

УДК 533.6.011.72:519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ СИНГУЛЯРНОСТИ ТЕЧЕНИЯ В ТРОЙНОЙ ТОЧКЕ СТАЦИОНАРНОГО НЕРЕГУЛЯРНОГО МАХОВСКОГО ОТРАЖЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

© 2019 г. Е. И. Васильев*

Волгоградский государственный университет, Волгоград, Россия

**E-mail: vasilev@volsu.ru*

Поступила в редакцию 04.02.2019 г.

После доработки 06.03.2019 г.

Принята к публикации 06.03.2019 г.

В рамках модели Эйлера рассмотрена задача стационарного маховского отражения ударной волны в плоском канале с акцентом на исследование параметров течения в тройной точке. В аналитическом исследовании использована локальная теория для криволинейных ударных волн. Получено условие на исходные данные задачи, при которых в тройной точке реализуется сингулярность. В условиях сингулярности градиенты параметров течения и кривизна фронтов ударных волн и тангенциального разрыва в тройной точке обращаются в бесконечность. В численном исследовании использован разностный метод Годунова второго порядка и новая технология стягивающейся к тройной точке сетки в сочетании с выделением разрывов. Расчеты подтвердили аналитически предсказанную границу сингулярности. Дополнительные численные эксперименты показали, что граница сингулярности сохраняется при введении искусственных источников в уравнение энергии. Эти результаты позволяют выдвигать гипотезу, что сингулярность в тех же границах реализуется и для других двумерных течений с нерегулярным отражением ударных волн.

Ключевые слова: нерегулярное отражение, тройная точка, градиентная сингулярность, кривизна ударных волн, выделение разрывов

DOI: 10.1134/S0568528119050116

Впервые на возможность существования сингулярности в тройной точке конфигурации Маха указал Гудерлей [1] на основании исследований в приближении потенциального течения. Согласно его результатам кривизна отраженного фронта, фронта Маха и линии тока при подходе к тройной точке либо уменьшается до нуля, либо стремится к бесконечности. Бесконечная кривизна фронтов ударных волн приводит к бесконечным градиентам параметров течения в точке их пересечения. В работе [2] результаты теоретического анализа в окрестности тройной точки сравнивались с результатами экспериментов. Сделан вывод, что причиной расхождения при дозвуковых течениях за отраженным фронтом является сингулярность в тройной точке. В интерпретации работы [3] пограничные режимы возникновения сингулярности в области исходных данных должны находиться в промежутке между режимами с максимальным углом поворота линии тока в отраженном фронте и режимами с числом Маха, равным 1 за отраженным фронтом. Значительно позже в работе [4] с помощью локальной теории исследовано влияние источников тепла на градиенты поля течения в тройной точке. Сделан вывод, что для плоских стационарных отражений при отсутствии источников тепла градиенты параметров течения должны быть нулевыми, а кривизна фронтов ударных волн должна стремиться к нулю. В работе [5] проведены подобные исследования для осесимметричных и неоднородных течений. Построены зависимости градиентов течения от входящих неоднородностей. Возможное наличие сингулярности в тройной точке в работах [4, 5] не учитывалось. Ясно, что локальная теория не может ответить на вопрос реализуемости решений с сингулярностью, но если она существует, то значительная часть результатов работ [4, 5] вызывает сомнения. Для выяснения этого вопроса необходимо проводить решение в полной постановке. Недавно в [6] с применением численного моделирования высокого разрешения в полной постановке для плоского течения было показано, что сингуляр-

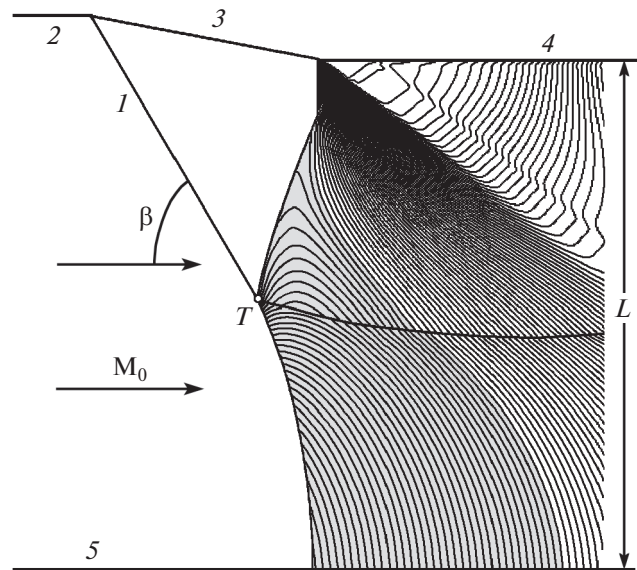


Рис. 1. Стационарное нерегулярное отражение ударной волны в плоском канале. Изолинии числа Маха для варианта с не максимальной высотой фронта Маха: 1 – фронт падающей ударной волны с углом наклона β к набегающему потоку с числом Маха M_0 ; 2, 3, 4, 5 – стенки канала; L – высота узкой части канала.

ность в тройной точке имеет место не только в регионе парадокса Неймана [7, 8], но также и для региона маховского отражения. Расчеты показали, что логарифмическая сингулярность существует вплоть до перехода в регулярное отражение для слабых ударных волн по крайней мере до чисел Маха набегающего потока $M_0 < 2$. Более точную границу существования сингулярности в [6] установить не удалось. В данной работе устраняется этот пробел.

