

УДК 532.517.3

ТУРБУЛЕНТНЫЕ ПУЛЬСИРУЮЩИЕ ТЕЧЕНИЯ В ТРУБЕ КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ

© 2023 г. Н. В. Никитин^{а,*}, Н. В. Попеленская^{а,**}

^аМГУ имени М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

*E-mail: nvnikitin@mail.ru

**E-mail: aero.natap@mail.ru

Поступила в редакцию 01.11.2022 г.

После доработки 11.11.2022 г.

Принята к публикации 11.11.2022 г.

Численно исследуются турбулентные пульсирующие течения в трубе квадратного сечения. Рассматривается режим доминирования потока, когда расход жидкости остается положительным во всех фазах осцилляционного цикла. Изучены течения при нескольких значениях частоты осцилляций. Результаты сопоставляются с ламинарными осциллирующими течениями и турбулентным стационарным течением в квадратной трубе, а также пульсирующими турбулентными течениями в круглой трубе. Определены интегральные и пульсационные характеристики турбулентности, их зависимость от частоты осцилляций. Обнаружено, в частности, что при рассмотренном числе Рейнольдса $Re = 2200$ коэффициент сопротивления в пульсирующих течениях оказывается ниже, чем в стационарном. Снижение сопротивления увеличивается с ростом периода осцилляций, достигая величины в 14.7%. Характерной особенностью турбулентных течений в трубах прямоугольного сечения является возникновение вторичных течений Прандтля 2-го рода. В работе подробно изучены детали вторичных течений в условиях пульсирующего потока.

Ключевые слова: турбулентные течения в трубах, пульсирующие течения, вторичные течения, уравнения Навье–Стокса, прямое численное моделирование

DOI: 10.31857/S0568528122600886, EDN: NTOIHM

Пульсирующими называются течения, сочетающие ненулевой средний поток и периодическую (чаще всего гармоническую) осциллирующую составляющую. Важность изучения нестационарных потоков в целом и пульсирующих потоков в трубах в частности очевидна. Большинство биологических потоков пульсирует, возможно, потому, что перистальтический насос является самым простым насосом, используемым в биологических системах. Пульсирующие потоки свойственны многим инженерным приложениям, таким как течения в поршневых насосах, потоки во впускных или выпускных коллекторах двигателей внутреннего сгорания, потоки в гидравлических и пневматических линиях и системах управления. Несмотря на их большую технологическую и биомедицинскую значимость, пульсирующие турбулентные потоки изучены слабо, даже в простой геометрии. Одной из причин этого является повышенная сложность, создаваемая осциллирующей составляющей движения, которая увеличивает число соответствующих параметров подобия с одного (в случае стационарного потока) до трех. В большинстве выполненных ранее исследований изучались пульсирующие течения в круглой трубе и, в меньшей степени, в плоском канале. Соответствующие ссылки можно найти в обзорных работах [1, 2], а также в обзорах более современных работ [3, 4]. Интенсивность осцилляций определяется параметром β , равным отношению амплитуды осцилляций скорости к средней скорости течения. Различают режимы течения с доминированием среднего потока, что характеризуется значениями $\beta < 1$, и режимы с доминированием осцилляций, когда $\beta > 1$. В первом случае обратных движений жидкости (навстречу направлению основного потока) либо вовсе не возникает, либо их появление ограничено пристенными зонами и непродолжительными отрезками времени пульсационного цикла. Имеющиеся экспериментальные данные свидетельствуют о том, что выбор безразмерного параметра, характеризующего частоту осцилляций $\omega = 2\pi/T$ (здесь T – период), не однозначен. В ламинарных течениях чаще всего используется число Стокса $\Omega = R\sqrt{\omega/2\nu}$ [5]

(R – радиус трубы, ν – вязкость жидкости), выражающее отношение радиуса трубы к толщине стоксовского слоя $\sqrt{2\nu/\omega}$. В турбулентных течениях чаще используются параметры $\Omega_t = 2\omega R/u_\tau$ [6] или $\omega^+ = \omega\nu/u_\tau^2$ [7]. Здесь $u_\tau = \tau_w/\rho$ – динамическая скорость, τ_w – среднее напряжение трения на стенке, ρ – плотность жидкости. В [6] определено пять основных режимов пульсаций в зависимости от значений Ω_t : квазистационарный режим ($\Omega_t \leq 10^{-1}$), низкочастотный режим ($10^{-1} < \Omega_t \leq 1$), режим промежуточных частот ($1 < \Omega_t \leq 10$), высокочастотный режим ($\Omega_t \sim 10$) и режим быстрых осцилляций ($\Omega_t \sim 10^2$ и выше).

