УДК 532.526.3

# СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ В ПЕРЕХОДНОЙ ОБЛАСТИ ПРИ НИЗКОЙ СТЕПЕНИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПОТОКА

## © 2020 г. М. В. Устинов\*

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Московская обл., Россия \*E-mail:Ustinov@tsagi.ru Поступила в редакцию 11.10.2019 г. После доработки 17.12.2019 г. Принята к публикации 17.12.2019 г.

Создан статистический метод для описания коэффициента перемежаемости в области ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое при низком уровне внешних возмущений. Он основан на предположении о том, что турбулентность появляется при локальном по пространству и времени отклонении скорости от среднего значения на пороговую величину. Для двух основных сценариев перехода — усиления стационарных вихрей неустойчивости поперечного течения на стреловидном крыле и волн Толлмина—Шлихтинга — получены аналитические формулы для частоты возникновения когерентных структур — турбулентных пятен и клиньев, и коэффициента перемежаемости или средней доли покрываемой ими площади поверхности.

*Ключевые слова:* пограничный слой, ламинарно-турбулентный переход, перемежаемость **DOI:** 10.31857/S0568528120040118

При малой степени турбулентности потока ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое инициируется экспоненциально растущими возмущениями — волнами Толлмина-Шлихтинга или стационарными либо нестационарными модами неустойчивости поперечного течения на стреловидном крыле. Для предсказания положения перехода в этом случае обычно применяется e-N метод, основанный на оценке коэффициентов усиления наиболее быстрорастущих из них [1, 2]. В последнее время также предложен амплитудный метод, в котором находится амплитуда возмущений скорости в пограничном слое, и критерием перехода является достижение ею порогового значения [3]. Пороговая амплитуда соответствует появлению вторичных возмушений – субгармоник, растуших на фоне волны Толлмина–Шлихтинга или мод высокочастотной неустойчивости пограничного слоя стреловидного крыла, модулированного стационарными возмущениями скорости. Она выбирается из данных расчетных и экспериментальных исследований вторичной неустойчивости [4-7] и составляет 1-3% скорости внешнего течения для волн Толлмина-Шлихтинга и 25-30% для стационарных и нестационарных мод неустойчивости поперечного течения. Неопределенность пороговой амплитуды мала по сравнению с разбросом начальной амплитуды мод неустойчивости пограничного слоя, которая меняется на несколько порядков в зависимости от степени турбулентности потока и шероховатости поверхности. Поэтому амплитудный метод дает гораздо более точное предсказание точки перехода по сравнению с е-N методом.

В реальности смена режима течения в пограничном слое происходит не в точке, а на достаточно протяженном участке, где профиль скорости и напряжение трения на стенке постепенно меняются от значений, характерных для ламинарного, к соответствующим турбулентному состоянию. Длина этой переходной области сильно зависит от типа первичных возмущений, числа Рейнольдса перехода, продольного градиента давления и других факторов. В некоторых случаях она сравнима с размером ламинарного участка [8]. В эксперименте обычно находятся точки начала, середины и конца перехода, которые соответствуют разным значениям коэффициента перемежаемости, т.е. доли времени, в течение которой реализуется турбулентный режим течения. Для верификации методов предсказания ламинарно-турбулентного перехода требуются спосоустинов



**Рис. 1.** Система координат x, y, область влияния пробной точки O (а) и элемент площади поверхности dS (б), используемые для вычисления перемежаемости при переходе, вызванном неустойчивостью поперечного течения.

бы нахождения этой величины. Задача определения длины переходной области особенно актуальна при гиперзвуковой скорости потока, так как в ней достигаются максимальные значения тепловых потоков к обтекаемой поверхности.

Данная работа посвящена применению статистического подхода для вычисления коэффициента перемежаемости в переходной области, исходя из характеристик первичных возмущений. В ней предполагается, что турбулентность появляется при локальном отклонении скорости в пограничном слое от ее среднего значения на пороговую величину. В случае нестационарных первичных возмущений такие отклонения происходят локально как в пространстве, так и во времени, и порождают турбулентные пятна. При переходе, вызванном стационарными вихрями неустойчивости поперечного течения, в таких местах зарождаются турбулентные клинья. Частота появления этих структур находится методами теории случайных процессов исходя из амплитуды и спектров первичных возмущений в переходной области. Идеологически близкий подход к описанию перемежаемости, использующий эмпирические модели для частоты возникновения турбулентных пятен, был предложен в классических трудах Эммонса [9] и Нарасимхи [10, 11]. Точный статистический метод нахождения коэффициента перемежаемости в пограничном слое при повышенной степени турбулентности набегающего потока впервые реализован в [12]. Здесь он применен к описанию перехода, вызванного стационарными модами неустойчивости поперечного течения и волнами Толлмина–Шлихтинга.

### 1. ПЕРЕХОД, ВЫЗВАННЫЙ СТАЦИОНАРНЫМИ ВИХРЯМИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОПЕРЕЧНОГО ТЕЧЕНИЯ

Рассмотрим ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое на скользящем крыле, вызванный стационарными вихрями неустойчивости поперечного течения. Они порождаются шероховатостью поверхности вблизи передней кромки и далее распространяются практически вдоль линий тока внешнего течения. Поэтому для описания развития возмущений в пограничном слое удобно использовать систему координат, связанную с произвольной линией тока и показанную на рис. 1а. Продольная координата *x* в ней есть расстояние до передней кромки, а поперечная *y* — расстояние вдоль размаха до выбранной линии тока. В дальнейшем будут использоваться безразмерные переменные, введенные с помощью характерной толщины пограничного слоя  $\delta$  и скорости над пограничными слоем *u<sub>e</sub>* в области ламинарно-турбулентного перехода. Для простоты будем считать, что длина этой области мала по сравнению с хордой крыла и внешние линии тока в ней можно считать прямыми, наклоненными под местным углом стреловидности  $\chi_l$  к оси *x*, а скорость над пограничными слоем постояние.