Рассматривается задача стационарного отражения косою ударной волны с углом наклона β в плоском сверхзвуковом потоке идеального совершенного газа с числом Маха M_0 (рис. 1). Фрагмент диаграммы возможных конфигураций тройной точки (T -конфигурации) в плоскости исходных данных M_0 и β для небольшого диапазона умеренно слабых ударных волн в газе с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$ изображен на рис. 2. В области ниже кривой 1 не существует падающего скачка, так как $M_0 \sin \beta < 1$. Выше кривой 2 располагается так называемый регион парадокса Неймана, существование сингулярности в котором установлено как численно [7, 8], так и экспериментально [9]. Ниже кривой 2 расположены области, в которых существуют решения в виде трехударной (MR) и двухударной (RR между 3 и 1) конфигураций. Последняя конфигурация соответствует регулярному отражению без тройной точки. Эти области перекрываются, что говорит о возможной неоднозначности решения. В области между 3 и 1 конфигурация Маха существует либо в виде прямой, либо в виде инверсной конфигурации (iMR). В последней угол между фронтом Маха и контактным разрывом больше 90° . Кривая 5 соответствует T -конфигурациям, в которых поток в отраженной ударной волне имеет максимально возможный угол отклонения. Правее кривой 4 реализуются течения, в которых поток за отраженным фронтом является сверхзвуковым. Заметим, что участки кривых 4 и 5 в RR-области построены для iMR. Прямое MR в данной окрестности решения не имеет. Расчеты, выполненные в [6–8], для серии точек между кривыми 2 и 3 для $M_0 < 2$ показали присутствие сингулярности. Цель данной работы состоит в более точном определении границы существования сингулярности при $M_0 > 2$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Рассматривается стационарное сверхзвуковое течение идеального совершенного газа в плоском канале с прямолинейным клином. Конфигурация течения изображена на рис. 1, где представлены изолинии числа Маха для демонстрационного расчета. Порождаемая клином падающая ударная волна 1 отражается нерегулярным образом от нижней стенки канала. В тройной точке T прямолинейный фронт падающей волны расщепляется на фронт отраженной волны (выше точки T), и фронт Маха (ниже точки T). В общем случае оба этих фронта являются криволинейными. Кроме ударных волн, из точки T выходит контактный разрыв, который разделяет

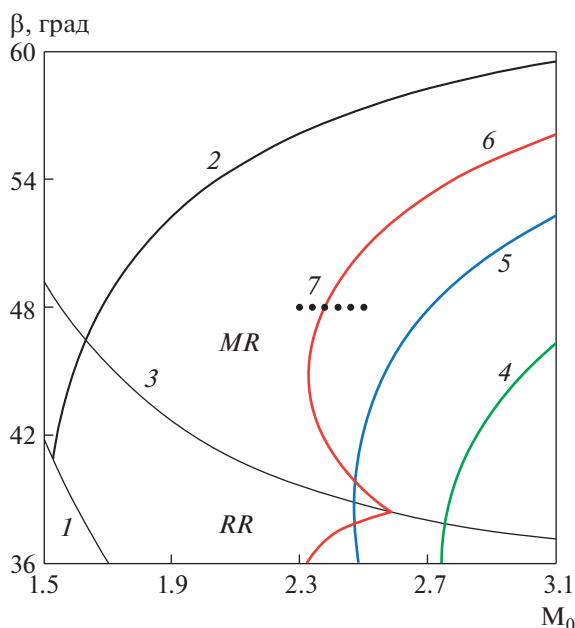


Рис. 2. Фрагмент диаграммы областей трехударной конфигурации ($\gamma = 5/3$); регулярное отражение (RR) 1–3; 2 – нулевой угол отклонения в отраженном скачке; регион Маха (MR) ниже кривой 2; 4 – $M = 1$ за отраженным скачком; 5 – максимальный угол отклонения в отраженном скачке; 6 – граница сингулярности (2.13); 7 – множество рассчитанных вариантов.

потоки, прошедшие по разные стороны от тройной точки. На кромке отражающего клина формируется веер центрированной волны разрежения, который пересекается с отраженным фронтом. Для слабых ударных волн непосредственно за фронтом Маха и отраженной волной реализуется дозвуковое течение (затененная область на рис. 1). Однако ниже по течению волна разрежения переводит поток в сверхзвуковой. Сверхзвуковой режим на выходе из канала является необходимым условием реализуемости такого стационарного течения.

Исходными данными задачи являются число Маха набегающего потока M_0 и угол наклона фронта падающего скачка β . При фиксированных размерах клина течение зависит также и от высоты L узкой части канала. Для реализуемости такого течения необходимо, чтобы высота канала L была больше некоторого минимального размера L_m . Стационарное течение возможно лишь в случаях $L \geq L_m$, при которых отраженная волна приходит на верхнюю стенку правее центра волны разрежения. Чтобы уменьшить количество исходных данных, в данной работе рассматривались конфигурации с минимальным значением высоты $L = L_m$, т.е. такие конфигурации, при которых отраженная ударная волна проходит бесконечно близко от центра волны разрежения. Это несколько усложняет технологию численного моделирования, но сужает количество исходных данных до двух: M_0 и β . В таких конфигурациях высота фронта Маха имеет максимальное значение.

В численных расчетах стационарное течение отыскивалось как предельное установившееся по времени нестационарное течение.

Двумерное нестационарное течение невязкого совершенного газа с постоянными теплоемкостями описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{G}(\mathbf{a}) = \mathbf{H}$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ (e + p)v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ S \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2)$$

Здесь x – координата вдоль нижней отражающей плоскости, y – ортогональная к x координата, ρ и p – плотность и давление, u и v – компоненты скорости вдоль осей x и y соответственно, e – полная энергия единицы объема, показатель адиабаты $\gamma = 5/3$, S – источник тепла, который в основной модели отсутствует. Он будет описан дополнительно по мере появления.