В данной работе численно исследуются пульсирующие течения в трубе квадратного сечения. Рассматриваются режимы с доминированием среднего потока ($\beta = 0.5$) в диапазоне частот, соответствующих промежуточным и высокочастотным режимам по классификации [6]. Основное внимание уделяется особенностям распределения скорости по сечению трубы на разных фазах колебания потока. Турбулентные течения в прямоугольных трубах, кроме геометрических отличий, характеризуются наличием вторичных течений, концентрирующихся в угловых областях поперечного сечения [8]. Одной из целей настоящей работы является изучение турбулентных вторичных течений (вторичных течений Прандтля 2-го рода) в условиях пульсирующего потока. Вычисления проведены при числе Рейнольдса $Re = 2200$, для которого имеются подробные результаты расчетов стационарных течений [9, 10].

1. ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассматривается задача о течении вязкой несжимаемой жидкости в длинной трубе квадратного поперечного сечения $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \{|x| < \infty, -h \leq y, z \leq h\}$. Нестационарное поле скорости $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ и кинематическое давление $p(t, \mathbf{x})$ отыскиваются путем численного решения уравнений Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \quad \nabla\mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

На твердых стенках трубы $y, z = \pm h$ ставятся условия прилипания, в направлении x используются условия периодичности. Величина продольного периода L_x выбирается достаточно большой, превышающей все существенные масштабы турбулентных структур в рассматриваемом течении. Условие пространственной периодичности поля скорости диктует периодичность градиента давления, откуда следует, что само давление представляется в виде $p(t, x, y, z) = -d_p(t)x + p'(t, x, y, z)$, где функция p' , как и поле скорости L_x -периодична вдоль x . Переменная $-d_p(t)$ представляет собой средний (по пространству) градиент давления, вызывающий движение жидкости. Положительное значение d_p отвечает силе давления, действующей в положительном направлении x . Величина $d_p(t)$ в каждый момент времени выбирается из условия периодического во времени изменения средней расходной скорости потока $u_b(t) = \bar{u}_b(1 + \beta \sin \omega t)$ с постоянными значениями \bar{u}_b , β и ω . При описании нестационарных потоков в трубах возникает необходимость использования осреднения по разным переменным: среднее по времени, фазовое среднее, среднее по продольной координате, среднее по сечению трубы. Для избежания путаницы для средней расходной скорости потока будем использовать термин удельный расход (расход на единицу площади сечения трубы) или, для краткости, расход. В данной работе исследованы течения при числе Рейнольдса $Re = h\bar{u}_b/\nu = 2200$, относительной амплитуде осцилляций расхода $\beta = 0.5$ и периоде осцилляций в диапазоне от $T = 5h/\bar{u}_b$ до $T = 100h/\bar{u}_b$. В качестве начального поля скорости берется поле скорости установившегося стационарного турбулентного течения ($\beta = 0$), рассчитанного при рассматриваемом числе Рейнольдса [10]. Отметим, что минимальным числом Рейнольдса, при котором в квадратной трубе поддерживается турбулентный режим, является $Re = 1077$ [11], таким образом, число Рейнольдса, рассчитанное по мгновенному удельному расходу $hu_b(t)/\nu$ и изменяющееся при $\beta = 0.5$ во времени в пределах от 1100 до 3300, не выходит за пределы диапазона турбулентных течений. Можно ожидать, что при выбранных значениях Re , β течение будет оставаться турбулентным даже при $T \rightarrow \infty$. Численные эксперименты, проведенные в данной работе, подтверждают это предположение.

