

УДК 532.529.5:536.24

ВЛИЯНИЕ ЧАСТОТЫ ИМПУЛЬСОВ НА СТРУКТУРУ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕН В ИМПАКТНОЙ ГАЗОНАСЫЩЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУЕ

© 2019 г. М. А. Пахомов^{а,*}, В. И. Терехов^{а,**}

^а Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

* E-mail: pakhomov@ngs.ru

** E-mail: terekhov@itp.nsc.ru

Поступила в редакцию 16.07.2018 г.

После доработки 16.01.2019 г.

Принята к публикации 21.01.2019 г.

Выполнено численное моделирование турбулентной структуры течения и теплообмена в нестационарной пузырьковой круглой импактной струе при вариации частоты импульсов. Математическая модель основана на использовании эйлерова подхода для описания динамики течения и теплообмена в дисперсной фазе (воздушные пузырьки). Задача рассматривается в осесимметричной постановке и решается система нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса с учетом двухфазности потока. Турбулентность несущей фазы (жидкость) описывается с использованием модели переноса компонент рейнольдсовых напряжений с учетом влияния пузырьков на генерацию турбулентности. Исследовано влияние частоты подачи импульсов на структуру течения и теплоперенос в газожидкостной импактной струе. Импульсный характер подачи струи вызывает как заметное увеличение турбулентности жидкости и теплопереноса в период действия импульса (до 2 раз), так значительное подавление этих параметров в период отсутствия подачи струи в сравнении со стационарной импактной пузырьковой струей при том же самом осредненном по времени расходе струи.

Ключевые слова: двухфазная пузырьковая импактная струя, частота импульсов, теплоперенос, турбулентность, моделирование

DOI: 10.1134/S0568528119040078

Импактные струйные течения являются одним из наиболее часто встречающихся методов интенсификации процессов тепломассопереноса [1]. Причиной этого является высокая интенсивность процессов переноса, обеспечиваемая особенностями струйных течений в районе точки торможения потока [1–3]. Наличие свободных и пристенных сдвиговых слоев с развивающимися в них крупномасштабными вихревыми структурами приводит к турбулизации течения и усилению процессов переноса [2, 3]. В районе точки торможения (лобовой точки) потока получены максимальные значения коэффициентов тепло- и массопереноса и резкое искривление линий тока при натекании струи на поверхность преграды [1–3].

В настоящее время интенсивно ведутся поиски новых методов интенсификации теплообмена при взаимодействии импактных струй с поверхностью и эта проблема является чрезвычайно актуальной. Одним из способов, позволяющих получить существенный рост теплоотдачи, является добавление газовых пузырьков в жидкостную импактную струю (до 2–3 раз в сравнении с однофазным потоком жидкости) [4, 5]. Основной причиной этого является турбулизация пузырьками пристенного слоя жидкости, что вызывает более интенсивный теплообмен с импактной поверхностью [4].

Позднее работы по исследованию газонасыщенных импактных струй были выполнены в [6, 7]. Экспериментальное исследование теплообмена и динамики течения в газожидкостной импактной струе при изменении $\beta = 0–100\%$ было выполнено в [4–6], где $\beta = W_b/(W_b + W)$ – объемное расходное газосодержание, W – объемный расход и индекс “ b ” соответствует газовой фазе. Показано, что при добавлении дисперсной фазы теплообмен возрастает вдвое. Максимум теплообмена располагается в области изменения $\beta = 20–30\%$, а при дальнейшем увеличении объемного

газосодержания интенсивность теплообмена снижается. Численное исследование влияния объемного расходного газосодержания и размера пузырьков на структуру течения в газожидкостной импактной струе проведено в [7]. Скорость жидкости при наличии газовых пузырьков выше соответствующего значения в однофазном потоке турбулентной жидкости. Установлена значительная анизотропия (более 2 раз) между аксиальными и радиальными турбулентными флуктуациями в газожидкостной импактной струе. Добавление воздушных пузырьков вызывает заметный рост интенсивности пульсаций скорости жидкости в двухфазном течении (до 50% в сравнении с жидкостной однофазной импактной струей). Рост размера дисперсной фазы вызывает увеличение турбулентности жидкости.

Наложение пульсаций скорости (расхода потока) является одним из эффективных методов активного управления динамическими и тепловыми характеристиками двухфазного течения [8, 9]. Экспериментальное исследование турбулентной локальной структуры в круглой пузырьковой импактной струе проведено при наложении внешнего периодического возбуждения в [8]. Зарегистрирован эффект подавления крупномасштабных структур при больших величинах газосодержания. Установлено, что добавление газовой фазы при $\beta \leq 12\%$ приводит к заметному росту величины касательного трения на стенке (до 40%). Авторами [8] проведены измерения касательного трения на поверхности преграды при изменении объемного расходного газосодержания $\beta = 0-12\%$ в стационарной и импульсной струях. При этом $f = 0$ и 250 Гц соответственно для синусоидальных колебаний потока с амплитудой, равной $A = u/U_1 = 0.001$. В работе отмечено, что основными особенностями импульсных импактных двухфазных струй по сравнению со стационарным течением являются повышенный теплообмен, значительно более тонкие гидродинамический и тепловой пограничные слои, повышенный уровень турбулентности газовой фазы и неустойчивость течения. Изучение совместного влияния этих факторов на характеристики теплообмена представляет большой интерес. Экспериментальное исследование структуры течения в импактной пузырьковой струе при использовании комбинации оптических методов PFBI/PIV/PTV (Planar Fluorescence Bubble Imaging/Particle Image Velocimetry/Particle Tracking Velocimetry) выполнено в [9]. Авторами были измерены две компоненты осредненных и пульсационных скоростей обеих фаз для случая стационарных затопленной и импактной струй. Пузырьки увеличивают турбулентность несущей фазы непосредственно за срезом сопла за счет их отрывного обтекания жидкостью. По мере удаления от сопла турбулентная кинетическая энергия (ТКЭ) жидкости подавляется. В окрестности поверхности преграды наблюдается дополнительное производство ТКЭ [9].

К настоящему времени влияние частоты подачи импульсов на структуру течения и теплообмен является не достаточно исследованным. Даже для однофазных нестационарных струй в литературе представлены противоречивые данные – наблюдается как подавление, так и интенсификация теплообмена [10, 11]. Ключевой момент в исследовании процесса тепломассобмена в импульсных импактных двухфазных струях заключается в детальном исследовании локальной турбулентной структуры течения и распределения газовых пузырьков в пристенной зоне. Попытке ответить на эти вопросы и посвящена данная работа. Основное внимание было уделено численному исследованию влияния частоты подачи импульсов в импактной затопленной газожидкостной струе на структуру двухфазного струйного течения и характеристики теплообмена между двухфазной струей и преградой.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрена задача о динамике двухфазной пузырьковой импульсной импактной струи при наличии теплообмена с поверхностью преграды. Задача рассматривается в осесимметричной постановке, и решается система нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса с учетом обратного влияния газовых пузырьков на процессы переноса в несущей фазе. Эйлеров подход широко применяется при описании динамики и теплообмена различных типов пузырьковых турбулентных течений [12–16]. Математическая модель основана на использовании эйлерова (двухжидкостного) описания [17–19]. В случае пузырьковых течений приближение точечных сил становится недостаточно точным, так как размер пузырьков заметно превосходит колмогоровский пространственный микромасштаб [18]. Поэтому рассматриваемая математическая модель, строго говоря, справедлива для микропузырьков, размеры которых не превышают колмогоровский микромасштаб. Необходимо отметить, что в [17–19] сопоставления с данными экспериментов проводились для воздушных пузырьков диаметром до нескольких миллиметров, что значительно превосходит колмогоровский микромасштаб. В этих работах были выполнены сопоставление измеренных и рассчитанных осредненных и пульсационных параметров несущей

и дисперсной фаз и распределение концентрации пузырьков по сечению трубы для вертикальных восходящих и опускных турбулентных течений. Сравнения результатов экспериментов и численных расчетов показали работоспособность данного подхода при описании пузырьков турбулентных течений.

