ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2023, № 2, с. 20–32

УДК 532.59

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННО-КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН НА ГЛУБОКОЙ ВОДЕ С ПОСТОЯННОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ

© 2023 г. М. И. Шишина[a],*

[a]Нижегородский планетарий им. Г.М. Гречко, Нижний Новгород, Россия

*E-mail: java-jsp@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.05.2022 г.
После доработки 20.10.2022 г.
Принята к публикации 20.10.2022 г.

Рассматриваются поверхностные гравитационно-капиллярные волны на глубокой воде с постоянной завихренностью в области, ограниченной свободной поверхностью и бесконечно глубоким плоским дном. Из системы точных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в конформных переменных, записанной в неявном виде, с учетом поверхностного натяжения, выведено нелинейное уравнение Шредингера. При выводе нелинейного уравнения Шредингера учтена роль среднего течения. Нелинейное уравнение Шредингера исследовано на модуляционную неустойчивость. Получено солитонное решение нелинейного уравнения Шредингера, представляющее собой солитон типа “девятый вал”.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, поверхностные гравитационно-капиллярные волны, завихренность, конформные переменные, среднее течение, модуляционная неустойчивость, солитон

DOI: 10.31857/S0568528122600321, **EDN:** DUFTMO

Пусть в слое тяжелой жидкости со свободной поверхностью существует двумерное течение с постоянной завихренностью, и на этом потоке рассматриваются поверхностные гравитационно-капиллярные волны. Поскольку характерные масштабы таких волн существенно меньше глубины слоя, то для них выполняются условия глубокой воды, и слой жидкости может считаться бесконечно глубоким. Течение с постоянной завихренностью представляет собой более простую модель волн на сдвиговом потоке.

При изучении поверхностных волн важную роль играет нелинейное уравнение Шредингера (НУШ). Для гравитационных волн на поверхности бесконечно глубокой воды НУШ впервые получил В.Е. Захаров в работе [1] с помощью разработанного гамильтоновского формализма. Позднее НУШ для случая произвольной глубины было независимо получено в [2, 3] с использованием метода многомасштабных разложений в эйлеровых координатах. Также в [4] представлен вывод НУШ с применением метода усредненного лагранжиана. В работах [1–4] при выводе НУШ авторы предполагали волновое движение потенциальным.

Вопрос получения НУШ, описывающего эволюцию слабонелинейных волн на воде с постоянной завихренностью, рассматривался в работах [5–8]. Однако в публикации [9] указана ошибочность НУШ, полученного в [5–8], поскольку при выводе уравнения не учитывалось среднее течение. В работе [9] отмечено, что эвристический метод получения НУШ из нелинейного дисперсионного соотношения [10] не действует в присутствии завихренности, в том числе, в случае бесконечной глубины. В [9] представлен вывод НУШ для волн на воде конечной глубины с постоянной завихренностью из системы нелинейных уравнений в декартовых координатах с использованием метода многих масштабов, и, в предельном случае, когда глубина воды устремляется к бесконечности, из НУШ для волн на воде конечной глубины с постоянной завихренностью получено НУШ для волн на потоке бесконечной глубины с постоянной завихренностью с учетом среднего течения.

В работе [11] результаты [9] применены к пакетам гравитационно-капиллярных волн и выведено нелинейное уравнение Шредингера для огибающей двумерных гравитационно-капиллярных волн, распространяющихся на свободной поверхности вертикального сдвигового потока с постоянной завихренностью. В [11] исследовано влияние завихренности на модуляционную неустойчивость слабонелинейных гравитационно-капиллярных волновых пакетов и показано, что завихренность существенно изменяет модуляционную неустойчивость цугов гравитационно-капиллярных волн, а именно, инкремент и ширину полосы неустойчивости.

Целью настоящей работы является вывод НУШ для поверхностных гравитационно-капиллярных волн на глубокой воде с постоянной завихренностью. Отметим, что с помощью методов теории функций комплексного переменного и техники конформных преобразований из системы основных уравнений эволюции поверхностных волн на потоке бесконечной глубины с постоянной завихренностью в области со свободной поверхностью и бесконечно глубоким плоским дном в декартовых координатах получена система точных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в конформных переменных [12], разрешенная относительно производной по времени.

Следует отметить, что система уравнений [12] является обобщением уравнений для потенциальных волн на поверхности идеальной жидкости, выведенных в [13–20]. В [13] при использовании конформных преобразований для решения нестационарных задач получены нестационарные интегро-дифференциальные уравнения, описывающие поверхностные волны идеальной жидкости со свободной поверхностью, а именно: уравнение для конформного преобразования и уравнение для потенциала на границе полуплоскости. В [14–20] найдены новые формы уравнений в комплексных переменных, которые описывают нелинейную динамику поверхностных волн.

Система уравнений [12] в [21] сведена, с использованием теории функций комплексного переменного и методов конформных преобразований, к эквивалентной системе точных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в конформных координатах, заданной в неявном виде.

В данной работе при получении НУШ к системе точных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в конформных переменных, заданной в неявном виде [21] и записанной с учетом поверхностного натяжения, применен метод многих масштабов. При этом в процессе выполненных преобразований учтена роль среднего течения. Найденное в настоящей работе НУШ для гравитационно-капиллярных волн на потоке бесконечной глубины с постоянной завихренностью в случае отсутствия поверхностного натяжения совпадает с аналогичным результатом работы [9] для гравитационных волн на глубокой воде с постоянной завихренностью.

1. УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА ГЛУБОКОЙ ВОДЕ С ПОСТОЯННОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ

1.1. Основные уравнения в декартовых координатах

Пусть двумерное течение идеальной жидкости существует на потоке с постоянной завихренностью $\boldsymbol{\omega}$, свободной границей, глубины H_0. Рассматриваются волны на поверхности жидкости, длины которых много меньше H_0. Тогда, при изучении таких возмущений жидкости, слой жидкости может считаться бесконечно глубоким. В плоскости (x, y) идеальная несжимаемая жидкость занимает ограниченную свободной поверхностью $F(x,y,t) = 0$ ($t > 0$ – время) область D; $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, 0\}$ – вектор скорости течения жидкости.

