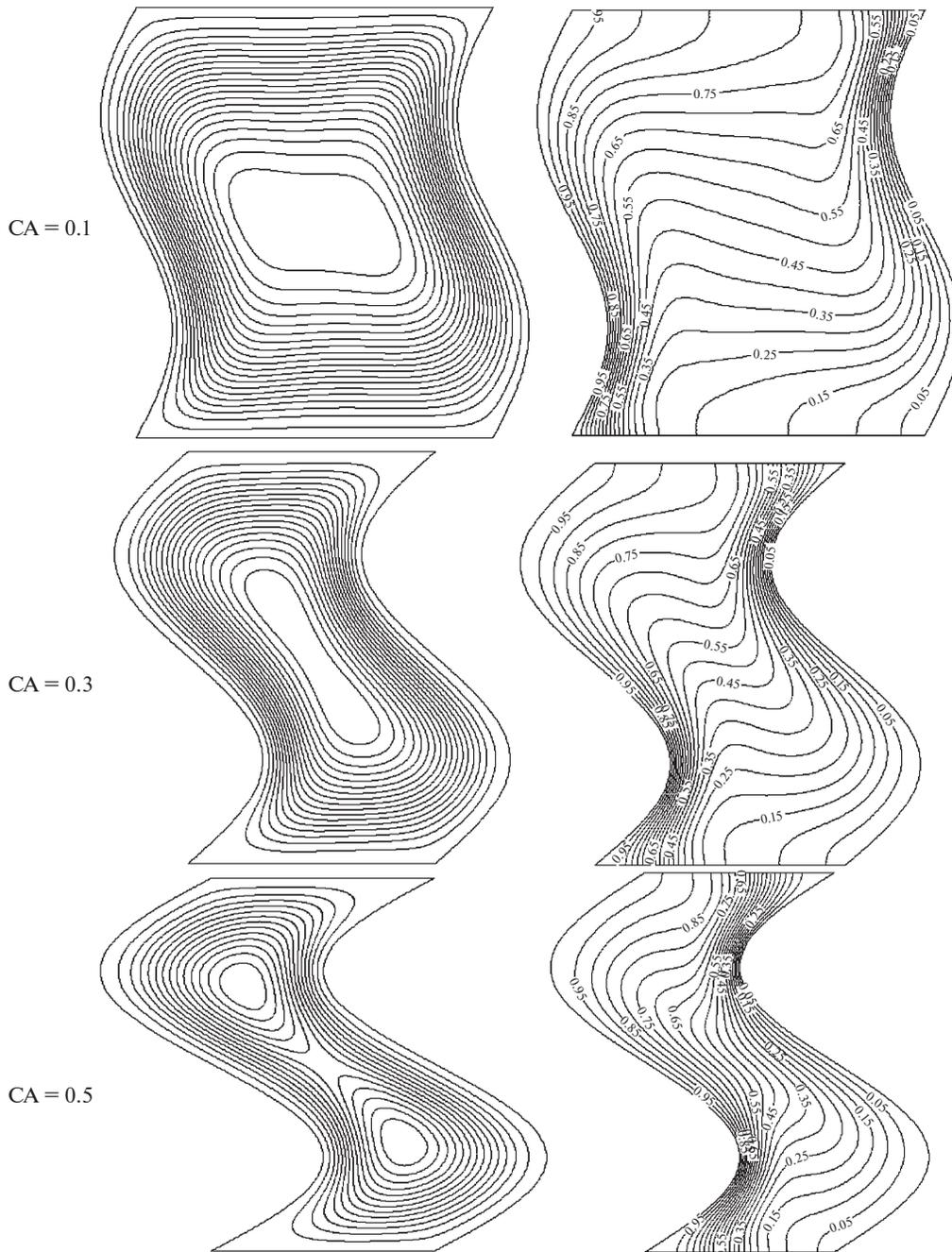
Рис. 5. Развитие изотерм в полости в зависимости от безразмерного времени  $\tau$  при  $n = 1$ ,  $Ra = 10^5$ ,  $CA = 0.1$ ,  $CF = 1$

так как этот рост усиливает эффект плавучести. Для всех значений  $Ra$  линии тока сгущаются в окрестности стенок, особенно боковых, тогда как в центральной зоне они более разрежены.