Граничными условиями являются условия непротекания на стенках канала и условия Ренкина-Гюгонио на ударных волнах. Обезразмеривание величин проводилось по высоте узкой части канала, плотности и скорости звука набегающего потока.

Технология численных расчетов в целом совпадает с [6]. Для численного решения использовался базовый метод [10], адаптированный для криволинейных подвижных сеток, с алгоритмом выделения и отслеживания фронтов ударных волн и контактного разрыва.

Методика расчета состояла из двух этапов: расчет полного стационарного течения, и более точный расчет потока в окрестности тройной точки. На первом этапе для заданных значений M_0 и β проводился расчет полного течения с $L = L_m$. Подвижными границами расчетной области являлись фронт Маха, фронт отраженной волны и внутренняя сеточная линия, исходящая из тройной точки, которая подстраивалась под форму контактного разрыва. Кромка отражающего клина с центром веера волны разрежения всегда располагалась на фронте отраженной волны. Стационарное решение достигалось установлением по времени.

На втором этапе расчет продолжается на подвижной сетке, непрерывно стягивающейся к тройной точке. Сетка стягивается с сохранением геометрического подобия. Скорость стягивания подбирается таким образом, чтобы скорости движения нижней, верхней и правой границ были сверхзвуковыми относительно газа. Такой подход позволяет избежать проблем с граничными условиями на границе сетки, стягивающейся к тройной точке. В каждый момент времени стягивающаяся сетка характеризуется фактором стягивания F_s , который непрерывно уменьшался от 1 до 10^{-8} . На этапе стягивания также применяются процедуры выделения ударных волн и контактного разрыва, что позволяет получать с высокой точностью количественную информацию о геометрии поверхностей разрывов на всех масштабах стягивания. Основное отличие от [6] состояло в использовании расширенного формата “база + смещение” для представления параметров поля течения в оперативной памяти. В качестве базы использовались параметры потока в тройной точке, вычисленные по локальной трехударной теории. Такой подход в сочетании с частичным программированием на ассемблере позволил существенно повысить точность расчетов на заключительных этапах стягивания.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Выше описанная вычислительная технология слишком ресурсоемка для поиска границы сингулярности только с помощью большой серии расчетов. Предварительное аналитическое исследование может уменьшить объем и повысить надежность вычислительных результатов. Далее для оценки градиентов параметров в тройной точке используем известный подход хорошо развитой локальной теории [11], но в более компактном изложении.

2.1. Градиенты для одиночного криволинейного скачка

Законы сохранения массы, импульса и энергии для косоугольного скачка (рис. 3, а) приводят к четырем уравнениям для параметров по разные стороны от фронта ударной волны

$$\rho_0 q_0 \sin \beta = \rho q \sin \theta \quad (2.1)$$

$$p_0 + \rho_0 q_0^2 \sin^2 \beta = p + \rho q^2 \sin^2 \theta \quad (2.2)$$

$$q_0 \cos \beta = q \cos \theta \quad (2.3)$$

$$(p - p_0)(\gamma + 1) = 2(\rho_0 q_0^2 \sin^2 \beta - \gamma p_0) \quad (2.4)$$

где p , ρ , q – давление, плотность и модуль скорости. Угол β входа потока, угол выхода θ и угол отклонения потока $\delta = \beta - \theta$ показаны на рис. 3а. Вместо баланса энергии удобнее использовать уравнение для соотношений давлений на косоугольном скачке (2.4), которое является следствием законов сохранения. Считаем, что набегающий поток однородный. Дифференцирование этих соотношений вдоль фронта ударной волны приведет к связям производных ρ_s , q_s , p_s и δ_s с кривизной фронта ударной волны β_s . Здесь и далее буквенные индексы обозначают частную производную

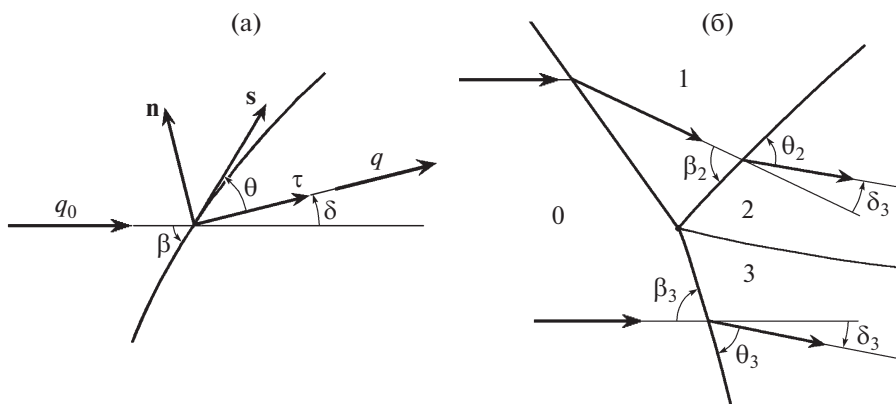


Рис. 3. Обозначения угловых параметров потока для одиночной ударной волны (а) и для тройной конфигурации (б); β – угол входа, θ – угол выхода, δ – угол отклонения