Из-за селективного усиления стационарных мод их спектр по поперечному волновому числу  $\beta$  имеет узкий максимум вблизи  $\beta_m$ . В результате максимальные поперек пограничного слоя возмущения продольной составляющей скорости на заданном расстоянии *x* от передней

кромки представляют собой почти периодическую функцию *z* с медленно меняющейся амплитудой

$$u(x, y) = A(y)\sin(\beta_m y + \Theta(y))$$
(1.1)

Продольный масштаб  $L_y$ , на котором меняется амплитуда A и фаза  $\Theta$  существенно больше периода наиболее усиливающейся моды  $\lambda = 2\pi/\beta_m$ . Предполагается, что в переходной области возмущения усиливаются по экспоненте с постоянным инкрементом нарастания к и распространяются строго вдоль линий тока. Более точно это означает, что на другом расстоянии x' от передней кромки они описываются (1.1) с амплитудой

$$A(x', y) = A(y) \exp(\kappa(x - x'))$$

Таким образом, возмущения во всей переходной области однозначно определяются единственной случайной функцией A(v). Далее предполагается, что в любой точке, где амплитуда неоднородности скорости превышает пороговое значение  $a_{c}$ , пограничный слой становится турбулентным и турбулентность распространяется от нее вниз по потоку внутри клина, ось которого ориентированного вдоль линии тока. Угол полураствора этого турбулентного клина обозначим ф. Случайная функция A(y) имеет хаотически расположенные локальные максимумы. Амплитуда в каждом из них экспоненциально растет при удалении от передней кромки и в какой-то точке достигает порогового значения. В этой точке появляется турбулентный клин, соответствующий данному максимуму. Далее вниз по потоку окрестность максимума, в которой амплитуда превышает пороговое значение, расширяется, однако, считается, что она полностью находится внутри турбулентного клина. В этих предположениях область турбулентного течения, порождаемая каждым локальным максимумом амплитуды, в точности соответствует одному турбулентному клину и не выходит за его границы. Форма линии перехода на стреловидном крыле в виде пересечения многочисленных клиньев с прямолинейными образующими, полученная в эксперименте [13], подтверждает это предположение. Кроме того, предполагается, что наиболее интенсивное порождение турбулентных клиньев наблюдается при малой, по сравнению с критической, среднеквадратичной амплитуде возмущений скорости. При этом большие максимумы амплитуды, превышающие a<sub>c</sub>, расположены далеко друг от друга, и турбулентный клин. зародившийся на одном из них, не захватывает соседний максимум на протяжении области интенсивной генерации турбулентных клиньев.

Для нахождения перемежаемости при таком сценарии перехода выберем произвольную точку O на расстоянии x от передней кромки и вычислим вероятность того, что она находится внутри хотя бы одного из турбулентных клиньев, зародившихся выше по потоку. Назовем ее областью влияния  $\Omega$  – геометрическое место вершин турбулентных клиньев, содержащих внутри точку O. Она показана на рис. 1а и представляет собой клин с вершиной в пробной точке и углом полураствора  $\phi$  ориентированный вдоль линий тока и расширяющийся вверх по потоку. Турбулентное течение в пробной точке реализуется, если в области ее влияния зародился хотя бы один турбулентный клин. Разобьем область влияния на бесконечно малые элементарные площадки dS. Вероятность появления турбулентного клина на каждой из них  $d\gamma$  пропорционально ее площади

$$d\gamma = v_s(x')dS$$

Из-за однородности течения по размаху коэффициент пропорциональности  $v_s$  зависит только от расстояния до передней кромки x'. Вероятность турбулентного течения в пробной точке равна вероятности появления турбулентного клина хотя бы на одной из элементарных площадок. Она определяется выражением, выведенным в [9], которое является обобщением известной формулы для вероятности реализации как минимум одного из большого числа независимых событий на случай их бесконечного количества

$$\gamma(x) = 1 - \exp(-F(\gamma)); \quad F(\gamma) = \iint_{\Omega} v_s(x') dS$$
(1.2)

Так как подынтегральное выражение не зависит от y, интеграл в (1.2) сводится к одномерному

$$F(\gamma) = \int_{0}^{\infty} v_s(x - \xi) B\xi d\xi; \quad B = \mathrm{tg}(\chi_l + \varphi) - \mathrm{tg}(\chi_l - \varphi)$$
(1.3)

Здесь *В*ξ — длина сечения области влияния прямой параллельной передней кромке и отстоящей на расстояние ξ вверх по потоку от пробной точки.

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА № 4 2020

#### устинов

Для нахождения вероятности появления турбулентных пятен приходящейся на единицу площади поверхности рассмотрим трапециевидную площадку dS, показанную на рис. 16. Она ограничена по бокам линиями тока, отстоящими на большое расстояние L по размаху и двумя близкими прямыми, параллельными передней кромке и расположенными на расстояниях x' и x' + dx' от нее. Количество турбулентных клиньев, зародившихся на ней, есть разница между количествами клиньев, пересекших дальнюю и ближнюю к передней кромке стороны площадки. Так как каждый турбулентный клин соответствует одному выбросу амплитуды за уровень  $a_c$ , то их количество на этих стенках равно числу выбросов амплитуды на них. Обозначив  $v_L(x')$  число выбросов амплитуды за этот уровень, приходящееся на единицу длины на расстоянии x' от передней кромки, получим следующее выражение для числа клиньев, возникших на площадке dS

$$n = \left[ v_L(x' + dx') - v_L(x') \right] I$$

Поделив его на площадь *Ldx*', получим искомое выражение для среднего числа турбулентных клиньев, появившихся на единице площади

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{x}') = \frac{d\mathbf{v}_L}{d\mathbf{x}'} \tag{1.4}$$