На рис. 7 представлены изотермы и линии тока для различных амплитуд волнистости  $CA = 0.1, 0.3$  и  $0.5$  при постоянных  $Ra = 10^5$ ,  $CF = 1$ ,  $n = 1$ . Эти значения взяты постоянными для выявления влияния параметра  $CA$ . Можно проследить сокращение неизменной зоны в результате нестационарных процессов при увеличении волнистости  $CA$ . В центральной зоне остается узкая область, не затронутая нестационарными процессами в ранней и промежуточной фазах и стационарном состоянии, в частности действием набегающих волн, и температура в ней остается неизменной. Как показано на рис. 7, при увеличении  $CA$  изотермы у боковых стенок сгущаются, что указывает на сжатие теплового пограничного слоя. Горизонтальная стратификация изотерм в средней части полости изменяется особенно сильно, способствуя развитию теплообмена. Увеличение  $CA$  приводит к уменьшению этой узкой зоны. Рассмотрение картин изотерм прямо по-



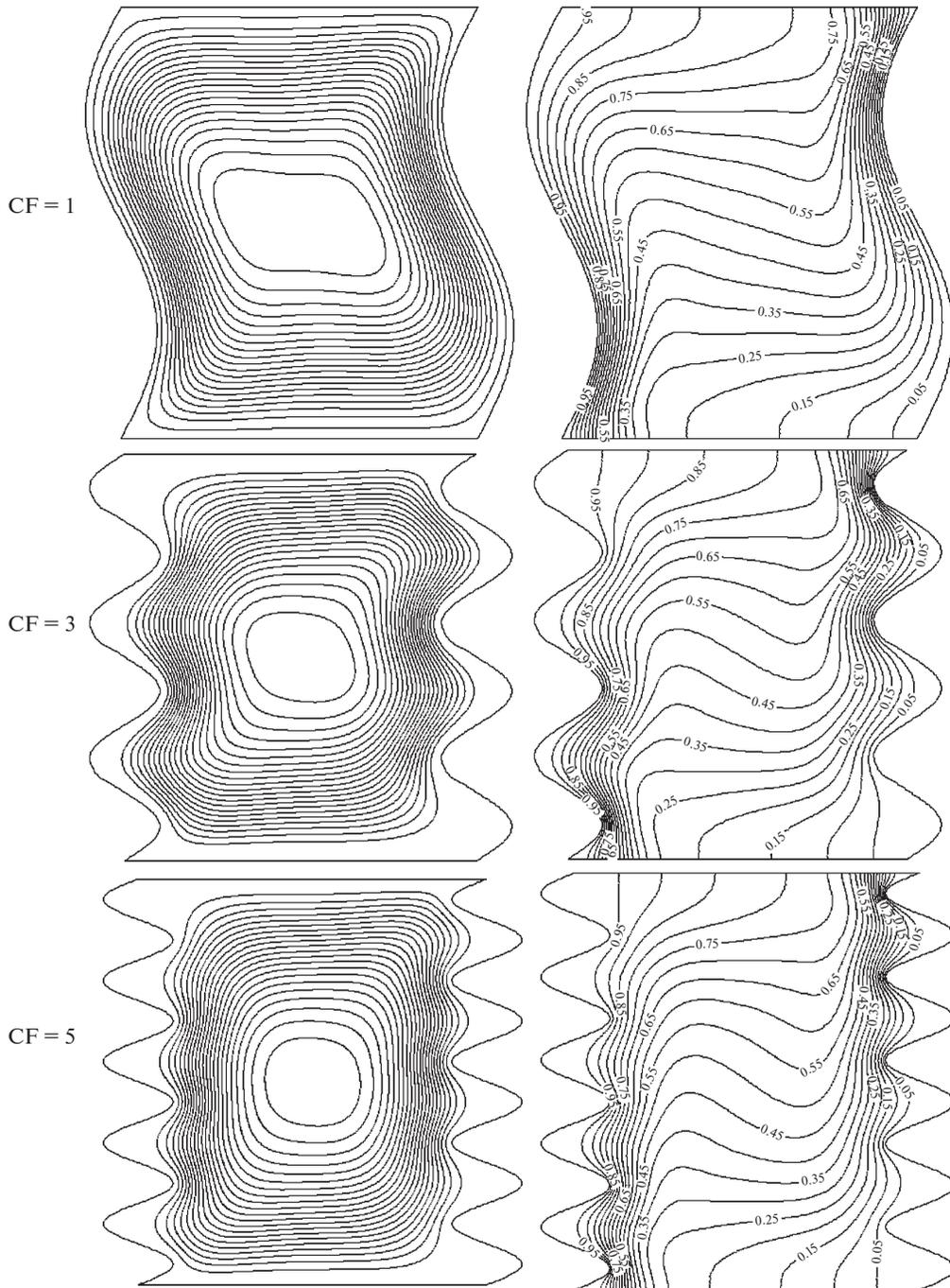
**Рис. 6.** Линии тока (слева) и изотермы (справа) в стационарном состоянии для различных чисел Рэлея при  $n = 1$ ,  $Pr = 100$ ,  $CA = 0.1$ ,  $CF = 1$ .