по направлению. Выразим p_s через производную δ_s , которая характеризует линии тока позади фронта. После дифференцирования (2.2) и исключения ρ_0 и q_0 с помощью (2.1) и (2.3) получим

$$p_s + (\rho q^2)_s \sin^2 \theta = \rho q^2 \delta_s \sin 2\theta \tag{2.5}$$

Для нахождения $(\rho q^2)_s$ продифференцируем произведение уравнений (2.1) и (2.3) с аналогичным последующим исключением параметров входного потока. В результате получим после сложных преобразований

$$\rho q^2 \delta_s \cos 2\theta - \frac{\sin 2\delta}{\sin 2\beta} \rho q^2 \beta_s = (\rho q^2)_s \sin \theta \cos \theta \tag{2.6}$$

Аналогичные действия после дифференцирования уравнения (2.4) приведут к

$$p_s(\gamma + 1) = 4\rho q^2 \beta_s \sin \theta \cos \theta \tag{2.7}$$

После исключения из последних трех уравнений (2.5), (2.6) и (2.7) величин $(\rho q^2)_s$ и β_s получим

$$p_s \left(1 - \frac{\gamma + 1}{4} \frac{\sin 2\delta}{\sin 2\beta \cos^2 \theta} \right) = \rho q^2 \delta_s \tan \theta \tag{2.8}$$

Дальнейшие действия связаны с привлечением дифференциальных уравнений движения за фронтом ударной волны. Используем уравнения стационарного течения в переменных годографа q и φ , которые являются следствием системы (1.1) при $S = 0$. Здесь φ – угол наклона вектора скорости к оси x . В криволинейных ортогональных координатах τ, n , связанных с линиями тока уравнения имеют компактный вид

$$\begin{aligned} (\rho q)_\tau + \rho q \varphi_n &= 0, & \rho q q_\tau + p_\tau &= 0 \\ \rho q^2 \varphi_\tau + p_n &= 0, & \rho p_\tau - \gamma p \rho_\tau &= 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Предполагаем, что (2.9) выполняются не только в области течения, но и на границе, т.е. на заднем фронте ударной волны. Исключим в (2.9) производные ρ_τ и q_τ . В полученных двух уравнениях выразим производные по нормали n через производные вдоль фронта и вдоль линии тока, используя простые соотношения (см. рис. 3а)

$$p_s = \mathbf{s} \cdot \nabla p = (\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\tau}) p_\tau + (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) p_n = p_\tau \cos \theta + p_n \sin \theta$$

В результате получим два уравнения, связывающие производные $p_\tau, p_s, \varphi_\tau, \varphi_s$.

$$\begin{aligned} (1 - M^2) p_\tau \sin \theta + \rho q^2 \varphi_\tau \cos \theta - \rho q^2 \varphi_s &= 0 \\ p_\tau \cos \theta - \rho q^2 \varphi_\tau \sin \theta - p_s &= 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь M – локальное число Маха. С учетом того, что для однородного потока перед ударной волной $\varphi_s = \delta_s$, три уравнения (2.8) и (2.10) сводятся к одному уравнению для производных вдоль линии тока

$$p_\tau B + \varphi_\tau A \rho q^2 \tan \theta = 0$$

$$B = 1 - M^2 \sin^2 \theta - A, \quad A = 2 \cos^2 \theta - \frac{\gamma + 1 \sin 2\delta}{4 \sin 2\beta} \quad (2.11)$$

Используя (2.11) не сложно выразить и все остальные градиенты через кривизну линии тока φ_τ .

2.2. Тройная точка (точка ветвления)

Схема течения около тройной точки с обозначениями направлений отсчета углов в классической трехударной теории изображена на рис. 3б. Уравнение (2.11) справедливо как для отраженного фронта, так и для фронта Маха. Для отраженного фронта отсчет углов совпадает с принятыми при выводе уравнения (2.11), но для фронта Маха нужно сделать замену $\beta \rightarrow (\pi - \beta)$, $\theta \rightarrow (\pi - \theta)$ и $\delta \rightarrow -\delta$. По свойству тангенциального разрыва производные p_τ и φ_τ в секторах 2 и 3 на рис. 3б должны быть одинаковыми. В результате получим систему

$$\begin{aligned} B_2 p_\tau + C_2 \varphi_\tau &= 0 \\ B_3 p_\tau - C_3 \varphi_\tau &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$B_i = 1 - M_i^2 \sin^2 \theta_i - A_i, \quad C_i = A_i \rho_i q_i^2 \tan \theta_i, \quad A_i = 2 \cos^2 \theta_i - \frac{\gamma + 1 \sin 2\delta_i}{4 \sin 2\beta_i}, \quad i = 2, 3$$

в которой индексы 2 и 3 относятся к предельным параметрам в тройной точке за отраженным фронтом и фронтом Маха, т.е. в секторах 2 и 3 на рис. 3б.

Однородная система (2.12) имеет конечное ненулевое решение, если определитель системы равен нулю

$$\Delta \equiv B_2 C_3 + B_3 C_2 = 0 \quad (2.13)$$

На рис. 2 изображена красная кривая b , которая разделяет области исходных данных с отрицательными и положительным значениями определителя Δ . Точка излома на кривой b является границей между прямой и инверсной конфигурациями Маха. На кривой b существует конечное ненулевое решение системы (2.12), а вне этой кривой градиенты и кривизна либо нуль, либо бесконечность (как было предсказано Гудерлеем). Для разрешения этого вопроса были выполнены расчеты в полной постановке для исходных данных, отмеченных точками (7) на рис. 2.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ОБСУЖДЕНИЕ

Расчеты были выполнены для совершенного газа ($\gamma = 5/3$) для случаев с входными данными $\beta = 48^\circ$ и $M_0 = 2.3, 2.34, 2.38, 2.42, 2.46, 2.5$. На диаграмме рис. 2 они отмечены жирными точками (7), расположенными по разные стороны от кривой b . Значение 2.38 попадает на кривую b . Используемая сетка содержала 640×800 ячеек.

