ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2019, № 2, с. 94–98

УДК 532.517.4

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ $k-\omega$-МОДЕЛИ ДАЛЬНЕГО ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА

© 2019 г. А. В. Шмидт[a,*]

[a]Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

* E-mail: schmidt@icm.krasn.ru

Поступила в редакцию 13.03.2018 г.
После доработки 16.07.2018 г.
Принята к публикации 16.07.2018 г.

Рассмотрена полуэмпирическая модель турбулентности $k-\omega$ в приближении дальнего следа. Искомыми величинами в данной модели являются дефект продольной осредненной компоненты скорости, турбулентная кинетическая энергия, удельная скорость диссипации энергии. Выполнен теоретико-групповой анализ модели, получена редуцированная автомодельная система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решена численно. Показано, что результаты расчетов согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

Ключевые слова: модель турбулентности, дальний след, автомодельность

DOI: 10.1134/S0568528119010134

Модель $k-\omega$, предложенная в основополагающей статье [1], является первой двухпараметрической моделью турбулентности с двумя дифференциальными уравнениями переноса, записанными для масштабов скорости и длины, хотя и уступает по широте применения моделям типа $k-\varepsilon$. Значительный вклад в совершенствование модели $k-\omega$ внес Уилкокс (например, [2–4]). Классическая версия модели $k-\omega$ [2] успешно применяется для моделирования пристенных турбулентных течений. Причем, в отличие от модели $k-\varepsilon$, не требуется введения дополнительных пристенных функций. Тем не менее значительный недостаток модели $k-\omega$ — наличие чувствительности к внешнему уровню удельной скорости диссипации ω [5]. Включение слагаемого перекрестной диффузии в уравнение на ω [6] позволяет устранить зависимость от граничных условий. С целью улучшения прогностических свойств в расчетах свободных сдвиговых течений предложена [3, 4] версия модели $k-\omega$, включающая слагаемое перекрестной диффузии, а также модифицированные значения эмпирических постоянных модели.

В статьях [7, 8] на основе теоретико-группового анализа построены согласующиеся с экспериментальными данными автомодельные решения ряда полуэмпирических моделей свободных сдвиговых турбулентных течений, включающих уравнение для скорости диссипации энергии турбулентности ε. Цель данной работы заключается в применении развиваемого в [7, 8] подхода к модели $k-\omega$ [3, 4] для построения автомодельных решений задачи о течении в дальнем плоском турбулентном следе за телом, которая имеет прикладное значение и является одной из классических задач гидродинамики.

1. МОДЕЛЬ ДАЛЬНЕГО ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА

Для описания течения в дальнем плоском турбулентном следе за телом привлекается модель $k-\omega$ [4] в приближении дальнего следа

$$U_0\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{\omega}\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) \tag{1.1}$$

$$U_0\frac{\partial k}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma^*\frac{k}{\omega}\frac{\partial k}{\partial y}\right)+\frac{k}{\omega}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2-\beta^*k\omega \tag{1.2}$$

$$U_0\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma\frac{k}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)+\alpha\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2-\beta\omega^2+\frac{\sigma_d}{\omega}\frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial y} \tag{1.3}$$

где x — продольная координата, U_0 — скорость набегающего на тело невозмущенного потока, $u_1 = U_0 - U$ — дефект продольной осредненной компоненты скорости (U — продольная компонента скорости осредненного движения), k — кинетическая энергия турбулентности, ω — удельная скорость диссипации кинетической энергии. Эмпирические постоянные, входящие в уравнения (1.1)—(1.3), принимают следующие значения [3, 4]:

$$\sigma=\frac{1}{2},\quad \sigma^*=\frac{3}{5},\quad \beta=0.0708,\quad \beta^*=\frac{9}{100},\quad \alpha=\frac{13}{25},\quad \sigma_d=\frac{1}{8}$$

Основное отличие данной версии модели $k-\omega$ от классической версии [2] заключается в наличии слагаемого перекрестной диффузии (последнее слагаемое в уравнении (1.3)) и модифицированных значениях эмпирических постоянных σ^*, β и α.