Частота выбросов случайного процесса A(y) за уровень  $a_c$  определяется интегралом [14]

$$\mathbf{v}_L = \int_0^\infty a_y f(a_c, a_y) da_y \tag{1.5}$$

в который входит совместная функция распределения амплитуды и ее производной по размаху  $f(a, a_y)$ . Если возмущения скорости являются нормальной случайной величиной, то их амплитуда и ее производная — независимые случайные величины. Их совместная функция распределения есть произведение функций распределений амплитуды  $\Phi(a)$  и ее производной  $\Psi(a_y)$  вида

$$f(a, a_y) = \Phi(a)\Psi(a_y)$$
(1.6)  
$$\Phi(a) = \frac{a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right); \quad \Psi(a_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\Delta_8}} \exp\left(-\frac{a_y^2}{2\sigma^2\Delta_8^2}\right)$$

Здесь  $\sigma$  – среднеквадратичная амплитуда возмущений скорости. При этом амплитуда имеет распределение Рэлея, а ее производная – нормальное распределение с дисперсией, равной произведению среднеквадратичной амплитуды возмущений скорости на ширину их спектра  $\Delta_{\beta}$ . Последняя определяется из спектральной плотности возмущений скорости по поперечному волновому числу *S*( $\beta$ ) следующим образом (например, [14])

$$\Delta_{\beta}^{2} = \frac{1}{\sigma^{2}} \int_{0}^{\infty} (\beta - \beta_{m})^{2} S(\beta) d\beta; \quad \beta_{m} = \frac{1}{\sigma^{2}} \int_{0}^{\infty} \beta S(\beta) d\beta; \quad \sigma^{2} = \int_{0}^{\infty} S(\beta) d\beta$$
(1.7)

Подстановка (1.6) в (1.5) и интегрирование по  $a_y$  дают выражение для частоты выбросов амплитуды за уровень  $a_c$ 

$$v_L = \frac{\Delta_{\beta}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a^*} \exp\left(-\frac{1}{2a^{*2}}\right); \quad a^* = \frac{\sigma(x')}{a_c}$$
 (1.8)

Она зависит только от двух параметров — относительной амплитуды  $a^*$  и ширины спектра  $\Delta_{\beta}$ . В используемом здесь приближении ширина спектра возмущений в переходной области считается постоянной, а их относительная амплитуда экспоненциально зависит от продольной координаты

$$a^* = a_0^* \exp\left(\kappa(x - x')\right)$$

Здесь  $a_0^*$  — относительная амплитуда в пробной точке *x*. В этих предположениях частота появления турбулентных клиньев зависит от *x* только через соответствующую зависимость относительной амплитуды возмущений

$$\mathbf{v}_{s} = \frac{\kappa \Delta_{\beta}}{\sqrt{2\pi}a^{*}} \frac{1}{a^{*2}} - 1 \bigg) \exp\left(-\frac{1}{2a^{*2}}\right)$$
(1.9)

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА № 4 2020

Легко видеть, что она максимальна при  $a^* = a_m^* = (2 + \sqrt{3})^{-1/2}$ , обращается в нуль при  $a^* = 1$  и становится отрицательной при  $a^* > 1$ . Отрицательная частота появления турбулентных клиньев не имеет смысла и связана с нарушением предположения о редкости выбросов амплитуды за пороговый уровень. Поэтому предполагается, что  $v_s = 0$  при  $a^* > 1$ , и в интеграле (1.3) для функции перемежаемости, при относительной амплитуде в пробной точке, большей единицы, нижний предел интегрирования соответствует значению переменной  $\xi$ , для которого  $a^*(x - \xi) = 1$ . Подстановка (1.9) в (1.3), замена переменных

$$\xi = \frac{1}{\kappa} \ln \left( \frac{a_0^*}{a^*} \right)$$

и интегрирование по частям приводят к следующему выражению для функции перемежаемости

$$F(\gamma) = \frac{1}{\kappa_{CF}^*} I(a_0^*); \quad \kappa_{CF}^* = \frac{2\kappa}{\Delta_{\beta} B}$$

Здесь  $\kappa_{CF}^*$  — нормированный инкремент нарастания, а  $I(a_0^*)$  — универсальная функция вида

$$I(a_0^*) = \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}a_0^*}\right); \quad a_0^* < 1$$

$$I(a_0^*) = \sqrt{\frac{2}{\pi e}}\ln(a_0^*) + \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad a_0^* > 1$$
(1.10)

Обозначим  $x_*$  — точку, в которой среднеквадратичная амплитуда возмущений равна критической. Согласно второму равенству (1.10), вниз по потоку от нее зависимость функции перемежаемости от продольной координаты является линейной

$$F(\gamma) = \frac{x - x_t}{\Delta x_t}; \quad x_t = x_* - \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\pi e}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad \Delta x_t = \frac{\sqrt{2\pi e}}{\Delta_{\beta} B}$$
(1.11)

Здесь  $x_t$  – точка начала перехода, в которой начинается рост перемежаемости при продолжении линейной зависимости (1.11) вверх по потоку,  $\Delta x_t$  – характерная длина переходной области. При  $x < x_*$  зависимость функции перемежаемости от продольной координаты более сложная, однако, она близка к линейной при больших значениях нормированного инкремента нарастания  $\kappa_{CF}^*$ . Это можно показать, разложив функцию  $I(a_0^*)$  в ряд Тэйлора по x в окрестности точки  $x_*$ 

$$F(\gamma) \approx \frac{x - x_t}{\Delta x_t} + \frac{\pi e}{6} \kappa_{CF}^{*2} \left( \frac{x - x_*}{\Delta x_t} \right)^3; \quad x < x_*$$

Мерой отклонения зависимости функции перемежаемости от продольной координаты от линейного закона (1.11) может служить ее величина в точке начала перехода *x*<sub>t</sub>.

