

УДК 533.6.011.8

ТЕЧЕНИЕ В УЗКОМ КАНАЛЕ С ХИМИЧЕСКИМИ РЕАКЦИЯМИ НА СТЕНКЕ

© 2019 г. В. В. Лунев^а, П. С. Тихонычев^{а*}

^а *Центральный научно-исследовательский институт машиностроения,
Королев, Московская обл., Россия*

* *E-mail: tikhonychevps@tsniimash.ru*

Поступила в редакцию 30.08.2018 г.

После доработки 24.10.2018 г.

Принята к публикации 23.11.2018 г.

Получено решение задачи о течении газа в узком канале, плоском и цилиндрическом с внутренним стержнем на оси, с химическими реакциями на стенках. Задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения для поперечного распределения параметров потока. Этот пример моделирует, в некоторой степени, течения в химических реакторах, применяемых иногда для исследования гетерогенных химических реакций.

Ключевые слова: механика сплошной среды, течение многофазной среды, физико-химическая гидромеханика, химический реактор, течение Пуазейля

DOI: 10.1134/S0568528119030095

Эта работа имеет отношение к теории химических реакторов, используемых для определения констант скоростей соответствующих реакций [1, 2]. Рассматриваются два возможных варианта реактора: плоский и цилиндрический. Для измерения констант скоростей реакций через канал прокачивается смесь холодного несущего инертного газа со слабой примесью газа (обычно кислорода), реагирующего с материалом, нанесенным на нагреваемую поверхность одной из стенок в плоском и на центральный стержень в цилиндрическом каналах (реакции горения углерода, гетерогенная рекомбинация атомов и т.д.). По разности входных (в канал) и выходных концентраций реагирующего газа и определяются скорости реакций.

Канал предполагается достаточно длинным по сравнению с его диаметром с тем, чтобы можно было пренебречь концевыми эффектами. Кроме того, для получения обозримых результатов при определении поля скоростей несущего газа будем пренебрегать его нагревом и влиянием примеси, полагая течение в канале вязким, несжимаемым и стационарным с заданным постоянным градиентом давления $\nabla p \leq 0$. Уравнение для реагирующего газа решается уже при заданном поле скоростей.

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ В КАНАЛЕ

В рамках модели узкого канала продольная скорость u не зависит от продольной координаты x , а уравнения Навье–Стокса сокращаются до уравнения Пуазейля [3]

$$\frac{p'}{\nu \rho u_0} R_0^2 = \frac{1}{r^\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad p' = \frac{\partial p}{\partial x} \leq 0 \quad (1.1)$$

Здесь ν , ρ – кинематическая вязкость и плотность газа, R_0 – ширина плоского канала или радиус цилиндрического. Независимая переменная r , обезразмеренная на величину R_0 , есть расстояние от реагирующей стенки в плоском канале или от оси симметрии в цилиндрическом. Продольная скорость u отнесена к характерной скорости $u_0 = -p' R_0^2 / \nu \rho$, обращающей левую часть (1.1) в минус единицу, степени $\mu = 0$ и 1 соответствуют плоскому и цилиндрическому каналам, $r_0 R_0$ – радиус внутреннего стержня. На стержне и внутренних стенках каналов ставятся граничные условия прилипания

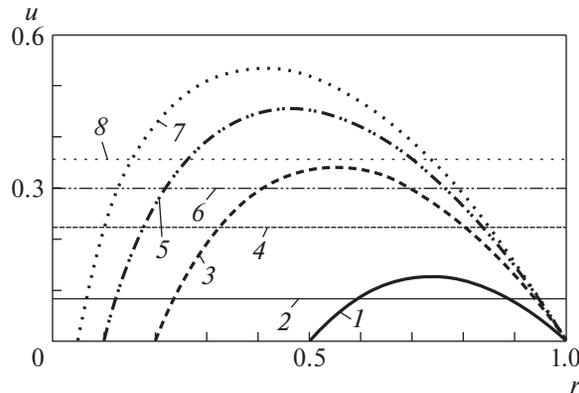


Рис. 1. Распределение скоростей (линии 1, 3, 5, 7) и средние скорости (2, 4, 6, 8) в цилиндрическом канале с внутренним стержнем при различных параметрах r_0 (0.5, 0.2, 0.1, 0.05 соответственно).