Все основные уравнения настоящей работы для обеих фаз записаны в символах операций векторного анализа, хотя решались они для осесимметричного течения в цилиндрических координатах. Это сделано исключительно с целью краткости формы записи.

1.1. Несущая фаза

Система осредненных нестационарных уравнений неразрывности, импульса и теплообмена жидкости с учетом влияния пузырьков на процессы переноса и теплоты имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_l \rho)}{\partial t} + \nabla(\rho \alpha_l U) &= 0 \\ \frac{D(\alpha_l \rho U_i)}{Dt} &= \alpha_l (-\nabla P + \rho g) + \nabla(\alpha_l \tau) - \nabla(\alpha_l \rho \langle uu \rangle) + (P - P_{in}) \nabla \alpha_l + M_l \\ \frac{D(\alpha_l \rho C_p T)}{Dt} &= \nabla[\alpha_l \nabla(\lambda T)] - \nabla(\alpha_l \rho C_p \langle u\theta \rangle) - \frac{6h(T - T_b)}{d} + C_{p,b} \rho_b g_{ut} \langle u\theta \rangle \nabla \alpha_l \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь α_l и α_b – объемные концентрации жидкой фазы и пузырьков соответственно; ρ , μ , λ и C_p – плотность, динамическая вязкость, коэффициент теплопроводности и теплоемкость соответственно; t – время; $Du/(Dt) = \partial u/(\partial t) + U \nabla u$ – субстанциальная производная и u – параметр; P и P_{in} – давление в жидкой фазе и на поверхности пузырька; $U_R = U - U_b$ – межфазная скорость жидкости; τ , $\langle uu \rangle$ и $\langle u\theta \rangle$ – тензоры вязких напряжений, рейнольдсовых напряжений и турбулентный тепловой поток в несущей фазе соответственно, $M_l = -M_b$ – межфазное динамическое взаимодействие (описано ниже по тексту статьи в п. 1.4); h – коэффициент теплоотдачи от потока жидкости к пузырьку, d – размер пузырьков; T – температура жидкости, g – сила тяжести, $g_{ut} = T_{LP,t}/\tau_\Theta - 1 + \exp(T_{LP,t}/\tau_\Theta)$ – коэффициент вовлечения пузырьков в тепловое флуктуационное движение жидкости [22, 23], $\tau_\Theta = C_{p,b} \rho_b d^2 / (6\lambda Y)$, $T_{LP,t}$ – время взаимодействия воздушных пузырьков с турбулентными тепловыми вихрями $T_{LP,t} = 0.6k/\varepsilon$ [14], $Y = 1 + 0.3 \text{Re}_b^{1/2} \text{Pr}^{1/3}$, $\text{Re}_b = \rho |U_R| d / \mu$ – число Рейнольдса, построенное по межфазной скорости и $C_{p,b}$ – плотность газовой фазы. Нижние индексы b и l соответствуют пузырьку и жидкости соответственно.

На нестационарное распределение давления на межфазной поверхности “воздушный пузырек–жидкость” оказывают влияние турбулентность жидкости и нестационарная относительная межфазная скорость [24]. Влияние турбулентности к настоящему времени рассчитать довольно трудно. Значительно более простую задачу в математическом плане представляет вопрос влияния осредненной межфазной скорости [25]. При расчете давления на межфазной поверхности можно использовать решение Лэмба для потенциального обтекания частицы потоком жидкости [25] $P_{in} = P_b - C_r \alpha_l U_R^2$ [25]. В данной работе принимается, что нет потери сферичности, т.е. $C = 0.5$ [26]. Считается, что при $\rho_b \ll \rho$ давление на межфазной границе равно давлению в газовом пузырьке $P_{in} = P_b$ [24].

Турбулентные тепловые потоки в жидкости определены согласно гипотезе Буссинеска

$$\langle u_j \theta \rangle = -\frac{\mu^T}{\rho \text{Pr}^T} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2$$

где μ^T – коэффициент динамической турбулентной вязкости и $\text{Pr}^T = 0.9$ – значение турбулентного числа Прандтля [12].

Эмпирическое уравнение теплообмена с поверхности твердой сферы в поток жидкости приведено в [27]:

$$\text{Nu}_p = hd/\lambda_l = 2 + 0.6 \text{Re}_b^{1/2} \text{Pr}_l^{1/3}$$

где Nu_p и Pr_l – числа Нуссельта для твердой частицы и Прандтля жидкости. Данный подход использовался для частиц произвольной плотности в [15].

1.2. Модель турбулентности

Для описания турбулентности жидкости применялась модель переноса рейнольдсовых напряжений [28], модифицированная на случай наличия дисперсной фазы [29]. Уравнения компонент тензора рейнольдсовых напряжений и скорости диссипации турбулентности имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{D\langle uu \rangle}{Dt} &= \nabla(\alpha_l D_k) + \alpha_l (P_k + \phi - \varepsilon) + S_k \\ \frac{D\varepsilon}{Dt} &= \nabla(\alpha_l D_\varepsilon) + \alpha_l (P_\varepsilon - \varepsilon) + S_\varepsilon \end{aligned} \quad (1.2)$$

В системе (1.2) D_k – турбулентная диффузия, P_k – производство турбулентной энергии из градиента осредненной скорости, ϕ – перераспределяющее слагаемое, описывает обмен энергией между отдельными составляющими $\langle uu \rangle$ вследствие корреляции давление–скорость деформации, ε – диссипация турбулентности или скорость передачи энергии от крупномасштабных вихрей мелкомасштабным, D_ε – диссипация турбулентности за счет диффузии и P_ε – интенсивность порождения диссипации турбулентной кинетической энергии.

Последние слагаемые в правой части уравнений (1.2) S_k и S_ε определяют дополнительную генерацию турбулентности жидкости за счет отрывного обтекания пузырьков [29]

$$S_k = 0.75C_4C_D\alpha_b\rho|U_R|^3/d, \quad S_\varepsilon = C_{\varepsilon 3}S_k\varepsilon/k \quad (1.3)$$

В (1.3) константы $C_4 = 0.1$, $C_{\varepsilon 3} = 1.44$, C_D – коэффициент сопротивления газового пузырька (определяется ниже в п. 1.4), $2k = \langle u_i u_i \rangle$ – кинетическая энергия турбулентности жидкости.

1.3. Система транспортных уравнений для дисперсной фазы

С целью перехода от динамического стохастического описания движения отдельных пузырьков (уравнение типа Ланжевена) к континуальному моделированию ансамбля пузырьков вводится функция плотности вероятности (ФПВ) распределения дисперсной фазы в турбулентном потоке жидкости. Система уравнений для моделирования движения дисперсной фазы в эйлеровом континуальном представлении получена из кинетического уравнения для ФПВ распределения частиц в турбулентном потоке [17]. В расчетах межфазных корреляций используются только осредненная скорость жидкости [16, 17], а не ее актуальное значение как в работе [18]. Отметим, что система уравнений [17] была разработана для изотермического газожидкостного турбулентного течения с учетом того, что пузырьки являются малоинерционными [17]. Дополнительно в уравнение движения пузырьков входит слагаемое, описывающее действие градиента давления в жидкости на их перенос.