Обычно для маховского отражения в плоском канале выпуклость фронта Маха направлена по потоку, а выпуклость отраженного фронта направлена навстречу потоку. При этом давление за ударными волнами при перемещении снизу вверх монотонно уменьшается. Выпуклость контактного разрыва обычно направлена вниз, т.е. к плоскости отражения. Знаки кривизны разрывов в таких ситуациях будем считать положительными. Это означает, что в ранее принятых обозначениях под кривизной фронта Маха κ_M , отраженного фронта κ_R и контактного разрыва κ_C понимаем

$$\kappa_M = -\frac{\partial \beta_3}{\partial s}, \quad \kappa_R = -\frac{\partial \beta_2}{\partial s}, \quad \kappa_C = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$$

На рис. 4 изображены расчетные зависимости кривизны контактного разрыва и фронта Маха как функции натурального параметра вдоль фронтов от тройной точки. Кривые составлены из результатов девяти последовательных расчетов с различными значениями $F_z = 1 \rightarrow 10^{-8}$. Сетки этих расчетов частично перекрывают друг друга. Несмотря на то что результат от каждой ячейки изображается в виде дискретной точки, вся совокупность точек выглядит как жирная кривая. Можно заметить отклонения дискретных точек в переходных зонах, иллюстрирующих процесс уточнения решения при уменьшении F_z . Для более подробного изображения около нуля ось ординат растянута заменой аргумента на $s^{1/3}$. Графики показывают неограниченное возрастание кривизны, т.е. градиентную сингулярность при $M_0 < 2.38$ (кривые 1 и 2). При $M_0 = 2.38$ (кривая 3) кри-

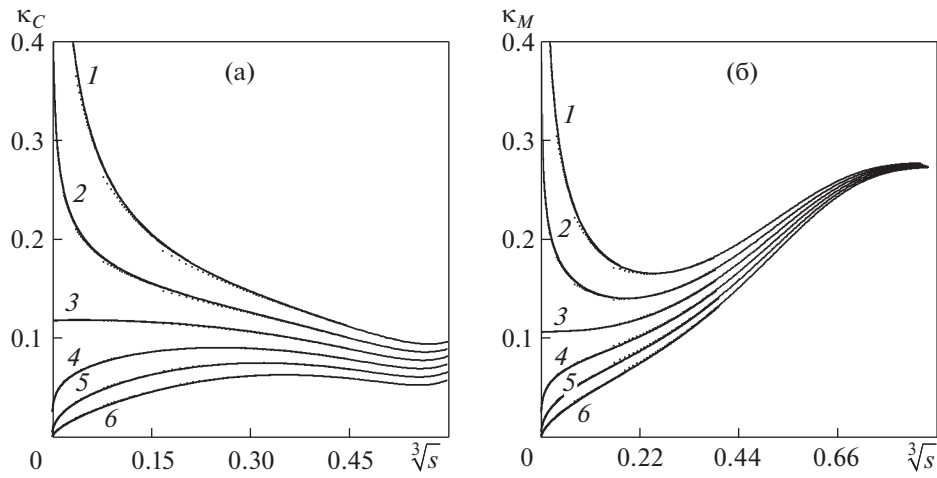


Рис. 4. Кривизна тангенциального разрыва (а) и фронта Маха (б) как функции нормированного натурального параметра s от тройной точки: $\beta = 48^\circ$; $M_0 = 2.3, 2.34, 2.38, 2.42, 2.46$ и 2.50 (1–6).

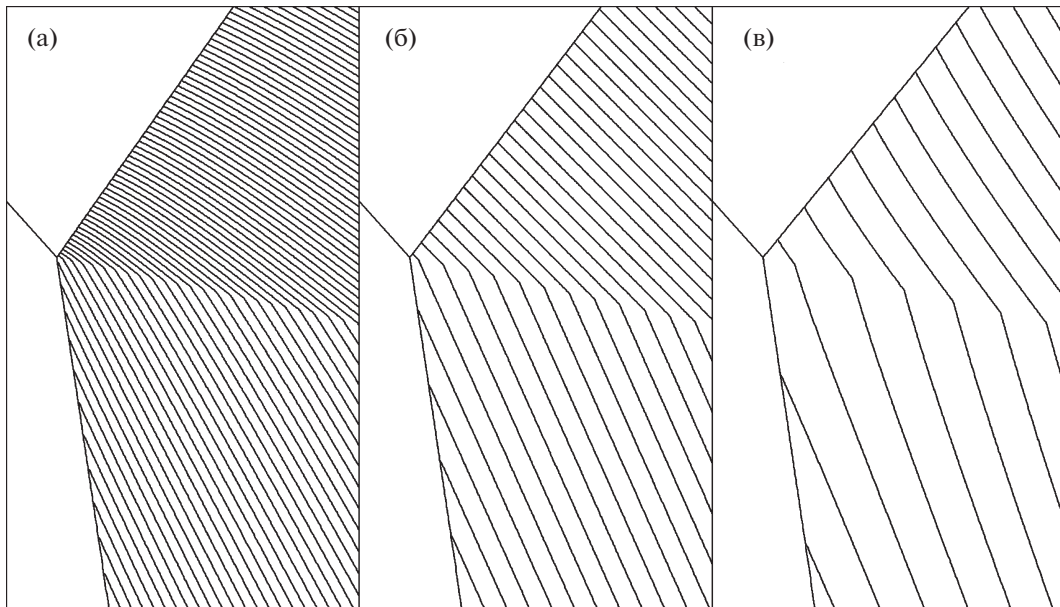


Рис. 5. Изолинии фрагментов поля давления около тройной точки для $\beta = 48^\circ$ и различных $M_0 = 2.30$ (а), 2.38 (б), 2.46 (в); $F_z = 10^{-3}$, шаг изолиний $\Delta p = 10^{-5}$.