$$F(\gamma)(x_t) = \frac{\pi e}{6} \left[ \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]^3 \frac{1}{\kappa_{CF}^*} \approx \frac{0.04}{\kappa_{CF}^*}$$

Эта оценка показывает, что простая линейная зависимость  $F(\gamma)$  близка к точной только при достаточно больших значениях нормированного инкремента нарастания. На практике критерий ее применимости соответствует неравенству  $\kappa_{CF}^* > 1$ , которое выполняется при относительно больших инкрементах нарастания и узком спектре возмущений по поперечному волновому числу. Такие параметры соответствуют ламинарно-турбулентному переходу на относительно глад-

кой поверхности и при быстром разгоне потока. При меньших  $\kappa_{CF}^*$ , которые имеют место в экспериментах по исследованию ламинарно-турбулентного перехода в аэродинамических трубах при низкой скорости потока, зависимость функции перемежаемости от *x* заметно отклоняется от линейной, особенно в начале переходной области. Этот вывод иллюстрируют точные зависимости функции перемежаемости от нормированной продольной координаты  $X = (x - x_t)/\Delta x_t$ для разных значений  $\kappa_{CF}^*$ , построенные на рис. 2. Из них видно, что при уменьшении нормированного инкремента нарастания область перехода заметно расширяется, главным образом вверх

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА № 4 2020



**Рис. 2.** Зависимости функции перемежаемости (а) и коэффициента перемежаемости (б) от нормированной продольной координаты при переходе, вызванном неустойчивостью поперечного течения: 1-4 – расчет по точной формуле (1.10) для  $\kappa_{CF}^* = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6; 5$  – универсальная зависимость (1.11).

по потоку, т.е. перемежаемость появляется при существенно меньших значениях нормированной амплитуды.

Для сравнения созданной статистической теории с данными эксперимента использовались результаты визуализации линии ламинарно-турбулентного перехода на скользящем крыле методом испарения нафталина [13]. Доля поверхности с турбулентным пограничным слоем  $\gamma$ и частота появления турбулентных клиньев  $v_s$  определялась из данных визуализации следующим образом. В зоне перехода были проведены несколько прямых параллельных передней кромке. Расстояние между соседними прямыми соответствовало 5% хорды крыла *c*', равной 1.83 м. На каждой из этих прямых определялись количество турбулентных участков  $N_i$  и их суммарная длина  $l'_i$ . Индекс *i* здесь обозначает номер прямой начиная от ближайшей к передней кромке. Доля поверхности с турбулентным обтеканием и частота возникновения турбулентных клиньев вычислялись следующим образом:

$$\gamma(x_i) = l'_i / L'; \quad v_s \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = \frac{\delta'}{L'h'} (N_{i+1} - N_i)$$

В этих выражениях  $x_i$  — расстояние *i*-й прямой от передней кромки, L' — длина передней кромки модели, h' — расстояние между соседними прямыми,  $\delta' = c'R^{-1/2}$  — характерная толщина пограничного слоя, R — число Рейнольдса, вычисленное по хорде профиля.

Полученные таким способом зависимости перемежаемости и частоты появления турбулентных клиньев от безразмерного расстояния до передней кромки  $x_c = x'/c'$  при числе Рейнольдса

по длине хорды  $R = 2.4 \times 10^6$  показаны точками на рис. 3. Теоретические значения этих величин были получены из расчета среднеквадратичной амплитуды и спектра стационарных мод по поперечному волновому числу амплитудным методом, описанным в [3]. При этом среднеквадратичная амплитуда шероховатости поверхности  $r_a = 3.3 \,\mu$ m соответствовала данным эксперимента [13]. Коэффициент D = 12, связывающий характерный период шероховатости *l* с ее амплитудой, был выбран из условия совпадения точек с  $\gamma = 0.5$  в расчете и эксперименте. Из-за сильного изменения инкремента нарастания возмущений в переходной области, связанного с нелинейным насыщением их роста, интеграл (1.3) находился численно. Угол при вершине турбулентных клиньев  $\varphi$  задавался равным 10°, пороговая амплитуда  $a_c = 0.25$  соответствовала значению, найденному из обобщения данных большого количества экспериментов в [6, 7].

Полученные таким образом теоретические зависимости коэффициента перемежаемости, частоты появления турбулентных клиньев и нормированной амплитуды стационарных мод показаны линиями на рис. 3. Расчетные значения перемежаемости и амплитуды очень хорошо соответствуют данным эксперимента. Заметные расхождения амплитуды в последней точке, по-видимому, объясняются трудностями ее измерения в переходной области при наличии заметной доли поверхности с турбулентным пограничным слоем. В теории фигурирует некоторое вирту-



**Рис. 3.** Зависимости коэффициента перемежаемости (а), частоты появления турбулентных клиньев (б) и нормированной амплитуды возмущений скорости (в) от расстояния до передней кромки в условиях эксперимента [13]: 1 -расчет, 2 -эксперимент,  $3 - a_m^*$ .

альное значение амплитуды, соответствующее полностью ламинарному течению. В реальности области максимумов амплитуды заняты турбулентными клиньями. При измерении среднеквадратичной амплитуды в эксперименте эти области турбулентного течения, вероятно, не учитывались. Точность предсказания частоты возникновения турбулентных клиньев существенно хуже. Это объясняется как большой погрешностью ее измерения, превышающей 10%, так и недостаточной точностью ее вычисления. Тем не менее расчет очень хорошо предсказывает расположение и ширину области порождения турбулентных клиньев.