$$u = 0: \quad \mu = 0, \quad r = 0, 1; \quad \mu = 1, \quad r = r_0, 1 \quad (1.2)$$

Проинтегрировав уравнение (1.1) дважды с учетом условий (1.2), получим для плоской задачи обычное решение Пуазейля, где безразмерная координата y отсчитывается от средней линии канала

$$u = \frac{1}{8} u_0 [1 - 4y^2], \quad y = r - \frac{1}{2} \quad (1.3)$$

Для цилиндра справедлива последовательность формул

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{2} r^2 - a, \quad u = \frac{1}{4} (1 - r^2) - a \ln r, \quad a = \frac{1 - r_0^2}{4 \ln r_0}. \quad (1.4)$$

Как следует из (1.4), максимум скорости u достигается в точке $r_m = \sqrt{-a}$, которая смещается к оси с уменьшением r_0 . При этом производная скорости неограниченно возрастает на внутреннем цилиндре, но его сопротивление убывает как $(-\ln r_0)^{-1}$. Профили скоростей и соответствующие им среднемассовые скорости в таком канале для различных параметров r_0 приведены на рис. 1.

2. УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ

Уравнение диффузии для стационарного течения в узком канале с малой примесью с массовой концентрацией c запишем в тех же безразмерных переменных

$$D_0^{-1} u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{r^\mu} \frac{\partial}{\partial r} r^\mu \frac{\partial c}{\partial r}, \quad D_0 = \frac{D}{u_0 R_0} \quad (2.1)$$

Здесь D – коэффициент диффузии, предполагаемый постоянным, а скорость u определяется формулами (1.3) или (1.4). Граничными условиями при этом будут

$$r = 1: \frac{\partial c}{\partial r} = 0 \quad (\mu = 0, 1); \quad r = \mu r_0 \quad (\mu = 0, 1): \frac{\partial c}{\partial r} = Da c \quad (2.2)$$

Первое граничное условие соответствует отсутствию реакции на “не реагирующих” стенках канала, второе определяет скорость химической реакции на “реагирующих” поверхностях стержня или стенке плоского канала [4]. Здесь обозначено $Da = kR_0/D$ – число Дамкелера, k – константа скоростей реакции. Так как в процессе течения вдоль канала падение концентрации кислорода за счет пристеночной реакции пропорционально его концентрации, то допустимо искать решение задачи в виде

$$c = C \exp(-\alpha x') f(r), \quad x' = x/R_0 \quad (2.3)$$

Здесь произвольная константа C определяется лишь расходом примеси в начальном сечении. Уравнение (2.1) в этом случае примет вид

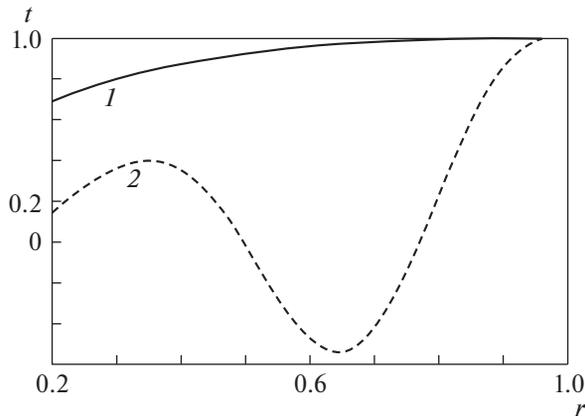


Рис. 2. Два решения распределения концентрации для одного значения числа Da: 1, 2 – $\lambda = 10$ и 1815, 1 – решение физично, 2 – решение не имеет физического смысла.