Предполагается, что течение установившееся. Кроме того, в дальнейшем скорость набегающего на тело невозмущенного потока U_0 считается равной единице.

2. ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ

Известные экспериментальные данные [9—11] свидетельствуют о том, что течение в дальнем турбулентном следе можно считать близким к автомодельному, следовательно, естественно интересоваться автомодельными редукциями уравнений (1.1)—(1.3). Базис алгебры Ли [12] рассматриваемой модели составляют пять операторов

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial y},\quad X_3=\frac{\partial}{\partial u_1},\quad X_4=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}-\omega\frac{\partial}{\partial\omega}$$

$$X_5=y\frac{\partial}{\partial y}+u_1\frac{\partial}{\partial u_1}+2k\frac{\partial}{\partial k}$$

Составляется следующая линейная комбинация операторов X_4, X_5:

$$Y=x\frac{\partial}{\partial x}+\gamma y\frac{\partial}{\partial y}-\omega\frac{\partial}{\partial\omega}+(\gamma-1)u_1\frac{\partial}{\partial u_1}+2(\gamma-1)k\frac{\partial}{\partial k}$$

где γ — произвольная постоянная. Решение системы уравнений (1.1)—(1.3), инвариантное относительно преобразования, порожденного оператором Y, имеет вид

$$u_1(x,y)=x^{\gamma-1}U_1(t),\quad k(x,y)=x^{2\gamma-2}K(t),\quad \omega(x,y)=x^{-1}W(t),\quad t=\frac{y}{x^{\gamma}} \tag{2.1}$$

где t — автомодельная переменная.

Пусть выполняется следующее условие:

$$\frac{k}{\omega}\frac{\partial u_1}{\partial y}\to 0,\quad y\to\pm\infty$$

Тогда, интегрируя уравнение (1.1) по y в пределах от $-\infty$ до ∞, находим закон сохранения импульса

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_1=0,\quad \text{или}\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}u_1=\text{const}$$

откуда с помощью представления (2.1) для функции u_1 имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^{2\gamma-1}U_1(t)dt=\text{const}$$

Для того, чтобы левая часть последнего равенства не зависела от x, необходимо положить $\gamma=1/2$. Такая автомодельность согласуется с экспериментальными данными [9—11].

Подставляя (2.1) в уравнения (1.1)–(1.3), получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$U_1'' + \left(\frac{K'}{K} - \frac{W'}{W} + \gamma t\frac{W}{K}\right)U_1' - (\gamma - 1)\frac{U_1 W}{K} = 0 \tag{2.2}$$

$$\sigma^* K'' + U_1 + \sigma^*\frac{K'^2}{K} + \left(-\sigma^*\frac{W'}{W} + \gamma t\frac{W}{K}\right)K' - (2(\gamma - 1) + \beta^* W)W = 0 \tag{2.3}$$

$$\sigma W'' + \alpha\frac{W}{K}U_1'^2 - \sigma\frac{W'^2}{W} + \left((\sigma + \sigma_d)\frac{K'}{K} + \gamma t\frac{W}{K}\right)W' - (\beta W - 1)\frac{W^2}{K} = 0 \tag{2.4}$$

Для системы уравнений (2.2)–(2.4) ставятся краевые условия

$$U_1'(0) = K'(0) = W'(0) = 0 \tag{2.5}$$

$$U_1(a) = K(a) = W(a) = 0 \tag{2.6}$$

что соответствует симметрии течения относительно оси Ox и равенству нулю функций u_1, k и ω вне зоны турбулентного следа. Значение a, связанное с полушириной турбулентного следа, в расчетах можно полагать равным единице, в силу инвариантности системы уравнений (2.2)–(2.4) относительно преобразования растяжения, либо задавать это значение исходя из экспериментальных данных. Следует также отметить то обстоятельство, что коэффициенты системы уравнений (2.2)–(2.4) имеют особенности в краевых условиях.