В результате система нестационарных уравнений, определяющая их перемещение и теплообмен воздушных пузырьков, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_b \rho_b)}{\partial t} + \nabla(\alpha_b \rho_b U_b) &= 0 \\ \frac{D(\alpha_b \rho_b U_b)}{Dt} &= \alpha_b \left[-\nabla P - \frac{D_b}{\tau} \nabla(\rho_b \alpha_b) - \nabla(\rho_b E \langle uu \rangle) + \rho_b g \right] + M_b \\ \frac{D(\alpha_b \rho_b C_{P,b} U_b T_b)}{Dt} &= -\frac{1}{\tau_\Theta} \nabla(D_b^\Theta \alpha_b) - h\alpha_b (T - T_b) \frac{\rho_b}{\tau_\Theta} \\ \rho_b &= \alpha_b P_b / (R_b T_b) \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\tau = 4(1 + C_{VM}\rho_0)d/(3C_D|U_R|\rho_0)$ и $\tau_\Theta = C_{P,b}\rho_b d^2/(12\lambda Y)$ – времена динамической [17] и тепловой релаксации пузырьков газа, записанные с учетом отклонения от закона стоксового обтекания соответственно, $E = (1 - A)(1 - A\Omega)/(1 + \Omega)$ по данным работы [17]. Последнее выражение справедливо для случая малоинерционных частиц при $A > 1$, где A определено так: $A = (1 + C_{VM})\rho_0/(1 + C_{VM}\rho_0)$, $\rho_0 = \rho/\rho_b$, $\Omega = \tau/T_L$. Величины $D_b = \Omega_L \langle uu \rangle$ и $D_b^\Theta = \Omega_{L\Theta} \langle \mathbf{u}\theta \rangle$ – тензоры турбулентной диффузии и турбулентного переноса теплоты в дисперсной фазе для случая малоинерционных воздушных пузырьков. Коэффициент $C_{VM} = 0.5$ и $\Omega_L = 0.3k/\varepsilon$ – лагранжев временной макромасштаб [17] и $\Omega_{L\Theta} \approx \Omega_L$. Отметим, что выражения для коэффициента вовлечения дисперсной фазы в теп-

ловое флуктуационное движение несущей фазы g_{ii} в (1.1) и времени тепловой релаксации частиц в дисперсной фазе τ_Θ в (1.4) первоначально были записаны для случая течения газа с малоинерционными твердыми частицами. В данной работе они применяются для описания течения воздушных пузырьков в жидкости, что вполне допустимо, учитывая их малую инерционность [17, 18].

Слагаемые в левой части уравнения импульса для пузырьков системы (1.4) описывают нестационарный и конвективный перенос дисперсной фазы. Первое слагаемое в правой части уравнения импульса для пузырьков описывает динамику пузырьков за счет градиента давления в газе, второе – перенос дисперсной фазы за счет диффузии. Третий член – турбулентную миграцию пузырьков под действием градиента турбулентных напряжений в дисперсной и несущей фазах, и четвертый – межфазное взаимодействие. В данной работе в межфазном взаимодействии учитывается действие только осредненных параметров жидкости, влияние актуальных нестационарных параметров жидкой фазы (скорости жидкости на позиции пузырька) не принимается во внимание. Математическая модель расчета пузырьковых течений с учетом эффекта актуальных нестационарных параметров жидкости на межфазное взаимодействие разработана в [17]. В подавляющем большинстве других работ по моделированию турбулентных пузырьковых течений принимается во внимание действие только осредненных параметров жидкости. Первое слагаемое в уравнении энергии дисперсной фазы системы (1.4) описывает конвективный перенос теплоты, второе – перенос теплоты диффузией воздушных пузырьков и третье – межфазный теплообмен.

1.4. Межфазные силы

Для монодисперсного двухфазного потока слагаемое для расчета межфазного взаимодействия в эйлеровом приближении имеет вид

$$\mathbf{M}_l = -\mathbf{M}_b = \mathbf{F}_{Drag} + \mathbf{F}_{VM} + \mathbf{F}_{GA} + \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_{TD} + \mathbf{F}_{WL}. \quad (1.5)$$

Межфазное взаимодействие в уравнении (1.5) определяется с учетом действия следующих силовых факторов: аэродинамического сопротивления F_{Drag} , эффекта присоединенной массы F_{VM} , сил Архимеда F_{GA} , Сэффмена (подъемной силы) F_L , турбулентной диффузии F_{TD} и пристенной силы F_{WL} . Соотношения для расчета силовых факторов имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{Drag} &= \frac{\alpha_b \mathbf{U}_b}{\tau}, \quad \mathbf{F}_{VM} = \alpha_b A \mathbf{U} \nabla \cdot \mathbf{U}, \quad \mathbf{F}_{GA} = \frac{(1 - \rho_0) \alpha_b}{1 + C_{VM} \rho_0} \mathbf{g} \\ \mathbf{F}_L &= \frac{C_L \alpha_b \rho_0}{1 + C_{VM} \rho_0} \mathbf{U}_R \times (\nabla \times \mathbf{U}), \quad \mathbf{F}_{TD} = -\frac{C_{TD} \alpha_b \mu_T}{Sc_b \tau} \left(\frac{\nabla \cdot \alpha_b}{\alpha_b} - \frac{\nabla \cdot \alpha_l}{\alpha_l} \right) \\ \mathbf{F}_{WL} &= -\left(C_{W1} + C_{W2} \frac{d}{2y_b} \right) 2\alpha_b \frac{\rho |\mathbf{U}_R|^2}{d} \mathbf{n}_W \end{aligned} \quad (1.6)$$

где C_D – коэффициент сопротивления пузырьков в силе сопротивления [30]:

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re_b} \left(1 + \frac{3}{16} Re_b^{0.687} \right), & Re_b \leq 10^3 \\ 0.44, & Re_b > 10^3 \end{cases}$$

Действие силы Бассэ, обусловленной нестационарностью обтекания вязкой жидкостью пузырька [15], не принимается во внимание ввиду ее малости в сравнении с остальными рассмотренными в работе силами [17, 18]. В литературе нет соотношения, которое бы учитывало анизотропию турбулентных пульсаций в силе турбулентной диффузии (ТД). Поэтому в данной работе, как в большинстве других работ, например, [29, 31], было использовано соотношение для ТД в виде, приведенном в (1.6). В работах [32, 33] говорится, что в водопроводной воде из-за загрязнения на поверхности пузырьков закон их сопротивления такой же, как и у твердых частиц. Принято, что коэффициенты $C_{VM} = 0.5$ и турбулентной диффузии $C_{TD} = 1$ и турбулентное число Шмидта $Sc_T = 0.9$. Выражение для подъемной силы взято из [33], выражение для коэффициента C_L [34]

$$C_L = \begin{cases} \min[0.288 \tanh(0.121 \text{Re}_b), f(\text{Eo}_b)], & \text{Eo}_b \leq 4 \\ f(\text{Eo}_b), & 4 \leq \text{Eo}_b \leq 10 \\ -0.27, & \text{Eo}_b > 10 \end{cases}$$

где $\text{Eo}_b = g(\rho - \rho_b) D_H^2 / \sigma$ – модифицированное число Этвеша, определяющее соотношение между внешними силами (силой тяжести) и силами поверхностного натяжения, $f(\text{Eo}_b) = 0.011\text{Eo}_b^3 - 0.0159\text{Eo}_b^2 - 0.0204\text{Eo}_b + 0.474$ – поправочная функция, $D_H = d(1 + 0.163\text{Eo}^{0.757})^{1/3}$ – максимальный горизонтальный размер пузырька.