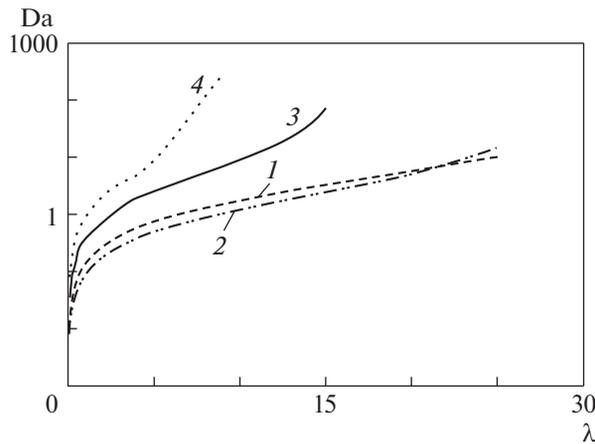


Рис. 3. Зависимость числа Da от числа λ для различных конфигураций канала: 1, 3, 4 – $\mu = 1$ при $r_0 = 0.2, 0.1, 0.05$; 2 – $\mu = 0$.

$$\frac{d}{dr} \left(r^\mu \frac{df}{dr} \right) + \lambda r^\mu u f = 0, \quad \lambda = \frac{\alpha}{D_0} \tag{2.4}$$

В граничных условиях (2.2) при этом следует лишь заменить c на f . В такой постановке профили функций, $f/f(1)$ будут одинаковыми во всех сечениях $x = \text{const}$. В результате, без потери общности, можно в расчетах положить $f(1) = 1$, включив произвол в константу C в формуле (2.3).

Однородное уравнение (2.4) при однородных граничных условиях (2.2) может иметь нетривиальное решение лишь при некоторых, зависящих от параметра Da собственных числах λ , дискретных или непрерывных. Физически зависимость $\lambda(Da)$ обусловлена тем, что, к примеру, с ростом Da будет возрастать и скорость продольного убывания концентрации c , что обеспечивается синхронным увеличением числа α . При этом функция $\lambda = \lambda(Da)$ будет универсальной для каждого r_0 .

Для нахождения зависимости $\lambda(Da)$ для каждого r_0 необходимо решить уравнение

$$\frac{d}{dr} \left(r^\mu \frac{df}{dr} \right) + \lambda r^\mu u f = 0 \tag{2.5}$$

с граничным условием $f'_r = Da f$ на реагирующей стенке и заданием $f'_r = 0$ на противоположной.

Для этого численно была решена задача Коши: при $r = 1$ поставлено граничное условие, и для каждого наперед заданного числа λ явным методом движения к реагирующей стенке находилось значение числа Da . При этом можно подобрать несколько чисел $\lambda_i, i = 0, 1, 2, \dots$ для одного и того же положительного числа Da , но только наименьшее из них будет иметь физический смысл, так как при остальных функция f меняет знак $2i$ раз (рис. 2).

Зависимость $Da(\lambda)$ при различных числах r_0 приведена на рис. 3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлено численное решение задачи течения газа в модельных химических реакторах разных конфигураций: в осесимметричном и плоском. Из определенной зависимости скорости химической реакции от числа λ можно сделать вывод, что при больших числах λ решение теряет физический смысл. Это соответствует тому, что при больших скоростях реакции вся рассматриваемая примесь газа вступает в реакцию с материалом стенки за несколько калибров R_0 . Также показано, что измерения скоростей реакции, проведенные в плоском химическом реакторе, будут приблизительно соответствовать измерениям в осесимметричном реакторе с $r_0 = 5$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rosner D.E., Allendorf H.D.* Comparative studies of the attack of pyrolytic and isotropic graphite by O and O₂ at high temperatures // *AIAA J.* 1968. № 4. P. 650–654.
2. *Залогин Г.Н., Зябловский В.А., Кусов А.Л., Лунев В.В.* Моделирование горения углеродной нити в канальном реакторе // *Космонавтика и ракетостроение.* 2017. Т. 97. № 4. С. 102–112.
3. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Часть вторая. М.: Изд-во физ.-мат. лит. 1963. 429 с.
4. *Землянский Б.А., Лунев В.В., Власов В.И., Горшков А.Б., Залогин Г.Н., Ковалев Р.В., Маринин В.П., Мурзинов И.Н.* Конвективный теплообмен летательных аппаратов // М.: Физматлит, 2014. 241 с.