Вертикальная компонента скорости течения равна нулю при $y \to -\infty$

$$v_y\big|_{y\to-\infty} = 0$$

Рассматриваются волны на потоке с постоянной завихренностью $\boldsymbol{\omega}$

$$\omega = -\Delta\Psi(x,y,t) \tag{1.1}$$

где $\Psi = \Psi(x,y,t)$ – функция тока, такая что

$$v_x = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

Общее решение уравнения (1.1), в силу его линейности при постоянном $\omega = \text{const}$, для функции тока может быть представлено в следующем виде

$$\Psi = -\frac{\omega y^2}{2} + \Phi \tag{1.2}$$

где функция $\Phi = \Phi(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi = 0$$

По гармонической функции $\Phi(x, y, t)$ находится сопряженная гармоническая функция $\varphi = \varphi(x, y, t)$ (с точностью до постоянного слагаемого, которое считается равным нулю), связанная с $\Phi(x, y, t)$ условиями Коши–Римана

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

Функция φ называется эффективным потенциалом. Тогда функция

$$W(x, y, t) = \varphi(x, y, t) + i\Phi(x, y, t)$$

представляет собой аналитическую функцию комплексного переменного $z = x + iy$ в области D. Функция $W(z, t)$ условно называется "комплексным потенциалом".

Требуется найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0$$

со следующими граничными условиями на свободной поверхности [12]

$$\left.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left|\nabla\varphi - \omega y \cdot \mathbf{x_0}\right|^2 + \omega\left(\Phi - \frac{\omega y^2}{2}\right) + \frac{p_a}{\rho} + gy\right)\right|_{F(x,y,t)=0} = 0 \tag{1.3}$$

$$\left.\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y} - \omega y\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right|_{F(x,y,t)=0} = 0 \tag{1.4}$$

$$p\big|_{F(x,y,t)=0} = p_a$$

$$\varphi_y\big|_{y\to-\infty} = 0$$

где $\mathbf{x_0}$ – единичный вектор оси абсцисс плоскости (x, y), $\mathbf{v} = \nabla\varphi - \omega y \cdot \mathbf{x_0}$ – вектор скорости течения жидкости, при этом $\nabla\varphi$ – скорость возмущений относительно среднего течения жидкости $\omega y \cdot \mathbf{x_0}$, p_a – атмосферное давление на свободной поверхности, ρ – плотность жидкости.

Из граничного условия (1.4) следует, что свободная поверхность воды является линией тока, вдоль которой функция тока $\Psi(x, y, t) = \text{const}$, т.е.

$$\left.\left(\Phi(x, y, t) - \frac{\omega y^2}{2}\right)\right|_{F(x,y,t)=0} = \text{const}.$$

Тогда "комплексная скорость"

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$$

Поскольку $\frac{\partial W}{\partial z} = v_x - iv_y$, то $|\mathbf{v}| = \left|\frac{\partial W}{\partial z}\right| = 0$ на поверхности жидкости.

1.2. Уравнения в конформных координатах

Пусть несжимаемая жидкость в плоскости (x, y) занимает ограниченную свободной поверхностью область $G = \{-\infty < x < +\infty, -\infty < y \le f(x,t)\}$. Введем комплексную функцию $z = z(\xi, \eta, t) = x(\xi, \eta, t) + iy(\xi, \eta, t)$, аналитическую в области G. Выполним конформное отображение области G, занятой жидкостью в плоскости $z = x + iy$, в полуплоскость $-\infty < \xi < +\infty$, $-\infty < \eta \le 0$ в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ с помощью функции

$$z(\xi, \eta, t) = \xi + i\eta + z_1(\xi, \eta, t) \equiv \xi + i\eta + x_1(\xi, \eta, t) + iy_1(\xi, \eta, t)$$

где $x_1(\xi,\eta,t)$, $y_1(\xi,\eta,t)$ – функции, гармонические в полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta \le 0$ и удовлетворяющие в этой полуплоскости условиям Коши–Римана

$$x_{1\xi} = y_{1\eta},\ x_{1\eta} = -y_{1\xi}$$

При этом функции y и x_1 связаны между собой соотношением

$$y = \mathrm{H}(x_1)$$

где H – интегральный оператор – преобразование Гильберта

$$\mathrm{H}\, f(u) = \frac{1}{\pi} P.V \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u')\,du'}{u' - u}$$

Якобиан отображения

$$J = x_\xi^2 + y_\xi^2 \ne 0$$

Функции $\varphi(\xi,\eta,t)$ и $\Phi(\xi,\eta,t)$ – гармонические в полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta \le 0$ $(\zeta = \xi + i\eta)$ и удовлетворяют условиям Коши–Римана

$$\varphi_\xi = \Phi_\eta, \quad \varphi_\eta = -\Phi_\xi$$

Следовательно, "комплексный потенциал" $W = \varphi + i\Phi$ является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta \le 0$. При этом на действительной оси

$$W = \varphi + i\,\mathrm{H}(\varphi)$$

Тогда имеем полученную в [12] систему уравнений, разрешенную относительно производной по времени (при $\eta = 0$)

$$\begin{cases} z_t = -iz_\xi(1 + i\,\mathrm{H})\left(\dfrac{\Phi_\xi - \omega y y_\xi}{J}\right) \\ \varphi_t + gy + \omega\Phi + \dfrac{p_a}{\rho} = \varphi_\xi\,\mathrm{H}\left(\dfrac{\Phi_\xi - \omega y y_\xi}{J}\right) + \dfrac{\omega y\, x_\xi}{J}\varphi_\xi - \dfrac{1}{2J}((\varphi_\xi)^2 - (\Phi_\xi)^2) \end{cases} \tag{1.5}$$

где p_a – атмосферное давление на свободной поверхности, ρ – плотность жидкости.

Следует отметить, что для волн на потоке конечной глубины уравнения, аналогичные (1.5), получены в [22].

2. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННО-КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН НА ГЛУБОКОЙ ВОДЕ С ПОСТОЯННОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ

Считая в дальнейшем $p_a = 0$, запишем систему уравнений (1.5) в виде эквивалентной ей системы уравнений, заданной в неявном виде [21] (при $\eta = 0$), учитывая при этом коэффициент поверхностного натяжения воды σ

$$\begin{cases} y_t\left(1 + x_{1\xi}\right) - y_\xi x_{1t} - \omega\, y y_\xi + \mathrm{H}\left(\varphi_\xi\right) = 0 \\ \varphi_t\left(1 + x_{1\xi}\right) - \varphi_\xi x_{1t} + \left(g - \dfrac{\sigma}{\rho}\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)y + gyx_{1\xi} + \omega\left(\mathrm{H}(\varphi)\left(1 + x_{1\xi}\right) - \varphi_\xi y\right) - \\ \quad - \mathrm{H}\left(\varphi_t y_\xi - \varphi_\xi y_t + gyy_\xi + \omega\,\mathrm{H}(\varphi)\,y_\xi\right) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

где $y = y(\xi,t)$ – вызванное волновым движением возвышение (огибающая) свободной поверхности над стационарной поверхностью $\eta(\xi,t) = 0$; $\varphi(\xi,t)$ – потенциал поля скоростей, создаваемого волной на поверхности жидкости.

Получим нелинейное уравнение Шредингера для огибающей квазигармонического пакета гравитационно-капиллярных волн, распространяющихся на сдвиговом потоке с постоянной завихренностью ω вдоль оси $O\xi$ под действием внешних сил, полученных от потенциала скорости φ (ось $O\eta$ направлена вертикально вверх).

Предположим, что ξ, t в системе (2.1) – пространственная и временная переменные для несущей волны. Введем набор "медленных" пространственных и временных переменных, которые описывают движение огибающей волнового пакета, и рассмотрим эти переменные как независимые. Имеем

$$\xi_0 = \xi, \quad \xi_1 = \varepsilon\xi, \quad \xi_2 = \varepsilon^2\xi, \ldots, \quad t_0 = t, \quad t_1 = \varepsilon t, \quad t_2 = \varepsilon^2 t, \ldots$$

где малый параметр ε – крутизна волны.

Операторы дифференцирования по ξ и t заменяются на следующие

$$\frac{\partial}{\partial\xi} \to \frac{\partial}{\partial\xi_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\xi_2} + \ldots$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2} + \ldots$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \to \frac{\partial^2}{\partial\xi_0^2} + 2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\xi_0\partial\xi_1} + 2\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\xi_0\partial\xi_2} + \varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2} + \ldots$$

В соответствии с методом многих масштабов решение системы (2.1) ищем в виде разложения в асимптотический ряд по малым степеням ε функций

$$y = \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \ldots$$
$$\varphi = \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \varepsilon^3\varphi_3 + \ldots$$

Подставив в систему (2.1) вместо y и φ их разложения, выделим члены одинаковых порядков малости. В порядке ε получим линеаризованный вариант системы (2.1), а именно

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_1}{\partial t_0} + \mathrm{H}\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_0}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_0} + \omega\mathrm{H}(\varphi_1) + \left(g - \dfrac{\sigma}{\rho}\dfrac{\partial^2}{\partial\xi_0^2}\right)y_1 = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Решение линейного приближения y_1 выберем в виде

$$y_1 = \frac{1}{2}(A(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2)e^{i\theta} + \text{к. с.}) \tag{2.3}$$

где A – комплексная амплитуда огибающей волнового пакета, $\theta = \Omega t_0 - k\xi_0$, к.с. – комплексно-сопряженное выражение. Из системы (2.2) находим, что

$$\varphi_1 = \frac{i\Omega}{2k}(A(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2)e^{i\theta} + \text{к.с.}) \tag{2.4}$$

с точностью до постоянного слагаемого, которое полагаем равным нулю, причем частота волны Ω и волновое число k связаны дисперсионным соотношением

$$\Omega^2 - \Omega\omega - \left(g + \frac{\sigma k^2}{\rho}\right)k = 0 \tag{2.5}$$

Исключая y_1 из системы (2.2), получаем интегро-дифференциальное уравнение для φ_1

$$L(\varphi_1) \equiv \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t_0^2} + \omega\mathrm{H}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_0}\right) - \left(g - \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\xi_0^2}\right)\mathrm{H}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_0}\right) = 0 \tag{2.6}$$

где оператор

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} + \omega\mathrm{H}\left(\frac{\partial}{\partial t_0}\right) - \left(g - \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\xi_0^2}\right)\mathrm{H}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)$$

Решение уравнения (2.6) имеет вид (2.4).

Члены порядка ε^2 в системе (2.1) имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_2}{\partial t_0} + \dfrac{\partial y_1}{\partial t_1} - \dfrac{\partial y_1}{\partial t_0} \mathrm{H}\left(\dfrac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right) + \dfrac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \mathrm{H}\left(\dfrac{\partial y_1}{\partial t_0}\right) - \omega y_1 \dfrac{\partial y_1}{\partial \xi_0} + \mathrm{H}\left(\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_0}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t_0} + \omega \mathrm{H}(\varphi_2) + \left(g - \dfrac{\sigma}{\rho}\dfrac{\partial^2}{\partial \xi_0^2}\right) y_2 - 2\dfrac{\sigma}{\rho}\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial \xi_0 \partial \xi_1} + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} - \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_0} \mathrm{H}\left(\dfrac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right) + \\ + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0} \mathrm{H}\left(\dfrac{\partial y_1}{\partial t_0}\right) - g y_1 \mathrm{H}\left(\dfrac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right) - \omega\left(\mathrm{H}(\varphi_1) \mathrm{H}\left(\dfrac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right) + y_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0}\right) - \\ - \mathrm{H}\left(\dfrac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \cdot \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_0} - \dfrac{\partial y_1}{\partial t_0} \cdot \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0} + g y_1 \dfrac{\partial y_1}{\partial \xi_0} + \omega \dfrac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \mathrm{H}(\varphi_1)\right) = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Исключая y_2 из системы (2.7), приходим к интегро-дифференциальному уравнению для φ_2