визна около нуля выходит на конечное ненулевое значение, а при $M_0 > 2.38$ (кривые 4–6) кривизна стремится к нулю, т.е. сингулярное поведение первых частных производных параметров течения и кривизны фронтов исчезает, но сохраняется особенность во вторых производных. Таким образом, графики на рис. 4 подтверждают предположение о том, что формула (2.13) описывает границу существования сингулярности в плоскости исходных данных.

На рис. 5 изображены изобары фрагментов поля давления в окрестности тройной точки для трех из выше упомянутых вариантов: $M_0 = 2.30$ (а), 2.38 (б), 2.46 (в) при факторе стягивания $F_z = 10^{-3}$. Вертикальный размер фрагментов составляет 6×10^{-4} высоты канала. Фрагменты содержат приблизительно 300×600 ячеек расчетной сетки. Изобары для всех вариантов изображены с одинаковым шагом дискретности $\Delta p = 10^{-5}$. Изломы изобар указывают на местоположение тангенциального разрыва. По плотности расположения изобар хорошо видно различие в величине гради-

ентов давления для вариантов с сингулярностью (а) и без сингулярности (в). Наблюдается различие в выпуклости и в тенденции сгущения изобар к тройной точке за фронтом отраженной ударной волны. В пограничном варианте (б) изобары почти прямолинейны с одинаковым шагом. В вариантах (а) и (в) прогиб изобар прямо противоположный, что говорит о разных знаках вторых производных поля давления.

В случае осесимметричного течения система (2.12) будет неоднородной. Члены в правой части могут возникать как из-за неоднородности набегающего потока, так и из-за источников членов в уравнениях движения. В этих случаях ситуация с решением системы (2.12) изменится. Везде, за исключением найденной границы (2.13), будет существовать ненулевое решение. Для выяснения вопроса о реализуемости таких решений был проведен численный эксперимент с искусственным источником S в уравнении энергии в системе (1.1). Вставленный источник тепла действовал вблизи тройной точки только в секторе между фронтом Маха и тангенциальным разрывом в малой ограниченной области размером порядка 1% от характерного размера задачи L

$$S = b(r) \frac{\rho_0 a_0^3}{L}, \quad b(r) = \frac{K}{1 + 4 \times 10^4 r^2 / L^2}$$

где r – расстояние от тройной точки, ρ_0 и a_0 – плотность и скорость звука набегающего потока, безразмерная константа K характеризует интенсивность источника или стока непосредственно в тройной точке.

Источник повлияет на формулы локальной теории через четвертое уравнение (2.9), которое примет вид

$$\rho p_\tau - \gamma p \rho_\tau = \rho(\gamma - 1) \frac{\rho_0 a_0^3}{qL} b(r)$$

Опуская повторный вывод формул, выпишем для этого случая итоговый результат аналога системы (2.12) в безразмерной форме

$$\begin{aligned} B_2 p_\tau + C_2 \varphi_\tau &= 0 \\ B_3 p_\tau - C_3 \varphi_\tau &= -K \sin^2 \theta_3 M_3^2 (\gamma - 1) q_3^{-1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Через решение системы (3.1) выражаются кривизны отраженного фронта и фронта Маха в тройной точке ($\kappa_C = \varphi_\tau$):

$$\kappa_R = \frac{\gamma + 1}{4} \left(\frac{\varphi_\tau}{\cos \theta_2} - \frac{p_\tau}{\rho_2 q_2^2 \sin \theta_2} \right), \quad \kappa_M = \frac{\gamma + 1}{4} \left(\frac{\varphi_\tau}{\cos \theta_3} + \frac{p_\tau}{\rho_3 q_3^2 \sin \theta_3} \right) \quad (3.2)$$

На рис. 6 изображены расчетные зависимости кривизны контактного разрыва и фронта Маха как функции натурального параметра вдоль фронтов от тройной точки для двух вариантов источника с константой $K = 2$ и $K = -2$. Существенное влияние источника на кривизну фронтов проявляется лишь на расстоянии $s < 0.01$ от тройной точки. Видно, что при $M_0 = 2.3$ (кривые 1 и 2) сингулярность сохранилась, а при $M_0 = 2.5$ (кривые 3 и 4) реализуется конечное значение кривизны в тройной точке. В последнем случае ($M_0 = 2.5$) кривизна фронтов в тройной точке хорошо согласуется с локальной теорией (3.1–3.2), согласно которой при положительном $K = 2$ кривизны $\kappa_C = 0.0573$ и $\kappa_M = -0.0284$. При $K = -2$ величины такие же, но с обратным знаком. Теоретические кривизны при $M_0 = 2.3$ ($\kappa_C = \mp 0.1652$, $\kappa_M = \mp 0.2551$ при $K = \pm 2$) совсем не согласуются с результатами расчетов, включая расхождения по знаку при $K = 2$. Причиной расхождения является сингулярность. Сам вывод аналитических формул предполагает существование конечных предельных градиентов в тройной точке, что в условиях сингулярности не выполняется.