### 2. ПЕРЕХОД, ВЫЗВАННЫЙ ВОЛНАМИ ТОЛЛМИНА-ШЛИХТИНГА

В этом разделе рассматривается ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое на прямом крыле, вызванный волнами Толлмина–Шлихтинга. Приближение прямого крыла выбрано только по той причине, что свойства турбулентных пятен в этом случае хорошо известны, в отличие, например, от случая стреловидного крыла, где их форма может заметно отличаться. Для описания течения используется декартова система координат с началом на передней кромке и осями *x*, *y*, направленными вдоль потока и параллельно передней кромке. Безразмерные переменные вводятся аналогично разд. 1. Из-за селективного усиления возмущений их двумерный спектр по поперечному волновому числу  $\beta$  и частоте  $\omega$  имеет достаточно узкий максимум в точке ( $\beta_m$ ,  $\omega_m$ ). Ширина спектра по волновому числу  $\Delta_{\beta}$  и частоте  $\Delta_{\omega}$  определяется аналогично (1.7). Отметим, что при малой и умеренной дозвуковой скорости потока максимально усиливаются прямые волны Толлмина–Шлихтинга, соответствующие  $\beta_m = 0$ , однако при транс- и сверхзвуковой скорости потока максимум спектра волн неустойчивости может соответствовать и косым волнам с  $\beta_m \neq 0$ . В этом случае предполагается, что  $\Delta_{\beta} \ll \beta_m$ .

Из-за узости спектра по β и ω возмущения продольной составляющей скорости в переходной области представляют собой волновые пакеты, размер которых велик по сравнению с длиной волны. Они распространяются вниз по потоку с групповой скоростью *c*<sub>g</sub>. При этом форма их оги-



**Рис. 4.** Область влияния пробной точки *O* (*1*) и форма турбулентного пятна (*2*), используемые для вычисления коэффициента перемежаемости при переходе, вызванном волнами Толлмина–Шлихтинга.

бающей в области ламинарно-турбулентного перехода остается неизменной, а амплитуда экспоненциально нарастает вниз по потоку. Такие возмущения в произвольной точке с координатами *x*', *y*' и в момент времени *t*' имеют вид

$$u(x', y', t') = H(y', \tau)e^{\kappa(x-x')} \operatorname{Re}\left\{\exp\left(i(\alpha_m x' + \beta_m y' - \omega_m t' + \Theta(x', z'))\right)\right\}$$
  
$$\tau = t' + (x - x')/c_{\pi}$$

где H — медленно меняющаяся функция своих аргументов, масштаб изменения которой велик по сравнению с длиной волны Толлмина—Шлихтинга. Таким образом, амплитуда пульсаций скорости во всей переходной области определяется случайной функцией двух переменных  $H(y, \tau)$ , которая равна их амплитуде в пробном сечении, расположенном на расстоянии x от передней кромки в момент времени  $t = \tau$ . Как и ранее, считается, что в каждой точке и момент времени, где амплитуда возмущений

$$A(x', v', t') = H(v, \tau)e^{k(x-x')}$$

превышает пороговое значение  $a_c$ , появляется турбулентное пятно. В [12] показано, что если считать появление турбулентных пятен в разных точках статистически независимыми событиями, то функция перемежаемости  $F(\gamma)$  на расстоянии x от передней кромки определяется интегралом

$$F(\gamma) = \iint_{\Omega} v_{st}(x')\tau(x, x', y')dx'dy'$$
(2.1)

В нем  $v_{st}$  – средняя частота появления турбулентных пятен на единице площади поверхности на расстоянии *x*' от передней кромки,  $\tau$  – время прохождения турбулентного пятна, зародившегося в точке (*x*', *y*') через пробную точку (*x*, 0). Интегрирование в (2.1) выполняется по области влияния пробной точки  $\Omega$ , показанной на рис. 4 и представляющей собой клин, обращенный вершиной вниз по потоку. Для модели турбулентного пятна треугольной формы, распространяющегося внутри клина с углом полураствора  $\alpha$ , скоростью передней точки  $c_f$  и заднего фронта  $c_r$ , время прохождения через пробную точку найдено в [12]

$$\tau(x, x', y) = \left(\frac{1}{c_r} - \frac{1}{c_f}\right) \left(x - x' - \frac{y'}{\mathrm{tg}\alpha}\right)$$

Его подстановка в (2.1), интегрирование по *у* и переход к переменной  $\xi = x - x'$  дают следующее выражение для функции перемежаемости:

$$F(\gamma) = B_s \int_0^\infty \xi^2 \mathbf{v}_{st}(\xi) d\xi; \quad B_s = \left(\frac{1}{c_r} - \frac{1}{c_f}\right) \mathrm{tg}\alpha$$
(2.2)

Для нахождения частоты появления турбулентных пятен предположим, что они возникают, главным образом, в начале зоны перехода, где среднеквадратичная амплитуда пульсаций скоро-

сти заметно меньше критической. В этом случае турбулентные пятна появляются при больших локальных максимумах амплитуды пульсаций скорости. Как и в разд. 1, считается, что такие максимумы расположены достаточно далеко друг от друга, для того, чтобы пятно, зародившееся на одном из них, не захватило соседние. Наконец, предполагается, что скорость распространения заднего фронта турбулентного пятна меньше групповой скорости пакета волн Толлмина— Шлихтинга. В этих предположениях внутри каждого турбулентного пятна располагается единственный выброс амплитуды пульсаций скорости A(x', y', t') за уровень  $a_c$ . Рассмотрим теперь прямоугольный участок поверхности единичной ширины и ограниченный близкими прямыми x = x' и x = x' + dx', параллельными передней кромке. Среднее число турбулентных пятен, появившихся на нем в единицу времени n, есть разность количеств пятен, пересекших стороны участка. Оно равно разности частот выбросов амплитуды за уровень  $a_c$ , приходящихся на единици длины вдоль размаха  $v_{lt}$  при x = x' и x = x' + dx'. Поделив его на площадь участка dx', получим искомое выражение для частоты появления турбулентных пятен

$$v_{st}(x') = \frac{dv_{lt}}{dx'}$$
(2.3)