$$\begin{gathered} L(\varphi_2) + \frac{\partial}{\partial t_0}\left[-\frac{2\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi_0 \partial \xi_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_0} \mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0} \mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_0}\right) - g y_1 \mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right) - \right. \\ \left. - \omega\left(\mathrm{H}(\varphi_1) \mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right) + y_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0}\right) - \mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_0} - \frac{\partial y_1}{\partial t_0} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0} + g y_1 \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} + \omega \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \mathrm{H}(\varphi_1)\right)\right] - \\ - \left(g - \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2}\right)\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1} - \frac{\partial y_1}{\partial t_0} \mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right) + \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} \mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_0}\right) - \omega y_1 \frac{\partial y_1}{\partial \xi_0} + \mathrm{H}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1}\right)\right) = 0 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Подставляя в уравнение (2.8) соотношения (2.3), (2.4) для y_1 и φ_1 и учитывая дисперсионное соотношение (2.5), после преобразований получаем

$$\begin{gathered} L(\varphi_2) - \frac{\Omega(2\Omega - \omega)}{2k}\frac{\partial A}{\partial t_1} e^{i\theta} - \left(\frac{\Omega^2(\Omega - \omega)}{2k^2} + \frac{\Omega\sigma k}{\rho}\right)\frac{\partial A}{\partial \xi_1} e^{i\theta} + \\ + i\left(\frac{\Omega(4\Omega^2 - 3\Omega\omega + \omega^2)}{4} - \frac{(4\Omega + 3\omega)\sigma k^3}{4\rho}\right) A^2 e^{2i\theta} + \text{к.с.} = 0 \end{gathered} \tag{2.9}$$

Приравнивая к нулю члены, пропорциональные $\exp(i\theta)$, которые будут приводить решение уравнения (2.9) к секулярному росту, находим, что амплитуда A удовлетворяет уравнению

$$(2\Omega - \omega)\frac{\partial A}{\partial t_1} + \left(\frac{\Omega(\Omega - \omega)}{k} + \frac{2\sigma k^2}{\rho}\right)\frac{\partial A}{\partial \xi_1} = 0$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + c_g \frac{\partial A}{\partial \xi_1} = 0 \tag{2.10}$$

где $c_g = \dfrac{\Omega(\Omega - \omega)}{k(2\Omega - \omega)} + \dfrac{2\sigma k^2}{\rho(2\Omega - \omega)}$ – групповая скорость.

Уравнение (2.10) означает, что возмущения огибающей волнового пакета в первом приближении распространяются с групповой скоростью, поскольку, как следует из дисперсионного соотношения (2.5)

$$c_g = \frac{\partial \Omega}{\partial k} = \frac{\Omega(\Omega - \omega)}{k(2\Omega - \omega)} + \frac{2\sigma k^2}{\rho(2\Omega - \omega)}$$

Таким образом, уравнение (2.9) принимает вид

$$L(\varphi_2) + i\left(\frac{\Omega(4\Omega^2 - 3\Omega\omega + \omega^2)}{4} - \frac{(4\Omega + 3\omega)\sigma k^3}{4\rho}\right) A^2 e^{2i\theta} + \text{к.с.} = 0$$

Решение этого уравнения можно записать следующим образом

$$\varphi_2 = \frac{i}{\Omega^2 - 3\sigma k^3/\rho}\left(\frac{\Omega(4\Omega^2 - 3\Omega\omega + \omega^2)}{8} - \frac{(4\Omega + 3\omega)\sigma k^3}{8\rho}\right)A^2 e^{2i\theta} + B(\xi_1,\xi_2,t_1,t_2)\,t_0 + \text{к.с.} \tag{2.11}$$

где вещественная функция B – среднее течение, индуцированное цугом поверхностных волн.

Найдем y_2 из системы уравнений (2.7). Подставляя в уравнения (2.7) соотношения (2.3), (2.4), (2.11) для $y_1, \varphi_1, \varphi_2$ с учетом дисперсионного соотношения (2.5) и уравнения (2.10), после преобразований получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y_2}{\partial t_0} + \dfrac{1}{2(\Omega-\omega)}\left(\Omega\dfrac{\partial A}{\partial t_1} + \dfrac{2\sigma k^2}{\rho}\dfrac{\partial A}{\partial \xi_1}\right)e^{i\theta} - \dfrac{i\Omega k}{\Omega^2 - 3\sigma k^3/\rho}\left(\dfrac{(2\Omega-\omega)^2}{4} - \dfrac{\sigma k^3}{\rho}\right)A^2 e^{2i\theta} + \text{к.с.} = 0 \\ \left(g - \dfrac{\sigma}{\rho}\dfrac{\partial^2}{\partial \xi_0^2}\right)y_2 + \dfrac{i}{2k}\left(\Omega\dfrac{\partial A}{\partial t_1} + \dfrac{2\sigma k^2}{\rho}\dfrac{\partial A}{\partial \xi_1}\right)e^{i\theta} - \\ -\dfrac{\Omega(\Omega-\omega)+3\sigma k^3/\rho}{\Omega^2 - 3\sigma k^3/\rho}\left(\dfrac{(2\Omega-\omega)^2}{8} - \dfrac{\sigma k^3}{2\rho}\right)A^2 e^{2i\theta} + \dfrac{gk}{2}|A|^2 + B + \text{к.с.} = 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

Решение системы (2.12) ищем в виде

$$y_2 = B_1(\xi_1,\xi_2,t_1,t_2)e^{i\theta} + B_2(\xi_1,\xi_2,t_1,t_2)e^{2i\theta} + B_3(\xi_1,\xi_2,t_1,t_2) \tag{2.13}$$

Подставляя (2.13) в (2.12) и учитывая дисперсионное соотношение (2.5), находим

$$B_1 = -\frac{i}{2\Omega(\Omega-\omega)}\left(\Omega\frac{\partial A}{\partial t_1} + \frac{2\sigma k^2}{\rho}\frac{\partial A}{\partial \xi_1}\right)$$

$$B_2 = \frac{k}{\Omega^2 - 3\sigma k^3/\rho}\left(\frac{(2\Omega-\omega)^2}{8} - \frac{\sigma k^3}{2\rho}\right)A^2$$

$$B_3 = -\frac{k}{2}|A|^2 - \frac{1}{g}B$$

Следовательно,

$$y_2 = -\frac{i}{2\Omega(\Omega-\omega)}\left(\Omega\frac{\partial A}{\partial t_1} + \frac{2\sigma k^2}{\rho}\frac{\partial A}{\partial \xi_1}\right)e^{i\theta} + \frac{k}{\Omega^2 - 3\sigma k^3/\rho}\left(\frac{(2\Omega-\omega)^2}{8} - \frac{\sigma k^3}{2\rho}\right)A^2 e^{2i\theta} - \frac{k}{2}|A|^2 - \frac{1}{g}B + \text{к.с.} \tag{2.14}$$