Для численного решения задачи применяется универсальный метод решения уравнений Навье–Стокса [12], использующий конечно-разностный метод дискретизации по пространствен-

ным координатам и полуявную схему интегрирования по времени. В продольном направлении используется равномерная расчетная сетка, а в поперечных – неравномерная, со сгущением узлов сетки вблизи твердых стенок. При варьировании сеточных параметров (размера расчетной области L_x , и числа узлов сетки N_x, N_y, N_z) установлено, что набором, достаточным для удовлетворительной точности всех вычислений при рассматриваемом числе Рейнольдса, является $L_x = 10h, N_x = N_y = N_z = 128$. Большинство представляемых ниже результатов получено при этих значениях параметров.

2. ЛАМИНАРНОЕ ПУЛЬСИРУЮЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРУБЕ

Предположим, что течение ламинарно, однонаправленно, однородно в продольном направлении и периодически (гармонично) во времени. Поле продольной компоненты скорости и градиент давления можно в этом случае отыскивать в виде $u(t, y, z) = \text{Re}\{U(y, z) \exp(i\omega t)\}$; $d_p(t) = \text{Re}\{D_p \exp(i\omega t)\}$ (Re обозначает действительную часть комплексной величины). Для комплексных амплитуд U и D_p из (1.1) получается уравнение

$$i\omega U = D_p + \nu \nabla^2 U \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) описывает как осциллирующие, так и стационарные течения. В последнем случае достаточно положить $\omega = 0$. Пульсирующее течение представляется суммой стационарного и осциллирующего решений. Численные решения (2.1) для геометрии прямоугольной трубы были получены ранее в [13, 14]. Применялись конечноразностные методы. Определены соотношения между фазами и амплитудами колебаний расхода, напряжения трения на стенке и градиента давления в зависимости от частоты осцилляций и отношения сторон поперечного сечения.

Решение (2.1) с нулевыми условиями на границах прямоугольника $|y| \leq h, |z| \leq sh$ можно выписать, точно воспользовавшись методом Галеркина

$$U(y, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} U_{jk} \cos(\beta_j y/h) \cos(\beta_k z/sh)$$

$$U_{jk} = \frac{4D_p h^2}{\nu} \frac{(-1)^{j+k}}{\beta_j \beta_k (2i\Omega^2 + \beta_j^2 + \beta_k^2/s^2)} \tag{2.2}$$

$$U_b = \frac{4D_p h^2}{\nu} G; \quad G(\Omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_j^2 \beta_k^2 (2i\Omega^2 + \beta_j^2 + \beta_k^2/s^2)}$$

Здесь $\beta_n = (n - 1/2)\pi$, $\Omega = h\sqrt{\omega/2\nu}$ – число Стокса, U_b – комплексная амплитуда удельного расхода: $u_b(t) = \text{Re}\{U_b \exp(i\omega t)\}$.

Выражения (2.2) дают связь между модулями и аргументами удельного расхода U_b и градиента давления D_p

$$|U_b| = \frac{4h^2}{\nu} |D_p| |G|; \quad \arg(U_b) = \arg(D_p) + \arg(G) \tag{2.3}$$

Графики $|G|/G(0)$ и $\varphi = \arg(G)$ в зависимости от числа Стокса Ω для случая квадратной трубы ($s = 1$) приведены на рис. 1. В квадратной трубе $G(0) = 0.0351$, что несколько больше, чем в круглой трубе, где соответствующее значение составляет 0.03125. Можно показать, что обратная к $G(0)$ величина есть число Пуазейля $Po = c_f \text{Re}_D$, где c_f – коэффициент сопротивления, а число Рейнольдса Re_D вычисляется через среднюю скорость и гидравлический диаметр $D = 2h$ (в круглой трубе $D = 2R$). Для приведенных значений $G(0)$ получаем $Po = 32$ и $Po \approx 28.5$ для круглой и квадратной трубы соответственно, что согласуется с данными, представленными в [15] (Fig. 3–13).