Частота появления турбулентных пятен определяется средним числом выбросов двумерной случайной функции за заданный уровень, приходящихся на единицу длины и времени. В точную формулу для него входит многомерная совместная функция распределения амплитуды и ее производных по поперечной координате и времени, которую практически невозможно измерить в эксперименте, либо найти численно. Поэтому предложим более простой и практичный способ оценки  $v_{lt}$ , основанный только на информации о спектрах возмущений по частоте и поперечному волновому числу. Разобьем длину пробной площадки на участки длиной  $L_y$ , равной длине корреляции пульсаций скорости в направлении размаха. Последняя обратно пропорциональна ширине их спектра по поперечному волновому числу  $L_y = \pi/\Delta_{\beta}$ . Предполагается, что на каждом из этих участков возмущения скорости статистически независимы и описываются одномерной случайной функцией времени со среднеквадратичной амплитудой  $\sigma$  и узким спектром шириной  $\Delta_{\omega}$ . Частота ее выбросов  $v_t$  за уровень  $a_c$  определяется формулой (1.8), в которой нужно заменить ширину спектра по поперечному волновому числу  $\Delta_{\beta}$  на ширину частотного спектра  $\Delta_{\omega}$ . Искомая частота выбросов двумерной случайной функции  $v_{lt}$  получается умножением частоты выбросов на каждом участке на их количество  $1/L_v$ , приходящееся на единицу длины

$$v_{tt} = \frac{v_t}{L_v} \cong C \frac{\Delta_{\omega} \Delta_{\beta}}{\sqrt{2\pi^3}} \frac{1}{a^*} \exp\left(-\frac{1}{2a^{*2}}\right)$$

В это выражение добавлен эмпирический коэффициент *C*, учитывающий возможную неточность определения поперечной длины корреляции из-за ширины спектра по поперечному волновому числу. Его подстановка в (2.3) при учете экспоненциальной зависимости нормированной амплитуды от ξ дает формулу для частоты появления турбулентных пятен

$$\mathbf{v}_{st} = D\kappa \frac{1}{a^*} \left( \frac{1}{{a^*}^2} - 1 \right) \exp\left( -\frac{1}{2{a^*}^2} \right); \quad D = C \frac{\Delta_\omega \Delta_\beta}{\sqrt{2\pi^3}}$$
(2.4)

Она с точностью до коэффициента совпадает с частотой появления турбулентных клиньев, найденной ранее. Поэтому турбулентные пятна наиболее интенсивно порождаются при том же

значении нормированной амплитуды  $a_m^* = (2 + \sqrt{3})^{-1/2}$  и частота их возникновения обращается в нуль при  $a^* = 1$  Подстановка (2.4) в (2.2) и переход к интегрированию по  $a^*$  дают следующее точное выражение для функции перемежаемости:

ת ת

$$F(\gamma) = c \frac{DB_s}{\kappa^2} J(a_0^*)$$

$$(a_0^*) = 2 \int_0^{a_0^*} \frac{1}{a_0^{*2}} \ln\left(\frac{a_0^*}{a^*}\right) \exp\left(-\frac{1}{2a^{*2}}\right) da^*; \quad a_0^* < 1$$
(2.5)

ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА № 4 2020

J

#### УСТИНОВ

$$J(a_0^*) = \frac{1}{\sqrt{e}} (\ln(a_0^*))^2 + 2\int_0^1 \frac{1}{a_0^{*2}} \ln\left(\frac{a_0^*}{a^*}\right) \exp\left(-\frac{1}{2a^{*2}}\right) da^*; \quad a_0^* > 1$$

Простую асимптотическую формулу для функции перемежаемости, справедливую при больших инкрементах нарастания, можно получить, заменив зависимость частоты порождения турбулентных пятен от ξ дельта-функцией Дирака, расположенной в точке ее максимума ξ<sub>m</sub>

$$v_{st} \approx N_{Lt} \delta(\xi - \xi_m); \quad \xi_m = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{a_0^*}{a_m^*}\right); \quad N_{Lt} = \int_{-\infty}^{+\infty} v_{st}(\xi) d\xi = \frac{CD}{\sqrt{e}}$$
(2.6)

Здесь  $N_{Lt}$  — частота появления турбулентных пятен на единицу длины вдоль размаха. Подстановка (2.6) в (2.5) дает хорошо известную квадратичную зависимость функции перемежаемости от продольной координаты

$$F(\gamma) = \left(\frac{x - x_t}{\Delta_{tr}}\right)^2; \quad \Delta_{tr} = \left(\frac{\sqrt{2e\pi^3}}{CB_s\Delta_{\omega}\Delta_{\beta}}\right)^{1/2}$$
(2.7)

В ней точка начала перехода *x*<sub>t</sub> связана с координатой *x*<sub>0</sub>, в которой среднеквадратичная амплитуда возмущений равна критической, соотношением

$$x_t = x_0 + \frac{1}{\kappa} \ln(a_m^*)$$
 (2.8)

Эти асимптотические формулы теоретически обосновывают модель перемежаемости, предложенную Нарасимхой в [10, 11]. Кроме того, статистическая теория дает точные выражения для точки начала перехода (2.8) и ширины переходной области (2.7), которая определяется шириной спектров возмущений по частоте и поперечному волновому числу. Отметим также, что отношение среднеквадратичной амплитуды пульсаций скорости в точке максимальной частоты появле-

ния турбулентных пятен к критической равно установленной величине  $a_m^* = (2 + \sqrt{3})^{-1/2}$ , что можно использовать для определения пороговой амплитуды из данных эксперимента. Это может быть полезно, если прямые измерения пороговой амплитуды затруднительны, например, при сверхзвуковой скорости потока.