Для определения среднего течения, индуцированного волной за счет модуляции огибающей волнового пакета, осредним исходные уравнения (2.1) по периоду волны во втором порядке малости по крутизне волны (при $\eta = 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{y}}{\partial t} - \omega\dfrac{\partial \overline{yy}}{\partial \xi} = 0 \\ \dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} + \omega \mathrm{H}(\overline{\varphi}) + \left(g - \dfrac{\sigma}{\rho}\dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right)\overline{y} = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

где $\overline{y}, \overline{\varphi}$ – средние по периоду волны отклонения поверхности и потенциала. Из (2.15) следует, что средняя скорость индуцированного течения равна нулю во втором порядке по ε, но не равна нулю в третьем порядке по ε и пропорциональна $\varepsilon^3\omega_1\partial|A|^2/\partial\xi_1$, где $\omega_1 = \omega/\Omega$.

Наконец, выделим в системе уравнений (2.1) члены порядка ε^3. Имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial y_3}{\partial t_0}+\frac{\partial y_2}{\partial t_1}+\frac{\partial y_1}{\partial t_2}-\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1}+\frac{\partial y_2}{\partial t_0}\right)\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right)-\frac{\partial y_1}{\partial t_0}\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_2}{\partial \xi_0}+\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1}\right)+\\+\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial y_2}{\partial \xi_0}\right)\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_0}\right)+\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1}+\frac{\partial y_2}{\partial t_0}\right)-\omega\left(y_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial y_2}{\partial \xi_0}\right)+y_2\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right)+\\+\mathrm{H}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1}+\frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_0}\right)=0\end{gathered}\tag{2.16}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial \varphi_3}{\partial t_0}+\omega\mathrm{H}(\varphi_3)+\left(g-\frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial \xi_0^2}\right)y_3-\frac{2\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 y_2}{\partial \xi_0\partial \xi_1}-\frac{2\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi_0\partial \xi_2}-\frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi_1^2}+\\+\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2}-g\left(y_1\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial y_2}{\partial \xi_0}\right)+y_2\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right)\right)-\\-\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_0}\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial y_2}{\partial \xi_0}\right)-\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_0}\right)\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right)+\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0}\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1}+\frac{\partial y_2}{\partial t_0}\right)+\\+\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_0}\right)\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_0}\right)-\omega\left(\mathrm{H}(\varphi_1)\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial y_2}{\partial \xi_0}\right)+\mathrm{H}(\varphi_2)\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right)+\right.\\\left.+y_1\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_0}\right)+y_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0}\right)-\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_0}\right)+\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_0}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial y_2}{\partial \xi_0}\right)-\right.\\-\frac{\partial y_1}{\partial t_0}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_0}\right)-\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0}\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1}+\frac{\partial y_2}{\partial t_0}\right)+g\left(y_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial y_2}{\partial \xi_0}\right)+y_2\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right)+\\\left.+\omega\left(\mathrm{H}(\varphi_1)\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial y_2}{\partial \xi_0}\right)+\mathrm{H}(\varphi_2)\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right)\right)=0\end{gathered}\tag{2.17}$$

Исключая y_3 из системы уравнений (2.16), (2.17), получаем интегро-дифференциальное уравнение для φ_3

$$\begin{gathered}L(\varphi_3)+\frac{\partial}{\partial t_0}\left[-\frac{2\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 y_2}{\partial \xi_0\partial \xi_1}-\frac{2\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 y_1}{\partial \xi_0\partial \xi_2}-\frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 y_1}{\partial {\xi_1}^2}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_2}-\right.\\-g\left(y_1\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial y_2}{\partial \xi_0}\right)+y_2\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right)\right)-\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_0}\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial y_2}{\partial \xi_0}\right)-\\-\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_0}\right)\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right)+\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0}\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1}+\frac{\partial y_2}{\partial t_0}\right)+\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_0}\right)\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_0}\right)-\\-\omega\left(\mathrm{H}(\varphi_1)\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial y_2}{\partial \xi_0}\right)+\mathrm{H}(\varphi_2)\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right)+y_1\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_0}\right)+y_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0}\right)-\\-\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_0}\right)+\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_0}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial y_2}{\partial \xi_0}\right)-\frac{\partial y_1}{\partial t_0}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_0}\right)-\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_0}\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1}+\frac{\partial y_2}{\partial t_0}\right)+\right.\\\left.\left.+g\left(y_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial y_2}{\partial \xi_0}\right)+y_2\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right)+\omega\left(\mathrm{H}(\varphi_1)\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial y_2}{\partial \xi_0}\right)+\mathrm{H}(\varphi_2)\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right)\right)\right]-\\-\left(g-\frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial {\xi_0}^2}\right)\left(\frac{\partial y_2}{\partial t_1}+\frac{\partial y_1}{\partial t_2}-\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1}+\frac{\partial y_2}{\partial t_0}\right)\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right)-\frac{\partial y_1}{\partial t_0}\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial y_2}{\partial \xi_0}\right)+\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial y_2}{\partial \xi_0}\right)\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_0}\right)+\right.\\\left.+\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\mathrm{H}\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1}+\frac{\partial y_2}{\partial t_0}\right)-\omega\left(y_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial \xi_1}+\frac{\partial y_2}{\partial \xi_0}\right)+y_2\frac{\partial y_1}{\partial \xi_0}\right)+\mathrm{H}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1}\right)\right)=0\end{gathered}$$