Используя уравнение (2.2), находим первый интеграл

$$\frac{K}{W}U_1 + \frac{t}{2}U_1' = \text{const} \tag{2.7}$$

где равенство нулю константы, стоящей в правой части, следует из краевых условий. Наличие первого интеграла позволяет при дальнейших расчетах использовать обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка на функцию U_1.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.7), (2.3), (2.4), удовлетворяющая условиям (2.5), (2.6), решалась численно. Для решения задачи использовался модифицированный метод стрельбы и асимптотическое разложение решения в окрестности особой точки

$$U_1(t) = c_1|t - a|^{\kappa\sigma^*} + o(|t - a|^{\kappa\sigma^*}), \quad K(t) = c_2|t - a|^{\kappa} + o(|t - a|^{\kappa})$$

$$W(t) = \frac{c_2\kappa\sigma^*}{a\gamma}|t - a|^{\kappa-1} + o(|t - a|^{\kappa-1}), \quad \kappa = \sigma/(\sigma - \sigma^* + \sigma_d)$$

Заметим, что показатели степени, входящие в асимптотическое разложение, представлены в [3, 4] и принимают значения, большие единицы, что свидетельствует о гладком приближении решений рассматриваемой краевой задачи к границе турбулентного следа.

В результате расчетов были получены следующие значения функций U_1, K и W при $t = 0$:

$$U_1(0) = 3.9, \quad K(0) = 3.4902, \quad W(0) = 14.45$$

Сопоставление автомодельных профилей решений, полученных методом стрельбы, с экспериментальными данными [9] представлено на рисунке 1. Имеет место достаточно хорошее соответствие результатов проведенных расчетов экспериментальным данным по дефекту осредненной продольной компоненты скорости u_1 и нормальному рейнольдсову напряжению $\langle u'u'\rangle$ (угловые скобки означают осреднение по времени, u' – пульсационная составляющая продольной компоненты скорости). Для устранения имеющегося несоответствия по касательному рейнольдсову напряжению $\langle u'v'\rangle$ (v' – пульсационная составляющая поперечной компоненты скорости), по всей видимости, следует привлекать более сложные модели турбулентности, включающие дифференциальные уравнения переноса на компоненты тензора рейнольдсовых напряжений.