**Рис. 7** Линии тока (слева) и изотермы (справа) в стационарном состоянии для различных  $CA$  при  $n = 1$ ,  $Pr = 100$ ,  $Ra = 105$ ,  $CF = 1$ .

казывает уменьшение тонкой области в центральной зоне при увеличении  $CA$  от 0.1 до 0.3 и затем от 0.3 до 0.5.

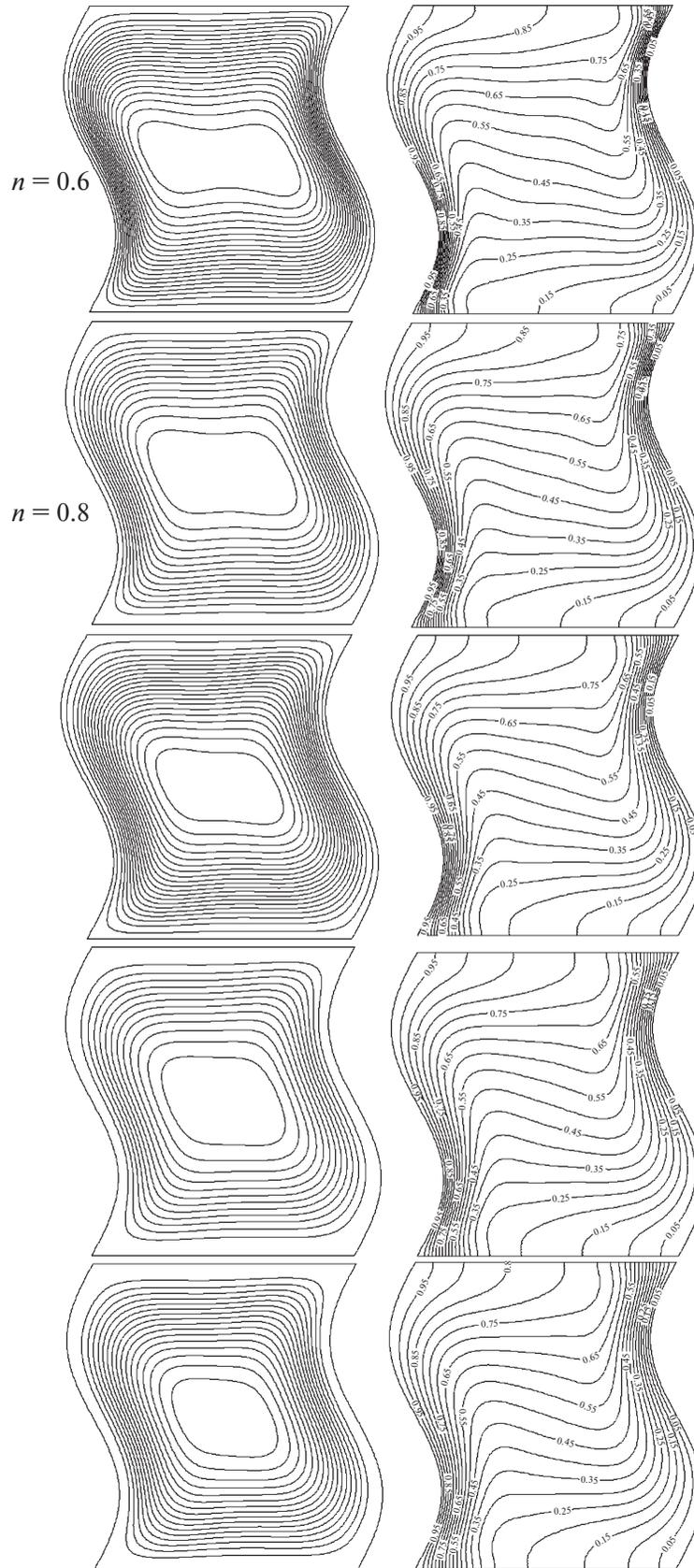
Рисунок 8 демонстрирует влияние  $CF$  на картину линий тока и изотерм внутри полости. При увеличении  $CF$  в центральной зоне наблюдается значительно меньше изменений по сравнению со случаем изменения  $CA$ . В то же время изменения  $CF$  коренным образом влияют на тепловые процессы и течение жидкости вблизи гофрированных стенок. Градиенты температуры вблизи изгибов горячей и холодной волнистых стенок уменьшаются, возрастая, однако, с ростом  $CF$ . В то же время с ростом  $CF$  центральная зона постепенно сокращается в размерах, а изотермы для случая  $CF = 5$  более искривлены по сравнению со случаем  $CF = 1$ .