С ростом частоты осцилляций $|G|$ быстро уменьшается, приближаясь к зависимости $|G| \sim \Omega^{-2}$. Уменьшение $|G(\Omega)|$ говорит о том, что для поддержания нужной амплитуды колебаний расхода требуются все большие и большие амплитуды градиента давления. Величина $\varphi = \arg(G)$ имеет смысл разности фаз колебаний расхода и градиента давления $d_p(t)$. При малых частотах φ имеет

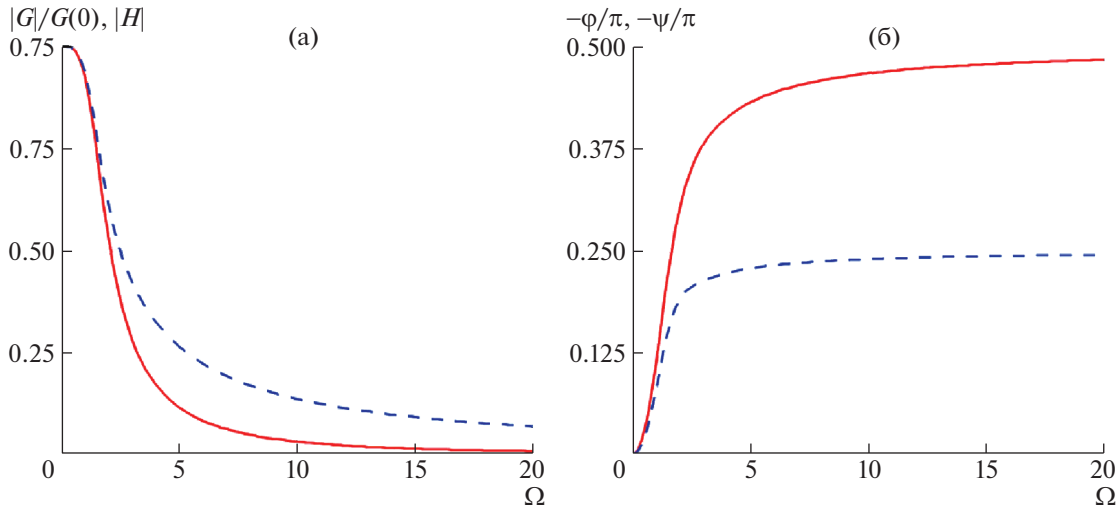


Рис. 1. Модули (а) и аргументы (б) функций $G(\Omega)$ (2.2) – сплошные линии и $H(\Omega)$ (2.4) – прерывистые линии. Течение в квадратной трубе.

близкие к нулю значения, т.е. колебания расхода происходят почти синфазно с колебаниями градиента давления $d_p(t)$. При $\Omega > 0$ аргумент G становится отрицательным, приближаясь к асимптотическому значению $\varphi = -\pi/2$ при $\Omega \rightarrow \infty$. Отрицательный знак φ указывает на то, что колебания расхода отстают по фазе от колебаний $d_p(t)$.

Еще одна важная характеристика течения – среднее по периметру напряжение трения на стенке $\tau_w(t) = \text{Re}\{T_w \exp(i\omega t)\}$. Интегрируя (2.1) по сечению трубы, получим связь комплексных амплитуд трения на стенке и градиента давления

$$T_w = \frac{\rho s h}{s+1} D_p H; \quad H(\Omega) = 1 - 8i\Omega^2 G \quad (2.4)$$

Модуль и аргумент ψ функции $H(\Omega)$ для случая квадратной трубы ($s = 1$) также показаны на рис. 1. С ростом Ω величина $|H|$ уменьшается, хотя и не так быстро, как $|G|$. Аргумент H отрицателен при $\Omega > 0$, но имеет меньшее абсолютное значение, чем аргумент G , т.е. осцилляции трения на стенке остаются по фазе от осцилляций давления, но опережают осцилляции расхода. При $\Omega \rightarrow \infty$ аргумент H стремится к предельному значению $\psi = -\pi/4$. Полученные соотношения между фазами колебаний градиента давления, расхода и среднего трения на стенке совпадают с результатами [13]. Аналогичные сдвиги по фазе при высоких частотах, $-\pi/4$ и $-\pi/2$, для среднего трения на стенке и для расхода относительно колебаний градиента давления наблюдаются и в круглой трубе [16].