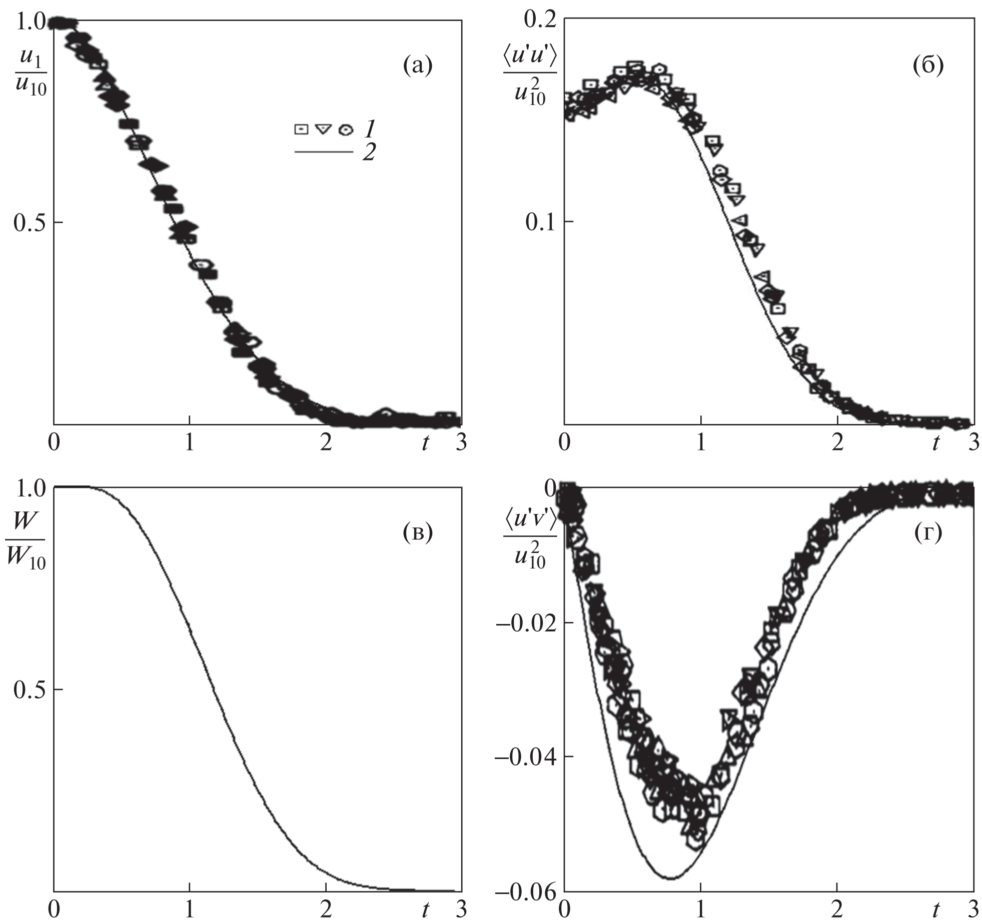

Рис. 1. Результаты расчетов: *1* – экспериментальные данные [9], *2* – автомодельные решения, u_{10} – осевое значение дефекта скорости, (а) нормированный профиль u_1, (б) нормированный профиль $\langle u'u'\rangle$, (в) профиль удельной диссипации, нормированный на $W_0 = W(0)$, (г) нормированный профиль $\langle u'v'\rangle$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построены автомодельные решения уравнений $k - \omega$ модели дальнего турбулентного следа. Выполненное сопоставление с экспериментальными данными свидетельствует о применимости модифицированной версии $k - \omega$ модели к расчетам свободных сдвиговых турбулентных течений.

Автор выражает благодарность О.В. Капцову и Г.Г. Черных за предоставленные материалы и внимание к работе. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00332).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А.Н.* Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. физ. сер. 1942. Т. 6. № 1–2. С. 56–58.
2. *Wilcox D.C.* Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // AIAA J. 1988. V. 26. № 11. P. 1299–1310. doi.org/10.2514/3.10041
3. *Wilcox D.C.* Turbulence modeling for CFD. La Canada, California: DCW Industries, 2006. 522 p.
4. *Wilcox D.C.* Formulation of the $k - \omega$ turbulence model revisited // AIAA J. 2008. V. 46. № 11. P. 2823–2838. doi.org/10.2514/1.36541
5. *Kok J.C.* Resolving the dependence on freestream values for the $k\,\omega$-turbulence model // AIAA J. 2000. V. 38. № 7. P. 1292–1295. doi.org/10.2514/2.1101

6. *Speziale C.G., Abid R., Anderson E.C.* Critical evaluation of two-equation turbulence models for near-wall turbulence // AIAA J. 1992. V. 30. № 2. P. 324–331. doi.org/10.2514/3.10922
7. *Капцов О.В., Ефремов И.А., Шмидт А.В.* Автомодельные решения модели второго порядка дальнего турбулентного следа // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 2. С. 74–78.
8. *Шмидт А.В.* Автомодельное решение задачи о турбулентном течении круглой затопленной струи // ПМТФ. 2015. Т. 56. № 3. С. 82–88. doi.org/10.15372/PMTF20150310
9. *Wygnanski I., Champagne F., Marasli B.* On the large-scales structures in two-dimensional small-deficit, turbulent wakes // J. Fluid Mech. 1986. V. 168. P. 31–71. doi.org/10.1017/S0022112086000289
10. *Fage A., Falkner V.M.* Note on experiments on the temperature and velocity in the wake of a heated cylindrical obstacle // Proc. Royal Soc. London, Ser. A: Math. and Phys. Sci., 1932. V. 135. № 828. P. 702–705.
11. *Weygandt J.H., Mehta R.D.* Three-dimensional structure of straight and curved plane wakes // J. Fluid Mech. 1995. V. 282. P. 279–311. doi.org/10.1017/S0022112095000140
12. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.