Подставляя в это уравнение соотношения (2.3), (2.4), (2.11), (2.14) для $y_1, \varphi_1, \varphi_2, y_2$ и учитывая связь среднего течения с завихренностью ω_1, после преобразований получаем

$$
\begin{aligned}
&L(\varphi_3)-\frac{\Omega(2\Omega-\omega)}{2k}\frac{\partial A}{\partial t_2}e^{i\theta}-\frac{\Omega}{2k}\left(\frac{\Omega(\Omega-\omega)}{k}+\frac{2\sigma k^2}{\rho}\right)\frac{\partial A}{\partial \xi_2}e^{i\theta}+\frac{i\Omega}{2k}\left(c_g^2-\frac{3\sigma k}{\rho}\right)\frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2}e^{i\theta}-\\
&-\frac{1}{(\Omega-\omega)(\Omega^2-3\sigma k^3/\rho)}\left(\frac{\Omega(4\Omega^4-18\Omega^3\omega+19\Omega^2\omega^2-8\Omega\omega^3+\omega^4)}{8}+\right.\\
&\left.+\frac{(32\Omega^3-32\Omega^2\omega+23\Omega\omega^2-3\omega^3)\sigma k^3}{8\rho}-\frac{3(6\Omega+\omega)\sigma^2k^6}{4\rho^2}\right)\frac{\partial(A^2e^{2i\theta})}{\partial t_1}-\\
&-\frac{1}{\Omega^2-3\sigma k^3/\rho}\left(\frac{\Omega^2(2\Omega-\omega)(4\Omega^2-3\Omega\omega+\omega^2)}{8k}+\frac{\Omega(2\Omega-\omega)(4\Omega^2-19\Omega\omega+11\omega^2)\sigma k^2}{8\rho(\Omega-\omega)}+\right.\\
&\left.+\frac{(8\Omega^2-\Omega\omega+3\omega^2)\sigma^2k^5}{2\rho^2(\Omega-\omega)}-\frac{3(4\Omega+3\omega)\sigma^3k^8}{2\rho^2\Omega(\Omega-\omega)}\right)\frac{\partial(A^2e^{2i\theta})}{\partial \xi_1}+\\
&+\frac{3ik}{\Omega^2-3\sigma k^3/\rho}\left(\frac{\Omega(6\Omega^2-4\Omega\omega+\omega^2)}{2}-\frac{(3\Omega+4\omega)\sigma k^3}{\rho}\right)\left(\frac{(2\Omega-\omega)^2}{8}-\frac{\sigma k^3}{2\rho}\right)A^3e^{3i\theta}+\\
&+\frac{i\Omega k}{\Omega^2-3\sigma k^3/\rho}\left(\frac{(2\Omega-\omega)(4\Omega^3-6\Omega^2\omega+6\Omega\omega^2-\omega^3)}{16}-\frac{\omega(8\Omega-5\omega)\sigma k^3}{8\rho}-\frac{\sigma^2k^6}{2\rho^2}\right)|A|^2Ae^{i\theta}+\\
&+\frac{i\Omega\omega(2\Omega-\omega)}{2g}BAe^{i\theta}+\omega_1 g\frac{(2\Omega-\omega)}{4}\frac{\partial|A|^2}{\partial \xi_1}+2\frac{\partial B}{\partial t_1}+\text{к.с.}=0
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Исключим секулярные слагаемые. В уравнении (2.18) таковыми будут как слагаемые, пропорциональные $\exp(i\theta)$, так и слагаемые, зависящие только от медленных переменных. Приравнивая к нулю члены, пропорциональные $\exp(i\theta)$, и учитывая уравнение (2.10), получаем

$$
\begin{aligned}
&i\left(\frac{\partial A}{\partial t_2}+c_g\frac{\partial A}{\partial \xi_2}\right)+\frac{1}{2\Omega-\omega}\left(c_g^2-\frac{3\sigma k}{\rho}\right)\frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2}+\frac{k\omega}{g}BA+\\
&+\frac{k^2}{\Omega^2-3\sigma k^3/\rho}\left(\frac{4\Omega^3-6\Omega^2\omega+6\Omega\omega^2-\omega^3}{8}-\frac{\omega(8\Omega-5\omega)\sigma k^3}{4\rho(2\Omega-\omega)}-\frac{\sigma^2k^6}{\rho^2(2\Omega-\omega)}\right)|A|^2A=0
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Выделяя в уравнении (2.18) медленно меняющиеся слагаемые, приходим к уравнению для функции B

$$
\frac{\partial B}{\partial t_1}+\frac{g\omega_1(2\Omega-\omega)}{8}\cdot\frac{\partial|A|^2}{\partial \xi_1}=0
$$

Отсюда, с учетом уравнения (2.10), находим, что

$$
B=-\frac{g\omega_1(2\Omega-\omega)}{8c_g}|A|^2
$$

В итоге уравнение (2.19) принимает вид

$$
\begin{aligned}
&i\left(\frac{\partial A}{\partial t_2}+c_g\frac{\partial A}{\partial \xi_2}\right)+\frac{1}{2\Omega-\omega}\left(c_g{}^2-\frac{3\sigma k}{\rho}\right)\frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1{}^2}-\frac{k\omega^2(2\Omega-\omega)}{8\Omega c_g}|A|^2A+\\
&+\frac{k^2}{\Omega^2-3\sigma k^3/\rho}\left(\frac{4\Omega^3-6\Omega^2\omega+6\Omega\omega^2-\omega^3}{8}-\frac{\omega(8\Omega-5\omega)\sigma k^3}{4\rho(2\Omega-\omega)}-\frac{\sigma^2k^6}{\rho^2(2\Omega-\omega)}\right)|A|^2A=0
\end{aligned}
$$

Переходя в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью, приходим к НУШ для огибающей слабо-модулированного цуга волн небольшой крутизны

$$
\begin{aligned}
&iA_t+\frac{1}{2\Omega-\omega}\left(c_g^2-\frac{3\sigma k}{\rho}\right)A_{\xi\xi}-\frac{k^2\omega^2(2\Omega-\omega)^2}{8\Omega(\Omega^2-\Omega\omega+2\sigma k^3/\rho)}|A|^2A+\\
&+\frac{k^2}{\Omega^2-3\sigma k^3/\rho}\left(\frac{4\Omega^3-6\Omega^2\omega+6\Omega\omega^2-\omega^3}{8}-\frac{\omega(8\Omega-5\omega)\sigma k^3}{4\rho(2\Omega-\omega)}-\frac{\sigma^2k^6}{\rho^2(2\Omega-\omega)}\right)|A|^2A=0
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

где $t\equiv t_2$, $\xi\equiv\xi_1$.