Пульсирующее течение, как было отмечено выше, описывается суммой стационарного и осциллирующего решений (2.1). Для рассматриваемых в настоящей работе течений, удельный расход в которых изменяется по закону $u_b(t) = \bar{u}_b(1 + \beta \sin(\omega t))$ при $\beta = 0.5$, поле скорости в ламинарном течении можно представить в виде

$$u(t, y, z) = \bar{u}_b[\bar{u}(y, z) + \gamma_u(y, z) \sin(\omega t + \varphi_u(y, z))]$$

Здесь \bar{u} есть среднее (по времени), γ_u – амплитуда осцилляций и φ_u – сдвиг по фазе (относительно колебаний расхода) для скорости u/\bar{u}_b в точке (y, z) . Удельные расходы, соответствующие $\bar{u}(y, z)$ и $\gamma_u(y, z)$, равны 1 и 0.5 соответственно.

На рис. 2 представлены графики изменения $\bar{u}(y, z)$ и $\gamma_u(y, z)$ вдоль двух линий в плоскости поперечного сечения квадратной трубы: вдоль срединного перпендикуляра к стенке на отрезке от стенки до центра сечения трубы и вдоль диагонали от угловой точки до центра сечения трубы. По оси абсцисс отложены расстояния до ближайшей стенки d и до ближайшей угловой точки d_0 соответственно. На рис. 3 даны графики изменения фазы $\varphi_u(y, z)$ вдоль тех же линий. Показаны результаты для четырех значений частоты осцилляций, соответствующих значениям числа Стокса $\Omega = 18.6, 13.1, 10.7$ и 9.3 , для которых в дальнейшем представляются результаты расчетов

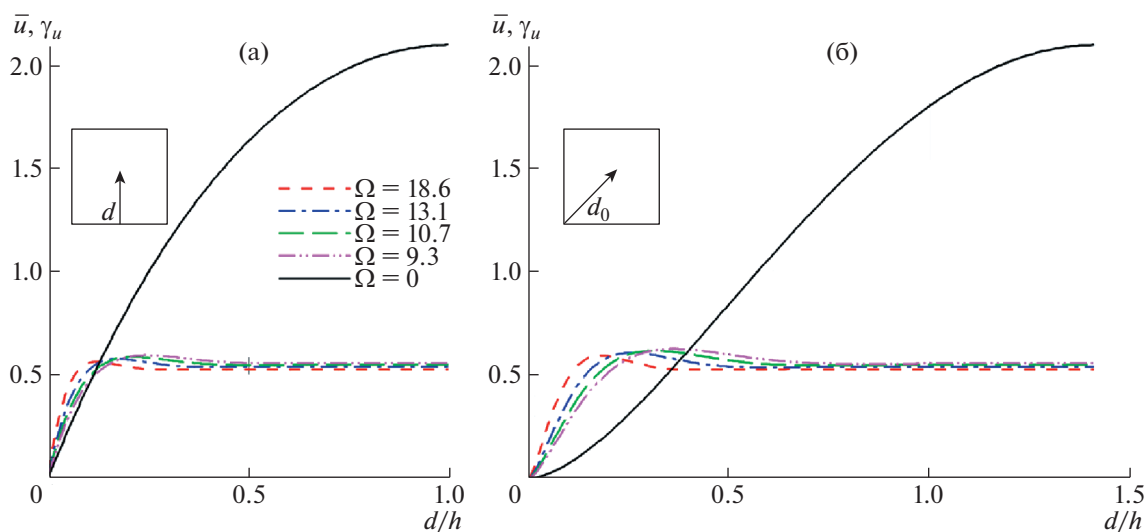


Рис. 2. Графики изменения среднего значения $\bar{u}(y, z)$ (сплошные линии) и амплитуды колебаний $\gamma_u(y, z)$ (прерывистые линии) скорости вдоль срединного перпендикуляра к стенке на отрезке от стенки до центра сечения трубы (а) и вдоль диагонали от угловой точки до центра сечения трубы (б). По оси абсцисс отложены расстояния до ближайшей стенки d и до ближайшей угловой точки d_0 соответственно. Течение в квадратной трубе.