Направление действия подъемной силы зависит не только от направления движения потока, но и от размера пузырьков [35]. Формула для коэффициента C_L записана с учетом смены его знака для пузырьков размером более 5 мм. С учетом условия прилипания жидкости на твердой стенке скорость течения жидкой фазы в области между стенкой и пузырьком меньше, чем на противоположной стороне пузырька. Вследствие этого возникает сила, отталкивающая пузырек от стенки. Пристенная сила, определяемая в [36], направлена к оси канала (как для восходящего, так и для нисходящего течений). Здесь y_b – дистанция от стенки до пузырька по нормали, \mathbf{n}_W – единичный вектор, направленный по нормали к стенке и константы $C_{W1} = -0.1$ и $C_{W2} = 0.147$, при $y > 0.5C_{W1}d/C_{W2}$ величина $\mathbf{F}_{WL} = 0$ [34].

2. МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

Решение было получено с использованием метода конечных объемов на разнесенных сетках. Для конвективных слагаемых дифференциальных уравнений применялась процедура QUICK [37] третьего порядка точности. Для диффузионных потоков были использованы центральные разности второго порядка точности. Коррекция поля давления осуществлялась по конечно-объемной согласованной процедуре SIMPLEC [38]. Для дискретизации производных по времени использовалась неявная схема Эйлера первого порядка точности. Расчет компонент тензора рейнольдсовых напряжений жидкости осуществлялся по методике, предложенной в [39]. Компоненты рейнольдсовых напряжений определяются в тех же точках по граням контрольного объема, что и соответствующие им компоненты осредненной скорости жидкости.

В работе применялась неравномерная расчетная сетка в аксиальном и радиальном направлениях (сгущение расчетных узлов в районе поверхности преграды и в приосевой области струи). Это является необходимым для разрешения деталей турбулентного течения в пристенной зоне. Подходящим для такой двумерной задачи является преобразование координат, приведенное в работе [40]

$$\Delta\psi_j = K\Delta\psi_{j-1}$$

где $\Delta\psi_j$ и $\Delta\psi_{j-1}$ – текущий и предыдущий шаги сетки в аксиальном или радиальном направлениях и $K = 1.02$. При использовании такой схемы с постоянным отношением шагов шаг сетки возрастает в геометрической прогрессии.

Все расчеты были проведены на сетке, содержащей 200×256 контрольных объемов (КО). Дополнительно были проведены расчеты на сетках, содержащей 400×400 КО. Отличие в результатах расчетов числа Нуссельта и трения на стенке для газожидкостного турбулентного течения и скоростей жидкости и пузырьков не превысили 0.1%. Первая расчетная ячейка располагалась на расстоянии от стенки $y_+ = u_*y/\nu \approx 0.5$ (скорость трения u_* определялась для однофазного течения жидкости при прочих идентичных параметрах). В вязком подслое для корректного расчета резких градиентов параметров двухфазного потока располагалось не менее 10 КО.

На оси струи для газовой и дисперсной фаз задаются условия симметрии. На поверхности преграды ставятся условия непроницаемости для обеих фаз и прилипания для жидкости. На внешней границе расчетной области граничные условия поставлены в виде нулевых производных параметров в аксиальном направлении. Шаг по времени равнялся $\Delta t = 0.1$ мс. Число Куранта удовлетворяло необходимому условию устойчивости численного решения системы сеточных уравнений, аппроксимирующих уравнения в частных производных. Для всех расчетов оно не превышало 1.

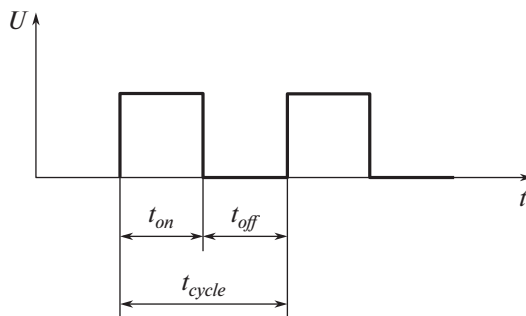


Рис. 1. Форма профиля изменения импульса потока.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИМПУЛЬСНОЙ ИМПАКТНОЙ ГАЗОКАПЕЛЬНОЙ СТРУИ И ИХ АНАЛИЗ

3.1. Сопоставление с данными других работ для нестационарной импульсной однофазной струи

Результаты тестирования численной модели с данными измерений теплообмена в импульсной импульсной однофазной струе представлены в [41]. В случае стационарного режима пузырьковой импульсной струи верификация численной модели была проведена в [16]. Было получено удовлетворительное согласие с известными экспериментальными данными по теплообмену в однофазной импульсной и стационарной газодисперсной струях. Это послужило базисом при проведении исследований более сложного случая импульсной газонасыщенной струи.

3.2. Результаты численного моделирования газожидкостной струи

Все расчеты были проведены для смеси жидкости (воды) и монодисперсных воздушных пузырьков при атмосферном давлении в нисходящем потоке. Окружающее затопленное пространство заполнено жидкостью при $T_{\infty} = 293$ К. Во входном сечении заданы профили параметров жидкой фазы на основе предварительного расчета однофазного течения жидкости в трубе длиной $150R$. Ее диаметр равнялся $2R = 20$ мм, а ширина расчетной области составляет $30R$. Начальное распределение газовой фазы задано в виде равномерного профиля параметров по сечению среза трубы. Среднемассовая скорость потока жидкости на срезе трубы составляла $U_{m1} = 0.5$ и 1 м/с, число Рейнольдса для несущей фазы $Re = 2RU_{m1}/\nu = 23000$ и 46000 . Начальная скорость воздушных пузырьков составляла $U_{b1} = 0.8U_{m1} = 0.4$ и 0.8 м/с. Их диаметр изменялся в диапазоне $d = 0.2$ – 1 мм, а объемное расходное газосодержание $\beta = 0$ – 12% . Одним из параметров, характеризующим поведение частиц в газовом потоке (их степень инерционности), является число Стокса в осредненном движении. Оно представляет собой отношение времени гидродинамической релаксации к характерному турбулентному макромасштабу $Stk = \tau/\tau_f$. В качестве характерного турбулентного макромасштаба принималось гидродинамическое время – отношение диаметра среза трубы к среднемассовой скорости на ее срезе $\tau_f = 2R/U_{m1} = 0.04$ с [2]. Тогда число Стокса в осредненном движении изменяется в диапазоне $Stk = 0.05$ – 0.2 . Расчеты выполнены при одинаковом размере воздушных пузырьков во входном сечении трубы. Температура импульсной поверхности составляла $T_w = \text{const} = 313$ К, а начальные температуры жидкости и газа на срезе трубы равнялись $T_1 = T_{b1} = 293$ К. Все численные расчеты выполнены для расстояния между срезом трубы и преградой $H/(2R) = 2$. Частота подачи потока импульса изменялась в диапазоне $f = 0$ – 300 Гц, форма подачи импульсов была прямоугольной, а величина параметра скважности была неизменной и равнялась $DC = t_{on}/(t_{on} + t_{off}) = t_{on}/t_{cycle} = 0.5$ (см. рис. 1), где t_{on} , t_{off} и t_{cycle} – времена действия импульса, отсутствия подачи импульса и общее время цикла соответственно. Число Струхала, определенное по диаметру трубы, изменялось в пределах $Sr = 2fR/U_{m1} = 10^{-3}$ – 5 . Все расчеты (для импульсной и стационарной импульсных струй) были проведены при равенстве осредненного по времени расхода. Осредненные результаты по распределениям трения на стенке и теплообмену были получены за весь период расчета, равный 2 с.