Простая универсальная формула для функции перемежаемости (2.7) справедлива, если характерная длина участка генерации турбулентных пятен  $1/\kappa$  мала по сравнению с размером переходной области  $\Delta_{\mu}$ . Это имеет место при больших значениях параметра

$$\kappa_{TS}^* = \kappa \Delta_{tr}$$

который назовем нормированным инкрементом нарастания. Как и аналогичный параметр  $k_{CF}^{F}$ , введенный в разд. 1, он соответствует характерной величине прироста логарифма амплитуды возмущений или N-фактора в переходной области. Оценки показывают, что при характерных для перехода, вызванного волнами Толлмина–Шлихтинга, параметрах  $\Delta_{\omega} \sim 0.02$ ,  $\Delta_{\beta} \sim 0.1$ ,  $\kappa \sim 10^{-3} - 10^{-2}$ , нормированный инкремент нарастания изменяется в диапазоне 0.15–1.5 и его нельзя однозначно считать большим. Для оценки справедливости (2.7) в этом диапазоне параметров на рис. 5 показаны зависимости коэффициента перемежаемости  $\gamma$  и величины  $\sqrt{F(\gamma)}$  от нормированной продольной координаты  $X = (x - x_{tr})/\Delta_{tr}$ , рассчитанные по точной и асимптотической формулам. Из рис. 5 видно, что перемежаемость достаточно хорошо описывается универсальной зависимостью (2.7) только при  $\kappa > 6 \times 10^{-3}$ , или нормированном инкременте нарастания  $\kappa_{TS}^* > 0.9$ . При более медленном нарастании возмущений область перехода заметно расширяется и смещается вверх по потоку, причем наиболее сильно зависит от  $\kappa$  точка начала перехода, где начинают появляться турбулентные пятна. Это объясняется расширением области порождения турбулентных пятен при замедлении скорости роста амплитуды возмущений. Кроме того, при малых  $\kappa_{TS}^*$  зависимость  $\sqrt{F(\gamma)}$  от X заметно отличается от линейной. Аналогичный ее вид получен при экспериментальном изучении ламинарно-турбулентного перехода на стрело-

ме того, при малых к<sub>тs</sub> зависимость  $\sqrt{r}(\gamma)$  от *х* заметно отличается от линеиной. Аналогичный ее вид получен при экспериментальном изучении ламинарно-турбулентного перехода на стреловидном крыле при повышенном уровне турбулентности в [8]. Переход в этих условиях был инициирован нестационарными модами неустойчивости поперечного течения, сценарий развития



**Рис. 5.** Зависимости коэффициента перемежаемости (а) и  $\sqrt{F(\gamma)}$  (б) от нормированной продольной координаты при переходе, вызванном волнами Толлмина–Шлихтинга:  $1-6-\kappa = (1, 2, 4, 6, 8, 10) \times 10^{-3}$ ; 7 – универсальная зависимость (2.7).



**Рис. 6.** Зависимости нормированной продольной координаты (а) и нормированной амплитуды пульсаций (б), соответствующих началу (1), середине (2) и концу (3) области перехода, вызванного волнами Толлмина–Шлихтинга от нормированного инкремента нарастания.

которых аналогичен волнам Толлмина–Шлихтинга. Нелинейная зависимость  $\sqrt{F(\gamma)}$  от продольной координаты в [8] имела место, как раз, при медленном нарастании амплитуды возмущений.

Зависимости нормированных координат начала, середины и конца перехода, соответствующих  $\gamma = 0.1, 0.5$  и 0.9, от нормированного инкремента нарастания приведены на рис. 6а. Эти амплитуды практически постоянны при  $\kappa_{TS}^* > 0.8$ . В этом диапазоне параметров для предсказания характеристик пограничного слоя в переходной области можно использовать простые асимптотические формулы (2.7), (2.8), соответствующие классической модели перемежаемости Нарасимхи. Распределение перемежаемости при этом описывается единственным параметром –длиной зоны перехода, определяемой шириной спектра возмущений. При меньших значениях  $\kappa_{TS}^*$  оно зависит уже от двух параметров к и  $\Delta_{tr}$  и описывается более сложной формулой (2.6).

Принято считать, что началу, середине и концу области перехода соответствуют определенные значения амплитуды возмущений или N-фактора. Однако приведенные на рис. 6б зависимости нормированной амплитуды возмущений в этих местах от  $\kappa_{TS}^*$ , показывают, что это не верно. Амплитуда возмущений, соответствующая заданному коэффициенту перемежаемости, заметно увеличивается с ростом нормированного коэффициента нарастания. Особенно сильно меняется амплитуда, соответствующая концу перехода, которая возрастает почти на порядок при изменении  $\kappa_{TS}^*$  от 0.15 до 1.5. Этот факт необходимо принимать во внимание при формули-



**Рис. 7.** Зависимости коэффициента перемежаемости и частоты появления турбулентных пятен в условиях экспериментов [15] (а) и [16] (б) от числа Рейнольдса: *1* – *γ*, *2* – величина, пропорциональная v<sub>st</sub> – расчет; *3* – *γ*-эксперимент.

ровке критериев перехода в амплитудном и е-N методах. Вместо традиционных критериев амплитуды возмущений в начале, середине и конце перехода предпочтительно использовать непосредственное вычисление коэффициента перемежаемости.