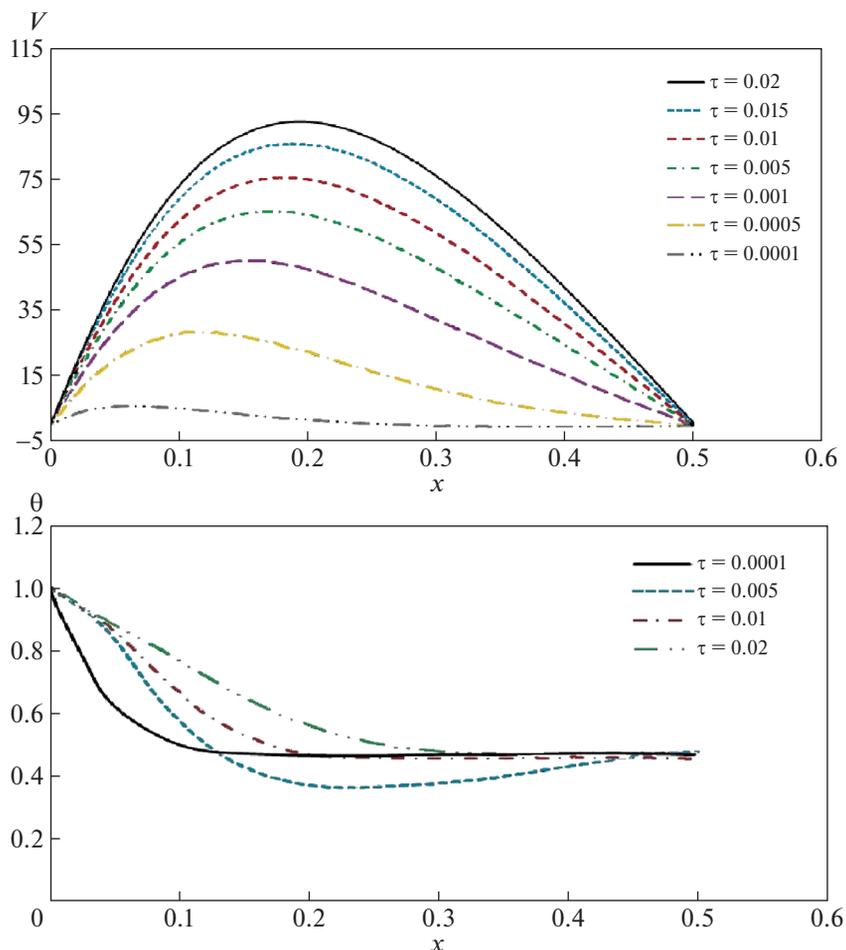
**Рис. 8.** Линии тока (слева) и изотермы (справа) в стационарном состоянии для различных CF при  $n = 1$ ,  $Pr = 100$ ,  $Ra = 10^5$ ,  $CA = 0.1$

На рис. 9 представлены изотермы и линии тока для различных значений показателя степени в степенном законе  $n = 0.6, 0.8, 1, 1.2$  и  $1.4$  при постоянных  $CA = 0.1$ ,  $Ra = 10^5$  и  $CF = 1$ . Можно видеть, что при  $n = 0.6$  в центральной зоне полости образуется продолговатая горизонтальная ячейка, а при увеличении показателя  $n$  эта ячейка приобретает более симметричную форму, что приводит к уменьшению размеров не испытывавшей изменений области. Также видно, что при увеличении  $n$  резкие изгибы на краях изотерм становятся более тупыми, что указывает на меньший уровень теплообмена.

Профили безразмерных температуры и скорости в среднем сечении представлены на рис. 10; показано изменение этих параметров при  $0 \leq X \leq 0.5$  и  $Y = 0.5$ . Оба профиля обладают горизонтальной симметрией по отношению к линии, отстоящей на равные расстояния от боковых стенок.