Профили полной скорости жидкости $U^2 = U^2 + V^2$ (а) и турбулентной кинетической энергии (б) по длине поверхности преграды показаны на рис. 2. Здесь y – расстояние по нормали, отсчи-

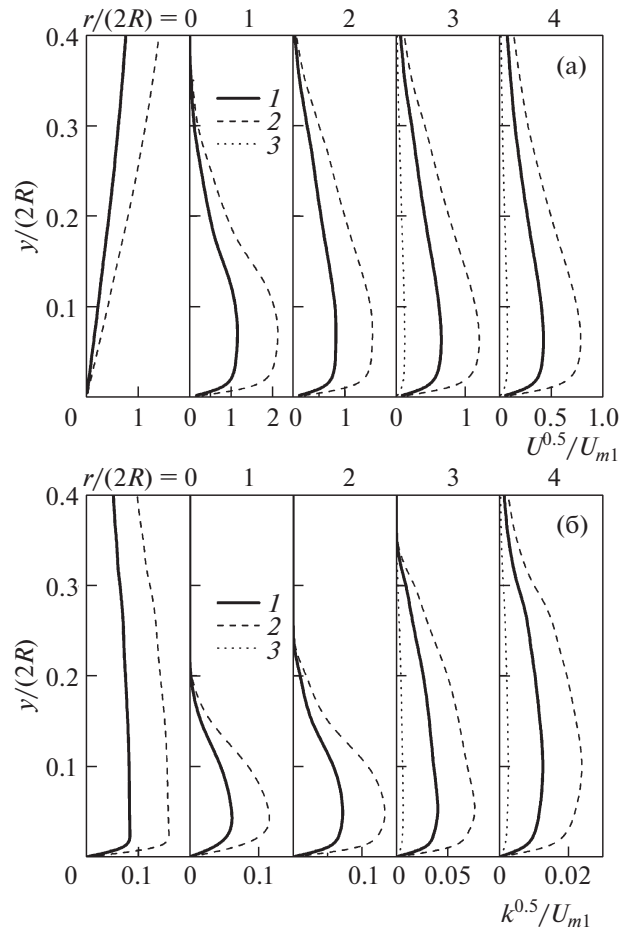


Рис. 2. Профили полной скорости жидкости $\mathbf{U}^2 = U^2 + V^2$ (а) и турбулентной кинетической энергии (б) по радиусу поверхности преграды: $Re = 2.3 \times 10^4$, $H/(2R) = 2$, $T_W = 313$ К, $T_1 = T_{bl} = 293$ К, $d = 1$ мм, $\beta = 5\%$, $f = 60$ Гц, $DC = 0.5$; 1 – стационарная пузырьковая импактная струя ($f = 0$ Гц), 2 – $t = t_{on} = 0.5t_c$, 3 – $t = t_{off} = t_c$ (непосредственно перед началом нового цикла).

тываемое от поверхности преграды вертикально вверх. На рис. 2а линии 1 соответствуют стационарной газожидкостной импактной струе, 2 и 3 – двухфазному импульсному потоку в момент времени непосредственно перед “выключением” и “включением” течения соответственно. В целом профили скорости жидкости в двухфазной стационарной импактной струе (1) подобны таковым для однофазного течения [1, 2]. Очевидно, что скорость жидкости в импульсной струе в момент времени перед “выключением” имеет наибольшее значение, тогда как перед “включением” величина скорости минимальна. По мере приближения к импактной поверхности вдоль оси струи ($r(2R) = 0$) происходит торможение потока и в окрестности лобовой точки величина полной скорости жидкости $\mathbf{U} \approx 0$. Далее при продвижении пристенного потока от точки торможения вдоль поверхности преграды наблюдается его ускорение. Распределения скорости жидкости в пристенной части имеют ярко выраженный струйный профиль с максимумом, расположенным в пристенной зоне при $r/(2R) = 1-2$. При этом значение скорости в импульсной струе выше, чем в стационарном потоке. Это вызвано тем, что при условии постоянства среднерасходной скорости жидкости для импульсной струи при $DC = 0.5$ величина скорости в момент действия импульса вдвое выше в сравнении со стационарной струей. Далее по мере развития пристенной струи при $r/(2R) > 3$ скорость жидкости снижается за счет расширения струи при ее смещении с окружающим затопленным пространством, и струйная форма профиля становится менее выраженной.

Влияние нестационарности двухфазного течения на распределения турбулентной кинетической энергии (ТКЭ) в жидкости представлено на рис. 2б соответственно. Величина ТКЭ для осе-

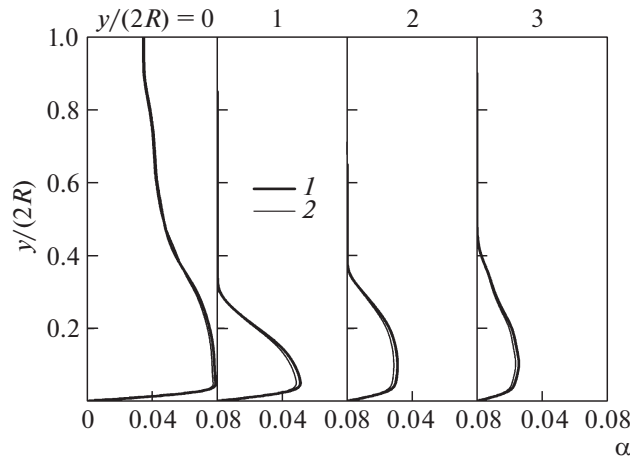


Рис. 3. Профили осредненного по времени локального газосодержания в импульсной импактной струе в нескольких сечениях от точки торможения: $d = 1$ мм, $\beta = 5\%$, 1 – стационарная пузырьковая импактная струя ($f = 0$ Гц), 2 – $f = 60$ Гц.

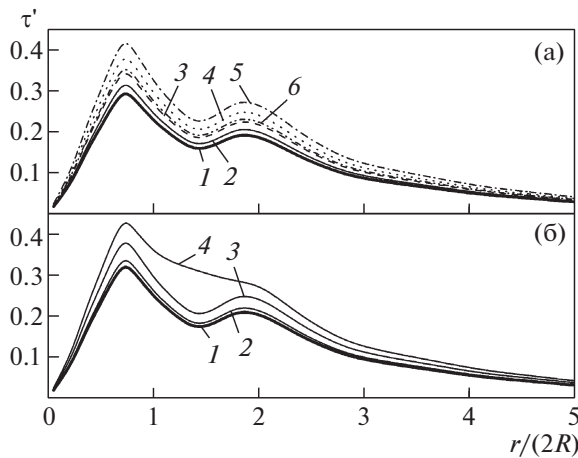


Рис. 4. Влияние частоты импульсов (а) и объемного расходного газосодержания (б) на распределения осредненного во времени касательного трения на стенке: $Re = 2.3 \times 10^4$, $H/(2R) = 2$, $d = 1$ мм; (а) – $\beta = 5\%$, $f = 0$ Гц (стационарная импактная струя), 2 – 5, 3 – 25, 4 – 60, 5 – 200, 6 – 300; (б) – $f = 60$ Гц, $\beta = 0$ (однофазная жидкостная нестационарная импактная струя), 2 – 2%, 3 – 5, 4 – 10.