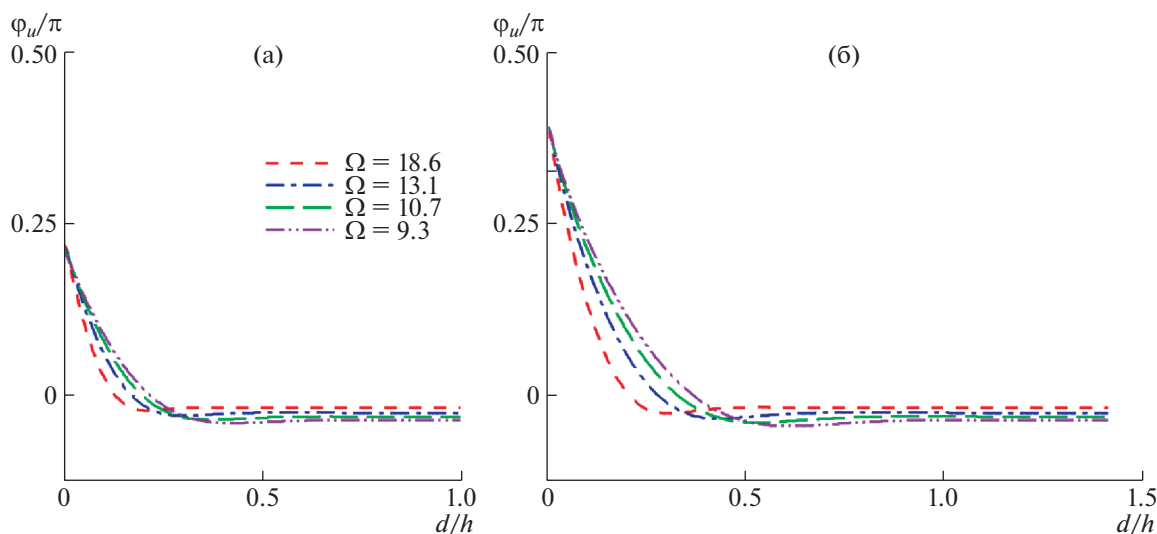


Рис. 3. Графики изменения сдвига по фазе $\varphi_u(y, z)$ колебаний скорости относительно колебаний расхода вдоль тех же линий, что и на рис. 2.

турбулентных течений. Вдоль срединных линий симметрии сечения трубы поле средней скорости имеет распределение, близкое к параболическому, с максимальным значением $\bar{u} \approx 2.1$ на оси трубы. Это значение несколько превышает аналогичную величину скорости в течении Пуазейля в круглой трубе, составляющую 2.0. Вдоль диагоналей профили средней скорости имеют точки перегиба и приближаются к угловым точкам с нулевой производной.

Профили амплитуды колебаний скорости $\gamma_u(y, z)$ вдоль обеих линий ведут себя немонотонно, вырастая с ростом d, d_0 до максимального значения, и уменьшаясь затем до выхода на плато, на котором остаются почти постоянными по величине. Наличие локального максимума в распределениях амплитуды колебаний составляет так называемый аннулярный эффект Ричардсона [17], который наблюдается в осциллирующих течениях при высоких частотах. Теоретическое расстояние от точки локального максимума $\gamma_u(y, z)$ до стенки $d/h = 2.28\Omega$. Положение максимумов на

рис. 2а хорошо согласуется с теоретическим значением при всех рассмотренных Ω . В диагональных распределениях $\gamma_u(y, z)$ точка максимума располагается несколько дальше от стенки: $d/h \approx 2.39\Omega$ во всех вариантах.