**Рис. 9.** Линии тока (слева) и изотермы (справа) в стационарном состоянии для различных  $n$  при  $Pr = 100$ ,  $Ra = 10^5$ ,  $CF = 1$ ,  $CA = 0.1$



**Рис. 10.** Безразмерная скорость (а) и безразмерная температура (б) на отрезке  $0 \leq X \leq 0.5$  при  $Y = 0.5$  для различных значений безразмерного времени  $\tau$ ;  $n = 1$ ,  $Pr = 100$ ,  $Ra = 10^5$ ,  $CA = 0.1$ ,  $CF = 1$

Рисунок 10а показывает, что вблизи границы безразмерная скорость мала вследствие условия прилипания на стенке. Затем она немного растет, достигая пика недалеко от стенки, и падает, принимая нулевое значение в центральной зоне. При увеличении  $\tau$  общая картина остается прежней, но величина максимума безразмерной скорости возрастает. Кроме того, положение максимума отступает от боковой стенки вследствие нарастания пограничного слоя; уменьшение скорости до нуля в крайней точке профиля указывает на существование не затронутой изменениями зоны в центральной части полости.

На рис. 10б представлена эволюция температуры в той же области, что и на рис. 10а. Безразмерная температура убывает от горячей стенки к центральной зоне. В начальный момент времени  $\tau = 0.0001$  существует обширная стационарная зона, а поведение температуры указывает на то, что механизм теплопереноса у левой горячей стенки связан с теплопроводностью. С увеличением  $\tau$  центральная зона начинает подвергаться действию потока тепла от горячей стенки. С ростом времени данный профиль испытывает ряд изменений, указывающих на рост теплового пограничного слоя у волнистой горячей стенки. При  $\tau = 0.005$  зарегистрирован провал в профиле температуры. Следует заметить, что в окончательных стационарных тепловых пограничных слоях температура убывает монотонно.

Рассмотрим далее характеристики теплообмена на горячей стенке. На рис. 11 построены зависимости величины  $\overline{Nu}$  от времени в нескольких ситуациях. На рис. 11а показано изменение  $\overline{Nu}$  при  $10^3 \leq Ra \leq 10^7$ ,  $CA = 0.1$  и  $CF = 1$ . Очевидно, что увеличение  $Ra$  приводит к увеличению градиента температуры на волнистых стенках, что, в свою очередь, приводит к интенсификации теплообмена и росту величины  $\overline{Nu}$ . В начальные моменты времени  $\overline{Nu}$  имеет большую величину, благодаря меньшему продвижению пограничного слоя. С увеличением  $\tau$   $\overline{Nu}$  резко падает в

направлении средней области. Из картины изотерм на рис. 6 ясно видно, что при более высоких значениях  $Ra$  тепловой пограничный слой сильнее прижат к боковым стенкам, а горизонтальная стратифицированная область шире, чем при меньших  $Ra$ . В установившемся течении зависимость от  $Ra$  обратная; это означает, что при увеличении  $Ra$  начальная и промежуточная стадии сокращаются и стационарное состояние теплообмена достигается быстрее.

На рис. 11б показано влияние  $CA$  на  $\overline{Nu}$ : большим значениям  $CA$  соответствуют большие значения  $\overline{Nu}$ . Нестационарное поведение имеет тот же характер, что и выше. Увеличение  $CA$  приводит к значительному увеличению  $\overline{Nu}$  вследствие сгущения изотерм, что означает утончение теплового пограничного слоя. Рисунок 11в демонстрирует влияние  $CF$  на  $\overline{Nu}$ . С увеличением степени волнистости заметен небольшой рост  $\overline{Nu}$ . Можно считать, что частота не влияет на картину течения при  $CA = 0.1$ . Увеличение  $CF$  выше значения  $CF = 5$  лишено смысла, так как рост  $\overline{Nu}$  с увеличением  $CF$  невелик. Как следует из рис. 8, картины изотерм и линий тока существенно не меняются, а слабое сгущение изотерм вблизи боковых стенок и сокращение неизменной центральной зоны приводят лишь к незначительному развитию теплообмена. Сравнивая рис. 11б и 11в, можно видеть, что увеличение параметра  $CA$  боковых стенок приводит к гораздо большему развитию теплообмена, чем увеличение  $CF$ . Как следует из рис. 11г, с увеличением показателя степени  $n$  растет время, за которое достигается стационарное состояние, вследствие пониженного уровня конвективного движения. Помимо того, величина  $\overline{Nu}$  уменьшается с ростом показателя  $n$ , что отмечалось и в работе [13]. На рис. 9 можно видеть, что сгущение изотерм вблизи боковых стенок убывает с ростом  $n$ , что означает утолщение теплового пограничного слоя.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теплообмен и течение степенной неньютоновской жидкости при дифференциальном нагреве прямоугольной полости с гофрированными синусоидальными боковыми стенками исследовано методом конечных объемов. Для дискретизации вязких и термодиффузионных членов применена центральная разностная схема второго порядка, а для адвективных членов — противоположная схема также второго порядка. Соответствие между полями скорости и давления достигается при помощи алгоритма SIMPLE. Для сравнения с предшествующими результатами выполнен анализ сеточной точности. Приведены подробные численные результаты по полям течения и температуры, а также значения величины  $\overline{Nu}$  на горячей стенке. Обнаружено сильное влияние параметра  $CA$ , показателя  $n$  неньютоновской жидкости и числа Рэлея  $Ra$  на течение и теплообмен. Ниже приводятся основные результаты работы.