симметричного течения определится по соотношению: $2k = \langle uu \rangle = \langle u \rangle^2 + \langle v \rangle^2 + \langle w \rangle^2 \approx \langle u \rangle^2 + 2\langle v \rangle^2$. Из анализа данных численных расчетов [7, 16], ранее выполненных авторами для стационарных пузырьковых импактных струй, следует, что увеличение интенсивности турбулентности жидкости в двухфазном течении (до 20–30%) в сравнении с однофазным потоком. Дополнительная генерация турбулентности объясняется вихреобразованием при обтекании потоком жидкости крупных газовых пузырьков [7, 16]. Наибольших значений ТКЭ достигает в приосевой и градиентной областях. При этом $r/(2R) \leq 1-2$. На таких расстояниях происходят локальное ускорение потока и ламинарно-турбулентный переход [1, 2]. Они наблюдаются как в однофазных, так и в двухфазных струях. Далее по мере развития пристенной струи вдоль импактной поверхности за счет расширения пристенной струи при ее смешении с окружающим затопленным пространством с соответствующим понижением концентрации пузырьков и уменьшения скорости жидкости величина кинетической энергии турбулентности несущей фазы снижается. Нестационарность двухфазного потока также оказывает существенное количественное влияние на распределения ТКЭ и реинольдсовых напряжений по сечению струи. Качественно профили турбулентности жидкой фазы и реинольдсовых напряжений в импульсной 2 и стационарных (1) импактных двухфазных струях подобны. В момент действия двухфазного течения 2 наблюдается

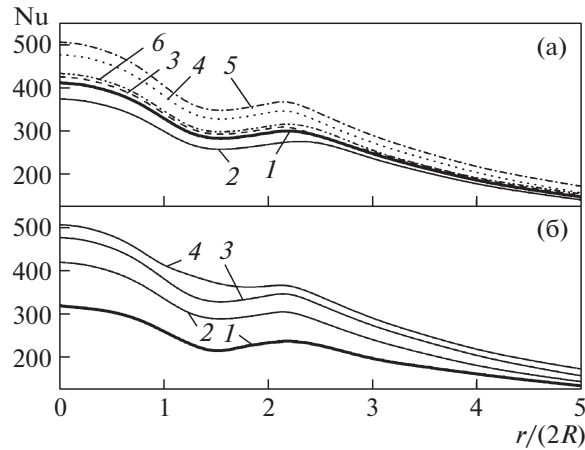


Рис. 5. Влияние частоты импульсов (а) и объемного расходного газосодержания (б) на распределения осредненного во времени теплообмена по длине поверхности. Условия проведения численных расчетов и обозначения линий соответствуют данным рис. 3.

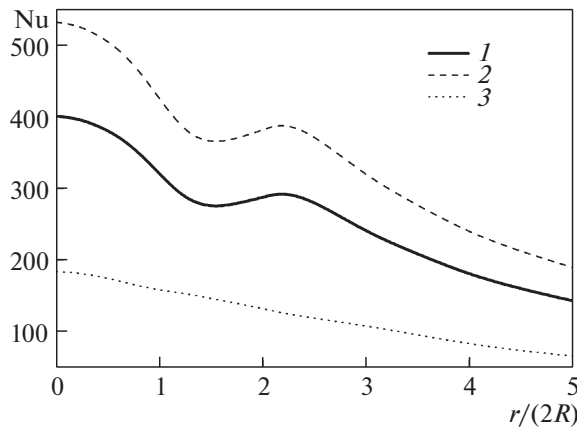


Рис. 6. Распределения нестационарного числа Нуссельта по длине поверхности преграды в различные моменты времени: 1 – стационарная пузырьковая импульсная струя ($f = 0$ Гц), 2 – $t = t_{on} = 0.5t_c$, 3 – $t = t_{off} = t_c$ (непосредственно перед началом нового цикла).

увеличение в 2 раза уровня k . В отсутствие действия газонасыщенного потока (3) величины турбулентности жидкости значительно снижаются (почти в 2 раза в сравнении со стационарным двухфазным потоком). Наличие незначительных величин ТКЭ наблюдается при $r/(2R) \geq 3$ на участке развития пристенной струи за счет предыдущего цикла.

Профили осредненного локального газосодержания α по длине поверхности преграды приведены на рис. 3 для стационарной струи при $f = 0$ (линия 1) и 60 Гц (линия 2) в нисходящем потоке. На оси струи при $r/(2R) = 0$ по мере приближения к стенке концентрация пузырьков возрастает. За счет малой величины радиальной компоненты скорости пузырьков происходит их накопление в районе точки торможения струи. Для профилей α характерно практически нулевое значение локального газосодержания у стенки, что объясняется действием пристенной силы и всплыванием пузырьков по мере продвижения двухфазной пристенной струи вдоль поверхности преграды. Для небольших расстояний от точки торможения при $r/(2R) \leq 2$ характерным является расположение локального максимума концентрации воздушных пузырьков около стенки, далее за счет всплывания пузырьков и значительного расширения пристенной струи положение максимума в распределении локального газосодержания несколько смещается от стенки преграды во внешнюю среду. Также можно отметить крайне слабое влияние частоты импульсов на осредненное во времени распределение пузырьков, что, в принципе, можно было ожидать.

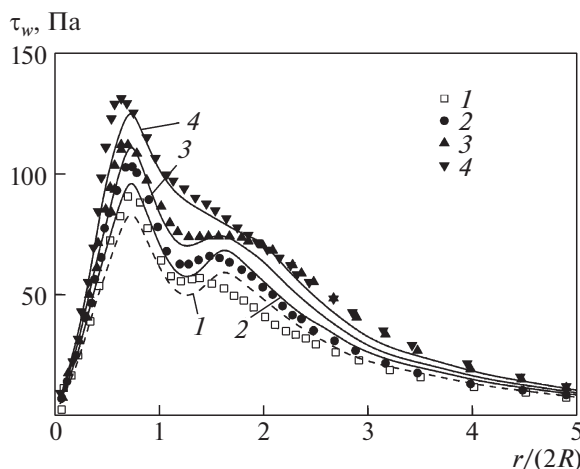


Рис. 7. Распределения касательного трения на стенке в импульсной импактной пузырьковой струе при вариации объемного газосодержания. Точки — измерения [8], линии — расчет авторов: $f = 250$ Гц, $Sr = 0.6$, $Re = 4.04 \times 10^4$, $H/(2R) = 2$, $2R = 10$ мм, $d = 200$ мкм, $Q = 0.33$ л/с, $Q_g = 0-0.046$ л/с. 1 — $\beta = 0$ (однофазная импактная струя), 2 — $\beta = 3.4$, 3 — 5.9, 4 — 12.1%.

Распределения осредненных по времени касательных напряжений на стенке по длине поверхности преграды показаны на рис. 4. Здесь $\tau' = \tau_w / (\rho U_{ml}^2)$ и τ_w — относительное касательное напряжение и трение на стенке соответственно. Увеличение частоты импульсов и объемного расходного газосодержания приводит к росту трения на стенке. В области малых частот (квазистационарное течение, $f = 5$ Гц, линия 2 на рис. 4, а) получено практически полное отсутствие влияния частоты импульса на трение. Далее происходит увеличение трения при росте частоты импульсов. Для наибольшей исследованной в работе частоты ($f = 300$ Гц, б) величина напряжения на стенке снижается, но сохраняется некоторое увеличение трения в сравнении со стационарным течением. Максимальное значение трения приходится на расстояние от оси струи $r/(2R) \approx 1$, вторичный максимум находится на $r/(2R) \approx 2$. При небольших концентрациях пузырьков ($\beta \leq 5\%$) качественный вид распределения трения на стенке аналогичен таковому для стационарного двухфазного [7] и однофазного [1, 2] течения. Наличие двух локальных максимумов трения и теплообмена для однофазного стационарного режима течения является известным фактом. Это ранее было показано в [1, 2]. Для пузырьковых стационарных струй два локальных максимума трения ранее были получены нами в [7]. При наибольшей величине объемного расходного газосодержания $\beta = 10\%$, исследованного в работе, наблюдается исчезновение второго максимума трения.