Наличие плато в распределениях $\gamma_u(y, z)$ в центральной части канала свидетельствует о том, что вязкие эффекты незначительны в этой области, и член $\partial u/\partial t$ в уравнении движения компенсируется градиентом давления d_p . Это значит, что колебания этих двух величин согласованы по фазе, а следовательно, колебания u отстают по фазе от d_p на $\pi/2$, так же, как и колебания расхода при больших Ω . Эти рассуждения согласуются с близким к нулевым значениям фазового сдвига ϕ_u колебаний $u(t, y, z)$ относительно колебаний расхода, показанными на рис. 3. В центральной области трубы ϕ_u имеет небольшие отрицательные значения, приближающиеся к нулевым при увеличении Ω . В пристенных областях колебания скорости обгоняют по фазе колебания расхода. Вблизи плоской стенки это опережение составляет 0.22π , что близко к разности фаз между колебаниями среднего по периметру напряжения трения и расхода, показанному на рис. 1б. Этот факт можно объяснить тем, что именно на плоской стенке (за пределами угловых областей) набирается интегральная величина трения на стенке. В угловых областях трение близко к нулю, а колебания скорости опережают колебания расхода на 0.39π , приближаясь по фазе к колебаниям градиента давления.

Отметим также, что амплитуда колебаний скорости $\gamma_u(y, z)$ в пристенной области превосходит величину среднего значения $\bar{u}(y, z)$. Последнее означает, что на определенных фазах колебаний движение жидкости в пристенной области направлено навстречу основному потоку. Вблизи плоской стенки толщина слоя возникновения обратного течения почти не меняется с изменением Ω , слегка увеличиваясь от $d/h \approx 0.11$ при $\Omega = 9.3$ до $d/h \approx 0.13$ при $\Omega = 18.6$. Максимальная величина обратного течения составляет около $0.2\bar{u}_b$ и достигается в моменты времени, опережающие на $\approx \pi/8$ фазы минимального расхода, т.е. при $\omega t \approx 3\pi/2 - \pi/8$. Области обратного течения в угловых областях более обширны по площади. Их протяженность вдоль диагонали поперечного сечения несколько сокращается с ростом частоты от $d_0/h \approx 0.40$ при $\Omega = 9.3$ до $d_0/h \approx 0.36$ при $\Omega = 18.6$. Максимальная величина обратного течения, наоборот, растет с частотой до $0.4\bar{u}_b$ при $\Omega = 18.6$ и достигается в моменты времени, близкие к фазам минимального расхода, т.е. при $\omega t \approx 3\pi/2$.

3. ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Для представления в настоящей работе отобраны результаты исследования турбулентных пульсирующих течений при $Re = 2200$, $\beta = 0.5$ и периодом осцилляций потока $T = 20, 40, 60$ и 80 . Здесь и далее все величины представляются в безразмерном виде. В качестве масштабов берутся половина стороны квадрата в сечении трубы h и удельный расход стационарной составляющей течения \bar{u}_b . Таким образом, например, изменение удельного расхода со временем описывается выражением $u_b(t) = 1 + \beta \sin \omega t$.

Для сравнения также проведены расчеты пульсирующих течений в круглой трубе при аналогичных значениях числа Рейнольдса $Re = Ru_b/\nu = 2200$ (R – радиус трубы), амплитуды и периодов осцилляций. Отметим, что число Рейнольдса в настоящей работе определяется через радиус трубы, а не диаметр, как при традиционном определении. Поэтому значение $Re = 2200$ на самом деле вдвое превышает общепринятое число Рейнольдса перехода к турбулентности в стационарном течении в трубе.