Из дисперсионного соотношения (2.5) следует, что $\omega_1 < 1$. Следовательно, на бесконечной глубине всегда $\omega_1 \neq 2$.

В частности, при $\sigma = 0$ уравнение (2.20) принимает вид

$$iA_t + \frac{\Omega^2(\Omega-\omega)^2}{k^2(2\Omega-\omega)^3}A_{\xi\xi} - \frac{k^2\omega^2(2\Omega-\omega)^2}{8\Omega^2(\Omega-\omega)}|A|^2A + \frac{k^2(4\Omega^3-6\Omega^2\omega+6\Omega\omega^2+\omega^3)}{8\Omega^2}|A|^2A = 0$$

Отметим, что аналогичное уравнение для волн на глубокой воде получено в [9].

В случае $\omega = 0$, $\sigma = 0$ уравнение (2.20) переходит в классическое нелинейное уравнение Шредингера для волн на глубокой воде [1]

$$iA_t + \frac{1}{8}\frac{\Omega}{k^2}A_{\xi\xi} + \frac{1}{2}\Omega k^2|A|^2A = 0$$

3. МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Перепишем уравнение (2.20) в виде

$$iA_t + \alpha A_{\xi\xi} + \beta|A|^2A = 0 \tag{3.1}$$

где

$$\alpha = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial k^2} = \frac{1}{2\Omega-\omega}(c_g^2 - 3\sigma k/\rho)$$

$$\beta = -\frac{k^2\omega^2(2\Omega-\omega)^2}{8\Omega\left(\Omega^2-\Omega\omega+2\sigma K^3/\rho\right)} + \frac{k^2}{\Omega^2-3\sigma K^3/\rho}\left(\frac{4\Omega^3-6\Omega^2\omega+6\Omega\omega^2-\omega^3}{8} - \right.$$
$$\left. - \frac{\omega(8\Omega-5\omega)\sigma k^3}{4\rho(2\Omega-\omega)} - \frac{\sigma^2k^6}{\rho^2(2\Omega-\omega)}\right)|A|^2A$$

Уравнение (3.1) допускает следующее решение

$$A = A_0\exp\left(i\beta|A_0|^2t\right) \tag{3.2}$$

аналогичное волне Стокса.

Исследуем это решение на устойчивость. Рассмотрим бесконечно малые возмущения решения (3.2)

$$A = A_0(1+\delta_1)\exp(i(\beta|A_0|^2t + \delta_2)) \tag{3.3}$$

Подставляя выражение (3.3) в уравнение (3.1) и линеаризуя относительно бесконечно малых возмущений δ_1 и δ_2, получаем

$$i\frac{\partial\delta_1}{\partial t} - \frac{\partial\delta_2}{\partial t} + \alpha\left(\frac{\partial^2\delta_1}{\partial\xi^2} + i\frac{\partial^2\delta_2}{\partial\xi^2}\right) + 2\beta A_0^2\delta_1 = 0 \tag{3.4}$$

Разделяя в уравнении (3.4) вещественные и мнимые части, приходим к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \alpha\dfrac{\partial^2\delta_1}{\partial\xi^2} + 2\beta A_0{}^2\delta_1 - \dfrac{\partial\delta_2}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial\delta_1}{\partial t} + \alpha\dfrac{\partial^2\delta_2}{\partial\xi^2} = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Решение системы уравнений (3.5) ищем в виде

$$\delta_1 = d_1e^{\lambda t - iK\xi}, \quad \delta_2 = d_2e^{\lambda t - iK\xi}$$

Подставляя это решение в уравнения системы (3.5), получаем

$$\begin{cases}(-\alpha K^2 + 2\beta A_0^2)d_1 - \lambda d_2 = 0\\ \lambda d_1 - \alpha K^2 d_2 = 0\end{cases} \tag{3.6}$$

откуда следует характеристическое уравнение

$$\lambda^2 = \alpha K^2(2\beta A_0^2 - \alpha K^2) \tag{3.7}$$

где λ – инкремент модуляционной неустойчивости, K – волновое число модуляции.

Корни уравнения (3.7)

$$\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{K^2(2\alpha\beta A_0^2 - \alpha^2 K^2)}$$

Корень λ_+ будет вещественным и положительным при условии, что $\alpha\beta > 0$. Следовательно, возмущения неограниченны, и решение (3.2) неустойчиво.

Инкремент неустойчивости достигает максимума $\lambda_{\max} = \beta A_0^2$ при

$$K^2 = K_{\max}^2 = \frac{\beta A_0{}^2}{\alpha}$$

и обращается в нуль при

$$K^2 = K_0^2 = \frac{2\beta A_0^2}{\alpha}$$

Таким образом, при выполнении условия

$$\alpha\beta > 0 \tag{3.8}$$

возмущения, волновые числа которых лежат в диапазоне $K^2 < K_0^2$, неустойчивы. Условие (3.8) играет роль критерия Лайтхилла.

4. УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ И СОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Найдем простейшие решения нелинейного уравнения Шредингера (3.1) при условии, что $\alpha < 0$ и $\beta < 0$.

Решение уравнения (3.1) будем искать в виде произведения двух функций

$$A(\xi, t) = e^{i(pt - q\xi)}V(\zeta), \quad \zeta = \xi - bt \tag{4.1}$$

где p, q, b – постоянные, $V(\zeta)$ – неизвестная функция.

Подставляя (4.1) в уравнение (3.1), получаем

$$\alpha\frac{d^2V}{d\zeta^2} - i(b + 2\alpha q)\frac{dV}{d\zeta} - (\alpha q^2 + p)V + \beta V^3 = 0 \tag{4.2}$$

Полагая в (4.2)

$$b + 2\alpha q = 0, \quad \alpha q^2 + p = -a \tag{4.3}$$

приходим к уравнению

$$\frac{d^2V}{d\zeta^2} + \frac{a}{\alpha}V + \frac{\beta}{\alpha}V^3 = 0$$

Умножая обе части последнего уравнения на производную $\dfrac{dV}{d\zeta}$, имеем

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dV}{d\zeta}\right)^2 + \frac{a}{2\alpha}V^2 + \frac{\beta}{4\alpha}V^4\right) = 0$$

Интегрируя это выражение при условии, что $a > 0$, $\alpha = -|\alpha| < 0$, $\beta = -|\beta| < 0$ приходим к уравнению

$$\left(\frac{dV}{d\zeta}\right)^2 = \frac{a}{|\alpha|}V^2 - \frac{|\beta|}{2|\alpha|}V^4 + C \tag{4.4}$$

где C – постоянная интегрирования, которую полагаем равной нулю.