Стационарное течение устанавливается за меньшее время при больших  $Ra$ , что находится в соответствии с законом подобия  $t_{\text{steady}} \propto 1/Ra^{1/2}$  [13].

При увеличении  $CF$  влияние этого параметра распространяется на картину течения у границ, а увеличение  $CA$  влияет на картину течения в центральной зоне.

В отличие от  $CA$ ,  $CF$  несильно влияет на картину течения.

С ростом  $Ra$  теплообмен усиливается, что проявляется в увеличении  $\overline{Nu}$ .

Увеличение  $\overline{Nu}$  с ростом  $CA$  гораздо значительнее, чем с ростом  $CF$ .

При увеличении показателя степени в степенном законе теплообмен в полости ослабевает, а время установления стационарного состояния возрастает.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *De Vahl Davis G.* Natural convection of air in a square cavity: A benchmark numerical solution // *Int. J. Numer. Methods Fluids*. 1983. V. 3. P. 249–264.
2. *Emery A.F., Lee J.W.* The effects of property variations on natural convection in a square enclosure // *J. Heat Transfer*. 1999. V. 121. P. 57.
3. *Aydin O., Unal A., Ayhan T.* Natural convection in rectangular enclosures heated from one side and cooled from the ceiling. // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1999. V. 42. P. 2345–2355.
4. *Ostrach S.* Natural convection in enclosures // *Adv. Heat Transfer*. 1972. V. 8. P. 161–227.
5. *Boger D.V.* Demonstration of upper and lower Newtonian fluid behaviour in a pseudoplastic fluid // *Nature*. 1977. V. 265. P. 126–128.