Наложение импульсов оказывает сложный характер на теплообмен между пузырьковой струей и преградой (см. рис. 5, а). Наблюдается как подавление теплопереноса (до 10%), так и его интенсификация (до 25%) в сравнении со стационарной пузырьковой газожидкостной импактной струей. Подавление теплообмена характерно для малых значений частоты импульсов (квазистационарный режим, $f = 5$ Гц, линия 2 на рис. 4а), что согласуется с данными измерений [10] и расчетов [11, 39] для однофазных импульсных струй. Далее при $f = 25$ Гц — 3 интенсивность теплообмена превышает соответствующее значение для стационарного потока — 1 и для частоты $f = 200$ Гц — 4 отмечается максимальная интенсификация теплообмена в 25% в сравнении со стационарным двухфазным потоком. Это связано с существенно более тонкими значениями толщины теплового пограничного слоя в импульсной струе в сравнении со стационарным течением. Далее происходит снижение интенсивности теплообмена, и для наибольшей исследованной в работе частоты ($f = 300$ Гц, б) число Нуссельта снижается, но сохраняется некоторая интенсификация теплообмена (до 5%) в сравнении со стационарным течением. Это объясняется тем, что пограничный слой уже не успевает обновиться, и его толщина начинает приближаться к соответствующему значению для стационарного течения. Увеличение концентрации газовых пузырьков вызывает увеличение интенсивности теплообмена между струей и преградой (см. рис. 5б), что согласуется с нашими ранее полученными данными для стационарных импактных струй [7]. В целом распределение коэффициента теплообмена по радиусу преграды качественно согласуется с таковыми для стационарных газожидкостных и однофазных импульсных струй за исклю-

чением самого большого исследованного газосодержания. При величине $\beta = 10\%$ вторичный максимум практически исчезает (аналогично трению на стенке).

Отметим, что основное увеличение интенсивности теплопереноса при добавлении газовых пузырьков в области $r/(2R) < 2$ (область торможения потока и градиентная зона). Далее вниз по потоку $r/(2R) \approx 5$ (участок развития пристенной струи) величина теплоотдачи в двухфазной струе с небольшими пузырьками ($d \leq 1$ мм) заметно снижается и примерно соответствует таковой для однофазной импактной жидкостной струи. Это происходит за счет уменьшения концентрации дисперсной фазы в пристенной зоне трубы при всплывании воздушных пузырьков. Наблюдаемое наличие двух максимумов в распределениях по длине поверхности касательного трения на стенке и локального коэффициента теплообмена объясняется небольшим расстоянием между охлаждаемой поверхностью и срезом трубы, что согласуется с данными для однофазных [1, 2] и газонасыщенных стационарных [7, 8] импактных струй.

Распределения локального нестационарного числа Нуссельта по радиусу поверхности преграды для стационарной – 1 и импульсной струй – 2 и 3 – в различные моменты времени приведены на рис. 6. Интенсивность теплообмена в импульсной импактной струе – 2 заметно (на 30%) выше соответствующего значения в стационарной струе – 1 за счет увеличения расхода двухфазного потока. Основная причина интенсификации теплообмена – это более тонкие тепловой и гидродинамический пограничные слои в импульсном потоке в сравнении с таковыми для стационарного режима. В случае отсутствия течения – 3 величина теплопереноса теплообмена значительно снижается (более чем в 2 раза).

4. СОПОСТАВЛЕНИЕ С ДАННЫМИ ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ ПУЗЫРЬКОВОЙ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ИМПАКТНОЙ СТРУИ

Результаты сопоставления численного расчета с данными измерений касательных напряжений на стенке [8] для изотермической пузырьковой струи при наложении внешних периодических возмущений представлены на рис. 7. Эксперименты были выполнены с использованием электродиффузионного метода. Диаметр сопла составлял $2R = 10$ мм. Профиль осредненной аксиальной скорости на срезе сопла был близок к равномерному. Степень турбулентности на срезе сопла $Tu = \langle u' \rangle / U_m$ составляла 0.5–0.8% на его оси и 5–6% в слое смещения. Число Рейнольдса, построенное по средней скорости жидкости на срезе сопла $Re = 2RU_m/\nu = 4.04 \times 10^4$, расстояние до поверхности преграды $H/(2R) = 2$, средний диаметр пузырьков равнялся $d = 0.2$ мм, причем разброс в их размерах был незначительным. Поэтому в экспериментах считалось, что газовые пузырьки имеют постоянный диаметр. Объемное расходное газосодержание изменялось в диапазоне $\beta = 0$ –12.1%. Расположение импактной поверхности было вертикальным, сопло было установлено горизонтально.

Измеренные [8] и рассчитанные осредненные распределения касательных напряжений на стенке по радиусу пластины при вариации газосодержания $\beta = 0$ –12.1% показаны на рис. 3. Численные распределения трения на стенке получены за период времени в 1 с. Увеличение объемного расходного газосодержания приводит к росту трения на стенке. При небольших концентрациях пузырьков ($\beta \leq 6\%$) качественный вид распределения трения на стенке аналогичен таковому для однофазного режима течения. При наибольшей величине объемного расходного газосодержания исследованного в работе $\beta = 12.1\%$ наблюдается исчезновение второго максимума трения. Результаты численных расчетов трения на стенке хорошо согласуются с данными измерений [8] и максимальное отличие не превышает 15%. Тем не менее необходимо подчеркнуть, что для полноценного сопоставления расчетной модели необходимо проведение более подробных экспериментальных исследований импульсной пузырьковой импактной струи при других режимах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выполнено численное исследование влияния частоты импульсов на структуру течения, трение на стенке и распределение воздушных пузырьков в газожидкостной импактной нестационарной струе при ее натекании на нагретую преграду. Математическая модель основана на использовании эйлерова описания с учетом обратного влияния пузырьков на осредненные характеристики несущей фазы. Турбулентность жидкой фазы описывается с использованием модели переноса компонент рейнольдсовых напряжений с учетом дополнительной генерации турбулентности жидкости при обтекании пузырьков.

Распределения скорости жидкости в пристенной части имеют ярко выраженный струйный профиль. В целом профили осредненной скорости, турбулентности и концентрации воздушных пузырьков в импульсном потоке имеют подобный, как и для стационарной струи, вид. Отметим, что основной эффект от наложения импульсов на трение на стенке и теплоперенос наблюдаются до расстояния $r/(2R) \leq 3.5$, далее за счет процесса смешения пристенной пузырьковой струи с жидкостью в окружающем затопленном пространстве происходит существенное уменьшение концентрации пузырьков. Температура жидкости в импульсной газожидкостной импактной струе меньше соответствующего значения в стационарной струе за счет увеличения расхода двухфазного потока, и при этом происходит существенный рост теплообмена (до 40% в сравнении со стационарным импактным пузырьковым потоком). В случае отсутствия течения величина температуры жидкости в пристенной области возрастает, профиль температуры становится менее заполненным и интенсивность теплообмена резко снижается (до 2 раз при сопоставлении с газожидкостной стационарной импактной струей).

Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными показало, что разработанный подход позволяет проводить моделирование пузырьковых турбулентных импактных импульсных течений при наличии теплообмена со стенкой трубы в довольно широком диапазоне изменения газосодержания при $\beta \leq 12\%$.