На рис. 7 изображены изобары фрагментов поля давления в окрестности тройной точки для этих четырех вариантов. Вертикальный размер фрагментов составляет 6×10^{-3} высоты канала, т.е. в 10 раз больше, чем на рис. 5. Изобары для всех фрагментов также изображены с одинаковым, но увеличенным шагом дискретности $\Delta p = 10^{-4}$. На нижних фрагментах (в) и (г) сингулярность отсутствует. Константа K заметно влияет на расположение изобар. На фрагменте (в) видна изобара, которая касается фронта Маха. Это означает, что при подходе к тройной точке вдоль фронта Маха давление повышается, и кривизна фронта становится отрицательной. На фрагменте (г) наблюдается локальный минимум давления в тройной точке. Это означает, что выше тройной точки кривизна отраженного фронта становится отрицательной. Таким образом, расчеты при $M_0 = 2.5$ количественно и качественно согласуются с локальной теорией. При $M_0 = 2.3$

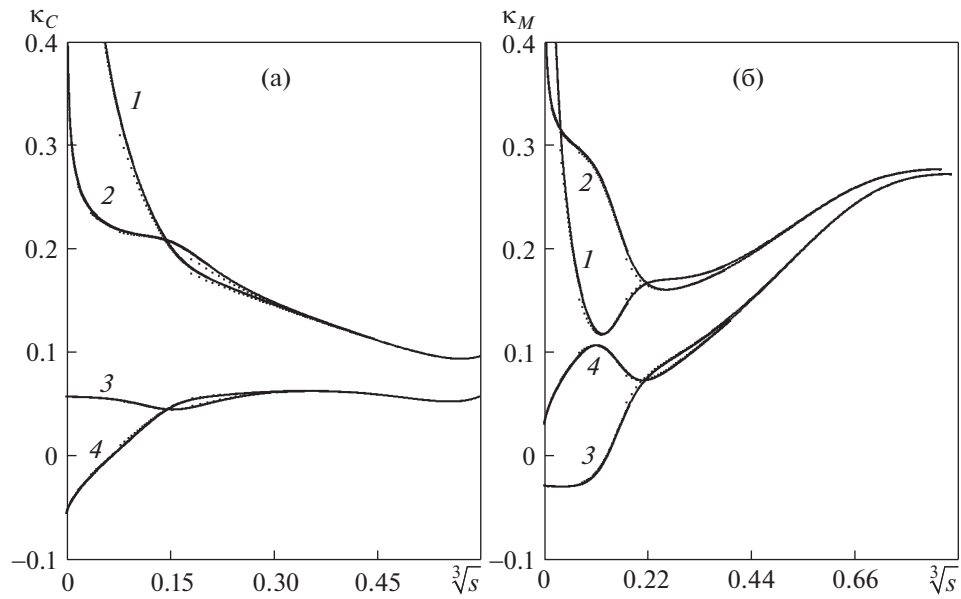


Рис. 6. Кривизна тангенциального разрыва (а) и фронта Маха (б) как функции натурального параметра s в расчетах с искусственным источником в секторе за фронтом Маха: $\beta = 48^\circ$; $M_0 = 2.3$, $K = \pm 2$ (1, 2); $M_0 = 2.5$, $K = \pm 2$ (3, 4).