6. *Acrivos A.* A theoretical analysis of laminar natural convection heat transfer to non-Newtonian fluids // *AICbE J.* 1960. V. 6. P. 584–590.
7. *Emery A.F., Chi H.W., Dale J.D.* Free convection through vertical plane layers of non-Newtonian power law fluids // *J. Heat Transfer.* 1971. V. 93. P. 164.
8. *Chen T.Y.W., Wollersheim D.E.* Free convection at a vertical plate with uniform flux condition in non-Newtonian power-law fluids // *J. Heat Transfer.* 1973. V. 95. P. 123–124.
9. *Churchill S.W., Chu H.H.S.* Correlating equations for laminar and turbulent free convection from a vertical plate // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1975. V. 18. P. 1323–1329.
10. *Shulman Z.P., Baikov V.I., Zaltsgendler E.A.* An approach to prediction of free convection in non-newtonian fluids // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1976. V. 19. P. 1003–1007.
11. *Haq S., Kleinstreuer C., Mulligan J.C.* Transient free convection of a non-Newtonian fluid along a vertical wall // *J. Heat Transfer.* 1988. V. 110. P. 604.
12. *Pittman J.F.T., Richardson J.F., Sherrard C.P.* An experimental study of heat transfer by laminar natural convection between an electrically-heated vertical plate and both Newtonian and non-Newtonian fluids // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1999. V. 42. P. 657–671.
13. *Bin Kim G., Min Hyun J., Sang Kwak H.* Transient buoyant convection of a power-law non-Newtonian fluid in an enclosure // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2003. V. 46. P. 3605–3617.
14. *Turan O., Sachdeva A., Poole R.J., Chakraborty N.* Laminar natural convection of power-law fluids in a square enclosure with differentially heated sidewalls subjected to constant wall heat flux // *J. Heat Transfer.* 2012. V. 134. P. 122504.
15. *Turan O., Sachdeva A., Poole R.J., Chakraborty N.* Aspect ratio and boundary conditions effects on laminar natural convection of power-law fluids in a rectangular enclosure with differentially heated side walls // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2013. V. 60. P. 722–738.
16. *Cianfrini C., Corcione M., Habib E., Quintino A.* Effects of the aspect ratio on the optimal tilting angle for maximum convection heat transfer across air-filled rectangular enclosures differentially heated at sides // *J. Therm. Sci.* 2017. V. 26. P. 245–254.
17. *Cheong H.T., Siri Z., Sivasankaran S.* Effect of aspect ratio on natural convection in an inclined rectangular enclosure with sinusoidal boundary condition // *Int. Commun. Heat Mass Transfer.* 2013. V. 45. P. 75–85.
18. *Cho C.-C., Chen C.-L., Hwang J.-J., Chen C.-K.* Natural convection heat transfer performance of non-Newtonian power-law fluids enclosed in cavity with complex-wavy surfaces // *J. Heat Transfer.* 2013. V. 136. P. 14502.
19. *Sojoudi A., Saha S.C., Gu Y.T., Hossain M.A.* Steady natural convection of non-Newtonian power-law fluid in a trapezoidal enclosure // *Adv. Mech. Eng.* 2013. P. 1–8.
20. *Sheremet M.A., Groşan T., Pop I.* Steady-state free convection in right-angle porous trapezoidal cavity filled by a nanofluid: Buongiorno's mathematical model // *Eur. J. Mech. B/Fluids.* 2015. V. 53. P. 241–250.
21. *Kefayati G.R.* Simulation of magnetic field effect on natural convection of non-Newtonian power-law fluids in a sinusoidal heated cavity using FDLBM // *Int. Commun. Heat Mass Transfer.* 2014. V. 53. P. 139–153.
22. *Cho C.C., Chen C.L., Chen C.K.* Natural convection heat transfer performance in complex-wavy-wall enclosed cavity filled with nanofluid // *Int. J. Therm. Sci.* 2012. V. 60. P. 255–263.
23. *Sairamu M., Chhabra R.P.* Natural convection in power-law fluids from a tilted square in an enclosure // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2013. V. 56. P. 319–339.
24. *Mun G.S., Doo J.H., Ha M.Y.* Thermo-dynamic irreversibility induced by natural convection in square enclosure with inner cylinder. Part-I: Effect of tilted angle of enclosure // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2016. V. 97. P. 1102–1119.
25. *Vivek V., Sharma A.K., Balaji C.* Interaction effects between laminar natural convection and surface radiation in tilted square and shallow enclosures // *Int. J. Therm. Sci.* 2012. V. 60. P. 70–84.
26. *Webb R.L., Kim N.-H.* Principles of enhanced heat transfer. New York: Taylor Fr., 1994.
27. *A.E. Bergles.* Techniques to augment heat transfer. Handbook of heat Transfer. New York: McGraw-Hill, 1973.
28. *Liu Y., Lei C., Patterson J.C.* Natural convection in a differentially heated cavity with two horizontal adiabatic fins on the sidewalls // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2014. V. 72. P. 23–36.
29. *Sheremet M.A., Oztop H.F., Pop I., Al-Salem K.* MHD free convection in a wavy open porous tall cavity filled with nanofluids under an effect of corner heater // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2016. V. 103. P. 955–964.
30. *Kefayati G.R.* Simulation of heat transfer and entropy generation of MHD natural convection of non-Newtonian nanofluid in an enclosure // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2016. V. 92. P. 1066–1089.
31. *Kefayati G.H.R.* Heat transfer and entropy generation of natural convection on non-Newtonian nanofluids in a porous cavity // *Powder Technol.* 2016. V. 299. P. 127–149.
32. *Selimefendigil F., Öztop H.F., Chamkha A.J.* Fluid-structure-magnetic field interaction in a nanofluid filled lid-driven cavity with flexible side wall // *Eur. J. Mech. B/Fluids.* 2017. V. 61. P. 77–85.
33. *Hatami M.* Numerical study of nanofluids natural convection in a rectangular cavity including heated fins // *J. Mol. Liquids.* 2017. V. 233. P. 1–8.