Математическая модель при разработана финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проекты РФФИ 18-08-00477 и 18-58-45006), а численное исследование выполнено в рамках государственного задания ИТ СО РАН по программе АААА-17-117030310010-9.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дыбан Е.П., Мазур А.И. Конвективный теплообмен при струйном обтекании тел. Киев: Наукова думка, 1982.
2. Jambunathan K., Lai E., Moss M.A., Button B.L. A review of heat transfer data for single circular jet impingement // Int. J. Heat Fluid Flow. 1992. V. 13. P. 106–115.
3. Zuckerman N., Lior N. Jet impingement heat transfer: physics, correlations, and numerical modeling // Adv. Heat Transfer. 2006. V. 39. P. 565–631.
4. Serizawa A., Takahashi O., Kawara Z., Komeyama T., Michiyoshi I. Heat transfer augmentation by two-phase bubbly flow impinging jet with a confining wall // Proc. 9th Int. Heat Transfer Conf. IHTC-9, Jerusalem, Israel. 1990. V. 4. Paper 10-EH-16. P. 93.
5. Zumbrennen D.A., Balasubramanian M. Convective heat transfer enhancement due to gas injection into an impinging liquid jet // ASME J. Heat Transfer. 1995. V. 117. P. 1011–1017.
6. Trainer D., Kim J., Kim S.J. Heat transfer and flow characteristics of air-assisted impinging water jets // Int. J. Heat Mass Transfer. 2013. V. 64. P. 501–513.
7. Пахомов М.А., Терехов В.И. Структура турбулентного течения и распределение пузырьков в осесимметричной неизотермической импактной газожидкостной струе // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 2. С. 129–140.
8. Алексеенко С.В., Маркович Д.М., Семенов В.И. Турбулентная структура газонасыщенной импактной струи // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 22–33.
9. Alekseenko S.V., Dulin V.M., Markovich D.M., Pervunin K.S. Experimental investigation of turbulence modification in bubbly axisymmetric jets // J. Eng. Thermophys. 2015. V. 24. P. 101–112.
10. Zhou J.W., Wang Y.G., Middelberg G., Herwig H. Unsteady jet impingement: heat transfer on smooth and non-smooth surfaces // Int. Comm. Heat Mass Transfer. 2009. V. 36. P. 103–110.
11. Xu P., Yu B., Qiu S., Poh H.J., Mujumdar A.S. Turbulent impinging jet heat transfer enhancement due to intermittent pulsation // Int. J. Thermal Sci. 2010. V. 49. P. 1247–1252.
12. Lahey R.T., Jr., Drew D.A. The analysis of two-phase flow and heat transfer using a multidimensional, four-field, two-fluid model // Nucl. Eng. Design. 2001. V. 204. P. 29–44.
13. Yeoh G.H., Tu J.Y. Population balance modelling for bubbly flows with heat and mass transfer // Chem. Eng. Sci. 2004. V. 59. P. 3125–3139.
14. Пахомов М.А., Терехов В.И. Численное моделирование течения и теплопереноса в опускном турбулентном газожидкостном потоке в трубе // ТВТ. 2011. Т. 49. № 5. С. 737–744.
15. Zaichik L.I., Alipchenkov V.M. A statistical model for predicting the fluid displaced/added mass and displaced heat capacity effects on transport and heat transfer of arbitrary-density particles in turbulent flows // Int. J. Heat Mass Transfer. 2011. V. 54. P. 4247–4265.
16. Гафиятов Р.Н., Губайдуллин Д.А., Губайдуллина Д.Д. Акустические волны разной геометрии в многофракционных пузырьковых жидкостях // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 1. С. 121–128.

17. *Зайчик Л.И., Скибин А.П., Соловьев С.Л.* Моделирование распределения пузырьков в турбулентной жидкости на основе диффузионно-инерционной модели // ТВТ. 2004. Т. 42. № 1. С. 111–117.
18. *Алипченков В.М., Зайчик Л.И.* Моделирование движения легких частиц и пузырьков в турбулентных потоках // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 4. С. 69–87.
19. *Mukin R.V.* Modeling of bubble coalescence and break-up in turbulent bubbly flow // Int. J. Multiphase Flow. 2014. V. 62. P. 52–66.
20. *Nigmatulin R.I.* Spatial averaging in the mechanism of heterogeneous and dispersed systems // Int. J. Multiphase Flow. 1979. V. 5. P. 353–385.
21. *Drew D.A., Lahey R.T., Jr.* Application of general constitutive principles to the derivation of multidimensional two-phase flow equations // Int. J. Multiphase Flow. 1979. V. 5. P. 243–264.
22. *Zaichik L.I.* A statistical model of particle transport and heat transfer in turbulent shear flows // Phys. Fluids. 1999. V. 11. P. 1521–1534.
23. *Derevich I.V.* Statistical modelling of mass transfer in turbulent two-phase dispersed flows. 1. Model development // Int. J. Heat Mass Transfer. 2000. V. 43. P. 3709–3723.
24. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1. 464 с.
25. *Lopez de Bertodano M.A., Lahey R.T., Jr., Jones O.C.* Phase distribution in bubbly two-phase flow in vertical ducts // Int. J. Multiphase Flow. 1994. V. 20. P. 805–818.
26. *Politano M., Carrica P., Converti J.* A model for turbulent polydisperse two-phase flow in vertical channel // Int. J. Multiphase Flow. 2003. V. 29. P. 1153–1182.
27. *Ranz W.E., Marshall W.R., Jr.* Evaporation from drops. Pts. I and II // Chem. Eng. Progress. 1952. V. 48. P. 141–146, 173–180.
28. *Craft T.J., Launder B.E.* New wall-reflection model applied to the turbulent impinging jet // AIAA J. 1992. V. 30. P. 2970–2972.
29. *Lopez de Bertodano M., Lee S.J., Lahey R.T., Jr., Drew D.A.* The prediction of two-phase turbulence and phase distribution using a Reynolds stress model // ASME J. Fluids Eng. 1990. V. 112. P. 107–113.
30. *Loth E.* Quasi-steady shape and drag of deformable bubbles and drops // Int. J. Multiphase Flow. 2008. V. 34. P. 523–546.
31. *Papoulias D., Splawski A., Vikhanski A., Lo S.* Eulerian multiphase predictions of turbulent bubbly flow in a step-channel expansion // Proc. 9th Int. Conference on Multiphase Flow ICMF-2016, 2016. Firenze, Italy.
32. *Wallis G.B.* The terminal speed of single drops in an infinite medium // Int. J. Multiphase Flow. 1974. V. 1. P. 491–511.
33. *Кашинский О.Н., Горелик П.С., Рандин В.В.* Скорости фаз в пузырьковом газожидкостном течении // Инж.-физ. журн. 1989. Т. 57. № 1. С. 12–15.
34. *Drew D.A., Lahey R.T., Jr.* The virtual mass and lift force on a sphere in rotating and straining inviscid flow // Intern. J. Multiphase Flow. 1987. V. 13. P. 113–121.
35. *Tomiyama A., Tamai H., Zun I., Hosokawa S.* Transverse migration of single bubbles in simple shear flows // Chem. Engng. Sci. 2002. V. 57. P. 1849–1958.
36. *Antal S.P., Lahey R.T., Jr., Flaherty J.F.* Analysis of phase distribution in fully developed laminar bubbly two-phase flow // Intern. J. Multiphase Flow. 1991. V. 17. P. 635–652.
37. *Leonard B.P.* A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1979. V. 19. P. 59–79.
38. *Van Doormaal J.P., Raithby G.D.* Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flow // Int. J. Numerical Heat Transfer A. 1984. V. 7. P. 147–164.
39. *Craft T.J., Graham L.J.W., Launder B.E.* Impinging jet studies for turbulence model assessment – II. An examination of the performance of four turbulence models // Int. J. Heat Mass Transfer. 1993. V. 36. P. 2685–2697.
40. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. Т. 2. 396 с. / Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H. Computational fluid mechanics and heat transfer. 2nd ed. New York. Taylor & Francis. 1997. 816 p.
41. *Pakhomov M.A., Terekhov V.I.* Numerical study of fluid flow and heat transfer characteristics in an intermittent turbulent impinging round jet // Int. J. Thermal Sci. 2015. V. 87. P. 85–93.