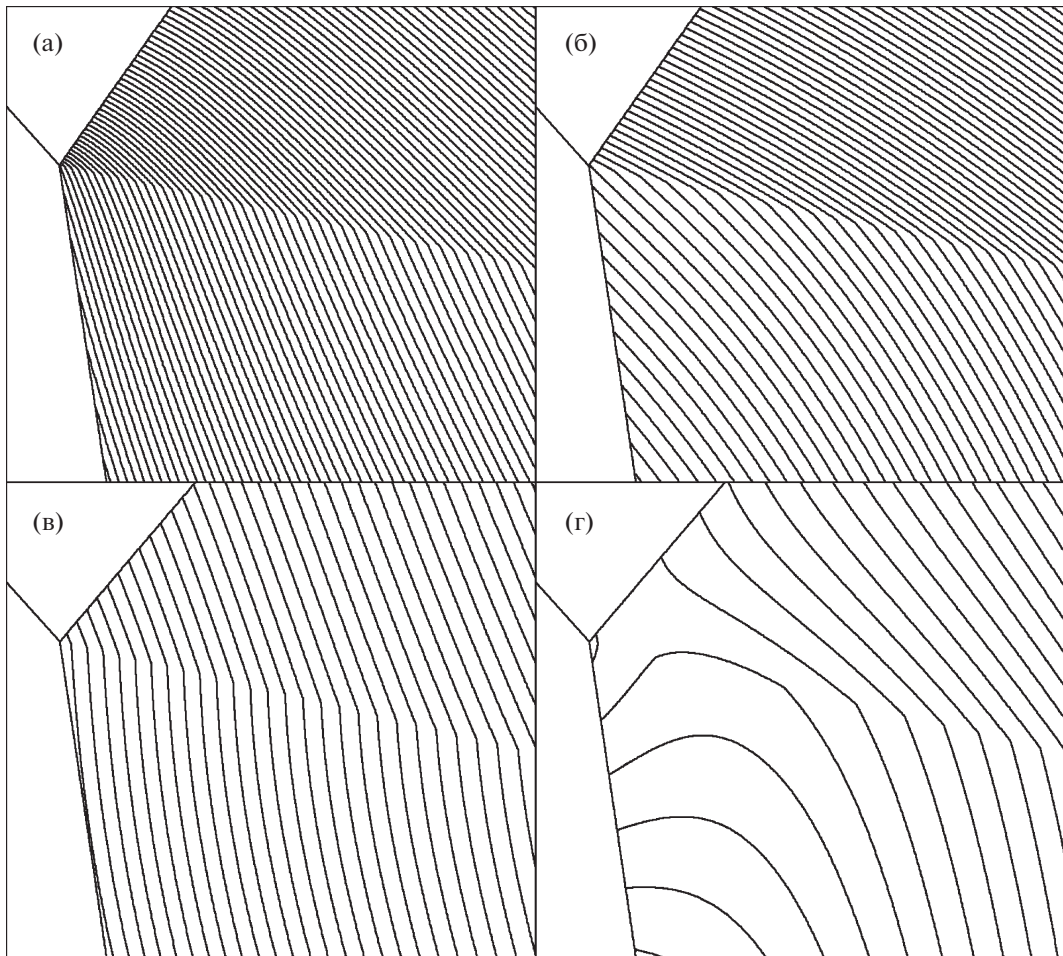


Рис. 7. Изолинии фрагментов поля давления в расчетах с источником за фронтом Маха для различных (M_0, K) : (а) (2.3, 2), (б) (2.3, -2), (в) (2.5, 2), (г) (2.5, -2); $F_z = 10^{-2}$, шаг изолиний $\Delta p = 10^{-4}$.

(фрагменты (а) и (б)) картина иная. Расположение изолиний мало отличается от того, что было на рис. 5а. Источник не сильно влияет на величину градиентов. При подводе тепла ($K > 0$) градиенты увеличиваются, а при отводе тепла ($K < 0$) уменьшаются, но в целом расположение изобар и сингулярность сохраняются.

На основании этих расчетов можно сделать вывод, что источниковые члены конечной интенсивности не могут привести к устранению сингулярности. Аналогичным свойством должны обладать и другие вариации в постановке задачи, не приводящие к дополнительным особенностям частных производных решения в тройной точке, например, неоднородное или осесимметричное течение. Можно выдвинуть гипотезу, что найденная граница сингулярности имеет универсальный характер.

Заметим, что утверждение работы [3] о том, что граница возникновения сингулярности должна находиться в промежутке между кривыми 4 и 5 на рис. 2, справедливо лишь в узкой пограничной зоне между прямыми и инверсными конфигурациями Маха. Излом на границе б в точности совпадает с точкой Крокко, которая соответствует возникновению бесконечной кривизны при соединенного скачка на острие клина в сверхзвуковом потоке [1]. Нижняя часть границы б соответствует инверсным конфигурациям, которые в принятой постановке задачи с прямолинейным отражающим клином не существуют, но могут быть реализованы при изменении геометрии отражающего клина или граничных условий на верхней стенке канала [12]. Для течений в плоском канале непрерывный переход по исходным данным от прямого маховского отражения к инверсному обычно не реализуется. Поэтому существование сингулярности в инверсных конфигурациях Маха нуждается в дополнительном подтверждении.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С привлечением локальной трехударной теории криволинейных волн построена возможная граница в области исходных данных для существования градиентной сингулярности в тройной точке конфигураций Маха. Справедливость границы подтверждена высокоточным численным моделированием в полной постановке для стационарного маховского отражения в плоском канале. Дополнительные вычислительные эксперименты с искусственными источниками показали устойчивость сингулярности к подобным вариациям уравнений движения. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что сингулярность в тех же границах существует и в других геометриях течения. Наличие сингулярности необходимо учитывать как в интерпретации результатов экспериментов, так и в использовании простых моделей, основанных на локальной трехударной теории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guderley K.G.* Considerations of the structure of mixed subsonic-supersonic flow patterns // Wright Field Report F-TR-2168-ND. 1947. P. 144–149.
2. *Kawamura R., Saito H.* Reflection of shock waves – 1. Pseudo-stationary case // J. Phys. Soc. Jpn. 1956. V. 11. P. 584.
3. *Sternberg J.* Triple-shock-wave intersections // Phys. Fluids. 1959. V. 2. № 2. P. 179–206.
4. *Hornung H.G.* Gradients at a curved shock in reacting flow // Shock Waves. 1998. V. 8. P. 11–21.
5. *Uskov V.N., Mostovikh P.S.* The flow gradient in the vicinity of triple points // Proceedings of 21st Intl. Shock Interact. Symp. Latvia, 3-8 August 2014. Riga: Univ. Latvia. 2014. P. 57–62.
6. *Васильев Е.И.* Характер сингулярности тройной точки при стационарном отражении слабых ударных волн // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 6. С. 91–100.
7. *Васильев Е.И., Крайко А.Н.* Численное моделирование дифракции слабых скачков на клине в условиях парадокса Неймана // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1999. Т. 39. № 8. С. 1393–1404.
8. *Васильев Е.И.* Четырехволновая схема слабого маховского взаимодействия ударных волн в условиях парадокса Неймана // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 3. С. 144–152.
9. *Skews B.W., Li G., Paton R.* Experiments on Guderley Mach reflection // Shock Waves. 2009. V. 19. P. 95–102.
10. *Васильев Е.И.* W-модификация метода С.К. Годунова и ее применение для двумерных нестационарных течений запыленного газа // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1996. Т. 36. № 1. С. 122–135.
11. *Molder S.* Curved shock theory // Shock Waves. 2016. V. 26. P. 337–353.
12. *Ben-Dor G., Elperin T., Li H., Vasiliev E.* The influence of the downstream pressure on the shock wave reflection phenomenon in steady flows // J. Fluid Mech. 1999. V. 386. P. 213–232.