Для сравнения разработанной статистической теории с экспериментом выбраны результаты исследования зависимости ламинарно-турбулентного перехода на плоской пластине от степени турбулентности потока [15, 16]. К сожалению, в обоих экспериментах выполнены только измерения зависимости коэффициента перемежаемости от пролольной коорлинаты, ланные об амплитуде возмушений и их спектрах, необходимые для прямого сравнения с теорией отсутствуют. Поэтому для нахождения перемежаемости были использованы результаты расчета развития волн Толлмина-Шлихтинга амплитудным методом [17]. При моделировании эксперимента [15] степень турбулентности соответствовала указанному в данной работе значению Tu = 0.12%. В [16] степень турбулентности потока не привелена, и в расчетах использовалось ее значение в пустой рабочей части аэродинамической трубы Т-124 при скорости потока 38 м/с Ти = 0.05%, измеренное в [18]. При расчете коэффициента перемежаемости использовались следующие значения параметров, определяющих форму турбулентного пятна:  $c_r = 0.4$ ,  $c_f = 0.9$ ,  $\alpha = 12^\circ$ . Эмпирический коэффициент  $\lambda = 0.8$ , задающий ширину частотного спектра турбулентности. был выбран из условия соответствия точки середины перехода в расчете и эксперименте [15] при пороговой амплитуде  $a_c = 3\%$ . Отметим, что значения  $\lambda$  и  $a_c$  влияют, главным образом, на начальную амплитуду возмущений, но не на их спектр. То есть эти параметры определяют место перехода, но не ширину переходной области. Сравнение расчетных коэффициентов перемежаемости, полученных при эмпирической константе C = 1, с данными экспериментов [15, 16] показано на фиг. 7а и 76 соответственно. Видно, что развитая статистическая теория достаточно хорошо описывает данные эксперимента, полученные в достаточно широком диапазоне начальной амплитуды возмущений. Совпадение с экспериментом можно улучшить, выбрав несколько большее значение константы C = 1.1 - 1.2.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Создана статистическая теория, описывающая коэффициент перемежаемости при двух основных сценариях ламинарно-турбулентного перехода — развитии стационарных вихрей неустойчивости поперечного течения на стреловидном крыле и волн Толлмина–Шлихтинга. Показано, что когерентные структуры — турбулентные клинья и пятна, наиболее часто появляются при определенном значении отношения среднеквадратичной амплитуды к пороговому значению  $a^* = (2 + \sqrt{3})^{-1/2}$ . Таким образом, теоретически обоснована гипотеза Нарасимхи о том, что турбулентные пятна появляются вблизи определенного расстояния от передней кромки. Получены аналитические выражения, определяющие расположение и ширину области порождения этих структур. Из них следует, что длина области перехода определяется шириной спектра первичных возмущений в пограничном слое. Развитая теория хорошо описывает наблюдаемые в эксперименте зависимости коэффициента перемежаемости от продольной координаты при рассмотренных сценариях перехода. Предложенный статистический метод применим для всех видов перехода, вызванных возмущениями с узкополосным спектром, и может быть легко модифицирован для описания параметров пограничного слоя в переходной области при других типах ламинарно-турбулентного перехода, например, при сверхзвуковой скорости потока.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Jaffe N.A., Okamura T.T., Smith A.M.O.* Determination of spatial amplification factors and their application to prediction transition // AIAA J. 1970. V. 8. № 2. P. 301–308.
- Arnal D., Casalis G. Laminar-turbulent transition prediction in three-dimensional flows // Progress in Aeronautical Sciences. 2000. V. 36. Iss. 2. P. 173–191.
- 3. *Устинов М.В.* Амплитудный метод предсказания ламинарно-турбулентного перехода на скользящем крыле // Изв. РАН МЖГ. 2017. № 1. С. 74–89.
- 4. *Козлов В.В., Левченко В.Я., Сарик В.С.* Образование трехмерных структур при переходе к турбулентности в пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 42–50.
- 5. Herbert Th. Secondary instability of boundary layers // Ann. Rev. Fluid Mech. 1988. V. 20. P. 487–526.
- 6. *Borodulin V.I., Ivanov A.V., Kachanov Y.S., Crouch J.D., Ng L.L.* Criteria of swept-wing boundary-layer transition and variable N-factor methods of transition prediction // Int. Conf. on Methods of Aerophysical Research. June 30–July 6, 2014. Proc. Ed. V.M. Fomin. Novosibirsk: Inst. Theor Appl. Mech., 2014. № 12. 10 p.
- Crouch J.D., Ng L.L., Kachanov Y.S., Borodulin V.I., Ivanov A.V. Influence of surface roughness and free-stream turbulence on crossflow-instability transition // Procedia IUTAM. IUTAM\_ABCM Symposium on Laminar Turbulent Transition. Ed. by M.A.F. Medeiros, J.R. Meneghinipp. 2015. V. 14. P. 295–302.
- 8. Власов В.А., Жигулев С.В., Иванов А.И., Киселев А.Ф., Кузьминский В.А., Сбоев Д.С., Чернышев С.Л. Ламинарно-турбулентный переход на крыльях с ламинаризированным профилем LV6. II. Влияние возмущений внешнего потока // Уч. зап. ЦАГИ. 2011. Т. XLII. № 6. С. 23–42.
- 9. *Emmons H.W.* The laminar-turbulent transition in a boundary layer. Pt I // J. Aero. Sci. 1951. V. 18. № 7. P. 490–498.
- 10. *Narasimha R*. On the distribution of intermittency in the transition region of a boundary layer // J. Aero. Sci. 1957. V. 24. № 9. P. 711–712.
- 11. *Dhawan S., Narasimha R.* Some properties of boundary layer flow during the transition from laminar to turbulent motion // J. Fluid Mech. 1958. V. 3. P. 418–436.
- 12. *Устинов М.В.* Статистическое описание ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое при повышенной степени турбулентности потока // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 2. С. 60–69.
- 13. *Dagenhart J.R., Saric W.S.* Crossflow stability and transition experiments in swept-wing flow // NASA TP-1999-209344, 1999.
- 14. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968. 463 с.
- 15. Schubauer G.B., Skramstad H.K. Laminar boundary layer oscillations and transition on a flat plate // NACA TN 909. 1948.
- 16. *Филиппов В.М.* Экспериментальное исследование влияния градиента давления на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный // Уч. зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6. № 6. С. 114–118.
- 17. *Устинов М.В.* Генерация волн Толлмина–Шлихтинга турбулентностью потока // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 4. С. 58–72.
- 18. *Филиппов В.М.* Пульсационные характеристики потока в низкотурбулентной аэродинамической трубе Т-124 // Уч. зап. ЦАГИ. 2008. Т. 39. № 1–2. С. 68–80.