34. *Mebrouk R., Kadja M., Lachi M., Fohanno S.* Numerical study of natural turbulent convection of nanofluids in a tall cavity heated from below // *Therm. Sci.* 2016. V. 20. P. 2051–2064.
35. *Das P.K., Mahmud S.* Numerical investigation of natural convection inside a wavy enclosure // *Int. J. Therm. Sci.* 2003. V. 42. P. 397–406.
36. *Saidi C., Legay-Desesquelles F., Prunet-Foch B.* Laminar flow past a sinusoidal cavity // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1987. V. 30. P. 649–661.
37. *Wang G., Vanka S.P.* Convective heat transfer in periodic wavy passages // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1995. V. 38. P. 3219–3230.
38. *Nishimura T., Ohori Y., Kawamura Y.* Flow characteristics in a channel with symmetric wavy wall for steady flow // *J. Chem. Eng. Japan.* 1984. V. 17. P. 466–471.
39. *Asako Y., Faghri M.* Finite-volume solutions for laminar flow and heat transfer in a corrugated duct // *J. Heat Transfer.* 1987. V. 109. P. 627.
40. *Hasan M.N., Saha S.C., Gu Y.T.* Unsteady natural convection within a differentially heated enclosure of sinusoidal corrugated side walls // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2012. V. 55. P. 5696–5708.
41. *Sojoudi A., Saha S.C., Khezerloo M., Gu Y.T.* Unsteady natural convection within a porous enclosure of sinusoidal corrugated side walls // *Transp. Porous Media.* 2014. V. 104. P. 537–552.
42. *Hussain S.H.* Analysis of heatlines and entropy generation during double-diffusive MHD natural convection within a tilted sinusoidal corrugated porous enclosure // *Eng. Sci. Technol. Int. J.* 2016. V. 19. P. 926–945.
43. *Mahmud S., Das P.K., Hyder N., Islam A.K.M.S.* Free convection in an enclosure with vertical wavy walls // 2002. V. 41. P. 440–446.
44. *Cho C., Chen C., Chen C.* Natural convection heat transfer performance in complex-wavy-wall enclosed cavity filled with nanofluid // *Int. J. Therm. Sci.* 2012. V. 60. P. 255–263.
45. *Esmailpour M., Abdollahzadeh M.* Free convection and entropy generation of nanofluid inside an enclosure with different patterns of vertical wavy walls // *Int. J. Therm. Sci.* 2012. V. 52. P. 127–136.
46. *Oztop H.F., Abu-nada E., Varol Y., Chamkha A.* Natural convection in wavy enclosures with volumetric heat sources // *Int. J. Therm. Sci.* 2011. V. 50. P. 502–514.
47. *Varol V., Oztop H.F.* Free convection in a shallow wavy enclosure // 2006. V. 33. P. 764–771.
48. *Patankar S.* Numerical heat transfer and fluid flow. Boca Raton: CRC Press, 1980.
49. *Thomas P.D., Middlecoff J.F.* Direct control of the grid point distribution in meshes generated by elliptic equations, 18 (n.d.). P. 652–656.

## Unsteady Natural Convection in a Differentially Heated Rectangular Enclosure Possessing Sinusoidal Corrugated Side Walls Loaded with Power Law Non-Newtonian Fluid

**Ali Salehpour<sup>a,\*</sup>, Mohamad Amin Abdolahi Sadatlu<sup>b,\*\*</sup>, and Atta Sojoudi<sup>a,\*\*\*</sup>**

<sup>a</sup>*Department of Mechanical Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran*

<sup>b</sup>*Department of Engineering and Science, Sharif University of Technology-International Campus, Kish, Iran*

<sup>\*</sup>*e-mail: ali.salehpour@alumni.ut.ac.ir*

<sup>\*\*</sup>*e-mail: aminabdolahi.mech@yahoo.com*

<sup>\*\*\*</sup>*e-mail: sojoudi@ut.ac.ir*

This research is a numerical analysis, exhaustively investigating two dimensional (2D) transient convective heat transfer in a differentially heated rectangle, possessing sinusoidal corrugated side walls and constant temperatures. The quadrilateral space is loaded with power law non-Newtonian fluid, plus the right and left walls are uniformly cooled and heated respectively. The top and bottom walls are retained as adiabatic and the side walls are recast exploiting sinusoidal corrugated shape. Governing equations of the problem are solved with the employment of the Finite Volume Method. The evaluation of fluid flow and heat transfer is conducted in such a manner that Power law index ( $n$ ) varies from 0.6 to 1.4, Rayleigh number ( $Ra$ ) from  $10^3$  to  $10^7$ , Corrugation Amplitude ( $CA$ ) from 0.1 to 0.5, and Corrugation Frequency ( $CF$ ) of sinusoidal side walls is in the range of 1 to 5. The results are revealed considering different amounts of  $Ra$ ,  $n$ ,  $CA$ , and  $CF$ ; they are delineated in terms of streamlines, isotherms, and average Nusselt number  $\overline{Nu}$  of the hot side wall. Further, heat transfer characteristics, the impacts of sudden differential heating as well as its consequential transient behavior upon fluid flow, velocity, and temperature plots are demonstrated in accordance with the scope of governing parameters.

**Keywords:** Transient convective heat transfer; Differentially heated rectangle; Power law non-Newtonian fluid; Sinusoidal corrugated shape