Интегрируя уравнение (4.4), получаем уравнение уединенной волны

$$V(\zeta) = \sqrt{\frac{2a}{|\beta|}}\operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{a}{|\alpha|}}(\xi - bt)\right) \tag{4.5}$$

(с точностью до постоянного слагаемого, которое полагаем равным нулю).

Найденное решение (4.5) вместе с (4.1) и (4.3) приводит к солитонному решению нелинейного уравнения Шредингера, которое запишется следующим образом:

$$A = \sqrt{\frac{2a}{|\beta|}}\exp\left\{i\left[\frac{b}{2\alpha}\xi - \left(\frac{b^2}{4\alpha} + a\right)t\right]\right\}\operatorname{ch}^{-1}\left(\sqrt{\frac{a}{|\alpha|}}(\xi - bt)\right) \tag{4.6}$$

где a и b – произвольные постоянные.

Осциллирующая часть решения (4.6) имеет огибающую в форме гиперболического секанса; огибающая перемещается в пространстве с постоянной скоростью b. Решение уравнения (2.20) представляет собой солитон типа “девятый вал”.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен вывод нелинейного уравнения Шредингера для поверхностных гравитационно-капиллярных волн на свободной границе потока бесконечной глубины с постоянной завихренностью из системы точных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в конформных переменных с учетом поверхностного натяжения, записанной в неявном виде. При выводе уравнения Шредингера учтена роль среднего течения.

Решение нелинейного уравнения Шредингера исследовано на модуляционную неустойчивость.

Найдено решение нелинейного уравнения Шредингера в виде солитона типа “девятый вал”.

Автор выражает глубокую благодарность Ю.И. Троицкой за постоянное внимание к работе и полезное обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Захаров В.Е.* Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // Журн. ПМТФ. 1968. № 2. С. 86–94.
2. *Davey A.* The propagation of a weakly nonlinear wave // J. Fluid Mech. 1972. V. 53. P. 769–781.
3. *Hasimoto H., Ono H.* Nonlinear modulation of gravity waves // J. Phys. Soc. Japan. 1972. V. 33. P. 805–811.
4. *Yuen H.C., Lake B.M.* Nonlinear deep water waves: Theory and experiment // Phys. Fluids. 1975. V. 18. P. 956–960.
5. *Johnson R.S.* On the modulation of water waves on shear flows // Proc. R. Soc. Lond. A. 1976. V. 347. P. 537–546.
6. *Li J.C., Hui W.H. and Donelan M.A.* Effects of velocity shear on the stability of surface deep water wave trains // Nonlinear Water Waves K. Horikawa and H. Maruo. Eds. Springer. 1987. P. 213-220.
7. *Oikawa M., Chow K., Benney D.J.* The propagation of nonlinear wave packets in a shear flow with a free surface // Stud. Appl. Math. 1987. V. 76. P. 69–92.
8. *Baumstein A. I.* Modulation of gravity waves with shear in water // Stud. Appl. Math. 1998. V. 100. P. 365–390.
9. *Thomas R., Kharif C., Manna M.* A nonlinear Schrödinger equation for water waves on finite depth with constant vorticity // Phys. Fluids. 2012. V. 24. 127102.
10. *Simmen J.A., Saffman P.G.* Steady deep-water waves on a linear shear current // Stud. Appl. Maths. 1985. V. 73. P. 35–57.
11. *Hsu H.C., Kharif C., Abid M., Chen Y.Y.* A nonlinear Schrödinger equation for gravity–capillary water waves on arbitrary depth with constant vorticity. Part 1. // J. Fluid. Mech. 2018. V. 854. P. 146–163.

12. *Досаев А.С., Троицкая Ю.И., Шишина М.И.* Моделирование в переменных Дьяченко поверхностных гравитационных волн на свободной границе потока с постоянной завихренностью // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 1. С. 62–73.
13. *Овсянников Л.В.* К обоснованию теории мелкой воды // Динамика сплошной среды // Сб. науч. тр. СО АН СССР. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1973. Вып. 15. С. 104–125.
14. *Dyachenko A.I., Kuznetsov E.A., Spector M.D., Zakharov V.E.* Analytical description of the free surface dynamics of an ideal fluid (canonical formalism and conformal mapping) // Phys. Lett. A. 1996. V. 221. № 1–2. P. 73–79.
15. *Дьяченко А.И., Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости // Физика плазмы. 1996. V. 22. № 10. P. 916–928. [*Dyachenko A.I., Zakharov V.E., Kuznetsov E.A.* Nonlinear dynamics of the free surface of an ideal fluid // Plasma Phys. Reports. 1996. V. 22. № 10. P. 829–840.].
16. *Дьяченко А.И.* О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью // Докл. АН. 2001. Т. 376. № 1. С. 27–29.
17. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A.* New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // Eur. J. Mech. B Fluids. 2002. V. 21. P. 283–291.
18. *Chalikov D., Sheinin D.* Numerical modeling of surface waves based on principal equations of potential wave dynamics // Technical Note. NOAA/NCEP/OMB: 1996. P. 54.
19. *Chalikov D., Sheinin D.* Modeling of Extreme Waves Based on Equations of Potential Flow with a Free Surface // J. Comp. Phys. 2005. V. 210. P. 247–273.
20. *Ruban V.P.* Water waves over a time-dependent bottom: Exact description for 2D potential flows // Phys. Let. A. 2005. V. 340. № 1–4. P. 194–200.
21. *Шишина М.И.* Стационарные поверхностные гравитационные волны на свободной границе потока с постоянной завихренностью // Процессы в геосредах. 2016. V. 8. С. 71–77.
22. *Ruban V.P.* Explicit equations for two-dimensional water waves with constant vorticity // Phys. Rev. 2008. E. 77. 037302.