Обнаружено, что в турбулентных режимах во всех исследованных вариантах флуктуации гидродинамических величин, кроме случайной составляющей, имеют периодическую компоненту с периодом, диктуемым осцилляциями основного потока. Для анализа данных в установившемся пульсирующем течении используется фазовое осреднение, которое обозначается угловыми скобками. Для функций, зависящих от времени и пространственных координат, это осреднение проводится по формуле

$$\langle f \rangle(t, y, z) = \frac{1}{NL_x} \sum_{n=N_0+1}^{N_0+N} \int_0^{L_x} f(t + nT, x, y, z) dx \quad (3.1)$$

Таблица 1. Параметры расчетных вариантов

№	T	ω	Ω	Ω_r	$\tau_w \times 10^3$	$\Delta c_f (\%)$
1	20	0.314	18.6	9.27	4.57	-2.3
2	40	0.157	13.1	4.79	4.28	-8.5
3	60	0.105	10.7	3.27	4.05	-13.5
4	80	0.0785	9.3	2.48	3.99	-14.7
5	$\beta = 0$				4.68	0

Здесь время t меняется в пределах одного периода осцилляций: $t \in [0, T]$. Параметр N_0 в (3.1) выбирается с целью отсечения начального отрезка развития течения, предшествующего выходу на установившийся пульсационный режим. В соответствии с используемой постановкой задачи фазовое среднее не должно меняться вдоль однородной продольной координаты. Поэтому для ускорения сходимости фазового осреднения в (3.1) также используется осреднение по x . В трубе круглого сечения процедура осреднения обычно включает осреднение по однородной угловой координате. В трубе квадратного сечения применяется осреднение по восьми симметричным точкам в плоскости (y, z) . В работе фазовые средние вычислялись в 8 точках по времени, соответствующих $t/T = 0, 1/8, \dots, 7/8$. Число периодов осреднения N в (3.1) выбиралось достаточно большим, не менее 50 даже при наибольших значениях периода T .

Кроме фазового среднего используется среднее по времени, обозначаемое надчеркиванием

$$\overline{f}(y, z) = \frac{1}{T} \int_0^T \langle f \rangle(t, y, z) dt$$

Разность $\langle f \rangle - \overline{f}$ описывает осцилляционную составляющую, которая имеет нулевое среднее. Разность между мгновенным значением и фазовым средним величины f представляет собой случайную турбулентную флуктуацию и обозначается штрихом

$$f'(t, x, y, z) = f - \langle f \rangle$$

Некоторые параметры отобранных для представления вариантов даны в табл. 1. Приведены значения периода и частоты осцилляций, а также соответствующие им значения числа Стокса Ω и параметра $\Omega_r = 2\omega h/u_\tau$, введенного в [6]. Согласно классификации [6], рассмотренные варианты относятся к категории промежуточных частот, кроме первого варианта ($T = 20$), который можно отнести к режиму высокочастотных осцилляций.

В шестом столбце табл. 1 даны значения среднего по времени напряжения трения на стенке. В пятой строке приведено соответствующее значение для стационарного течения в квадратной трубе при том же числе Рейнольдса. Во всех вариантах пульсирующих течений получено уменьшение среднего трения по сравнению со стационарным потоком. Падение среднего трения и, соответственно, падение коэффициента сопротивления $c_f = 2\overline{\tau}_w$, показанное в последнем столбце табл. 1, увеличивается с ростом периода осцилляций и достигает 14.7% при $T = 80$. В расчетах пульсирующих течений в круглой трубе также получено снижение среднего трения по сравнению со стационарным течением. Это снижение также увеличивается с ростом периода осцилляций и составляет 2.9, 8.2 и 14.8% при $T = 20, 40$ и 60 соответственно. При увеличении периода осцилляций в круглой трубе до $T = 80$ получена ламинаризация потока. Эффект снижения турбулентного трения в пульсирующем течении в круглой трубе был обнаружен ранее в эксперименте [18]. При $Re > 3000$ это наблюдалось в узком диапазоне параметров в режимах доминирования осцилляций ($\beta > 1$). Было сделано предположение, что на определенных фазах колебаний происходит обратный переход, благодаря чему среднее трение снижается. Позже в численном исследовании [19] показано, что даже в режимах снижения среднего трения значительные турбулентные флуктуации сохраняются на всех фазах осцилляций потока.

Изменения осредненных по фазе среднего градиента давления $\langle d_p \rangle(t)$ и среднего (по площади боковой поверхности трубы) напряжения трения $\langle \tau_w \rangle(t)$ во всех вариантах приведены на рис. 4. Сплошные черные линии показывают соответствующие постоянные значения в стационарном

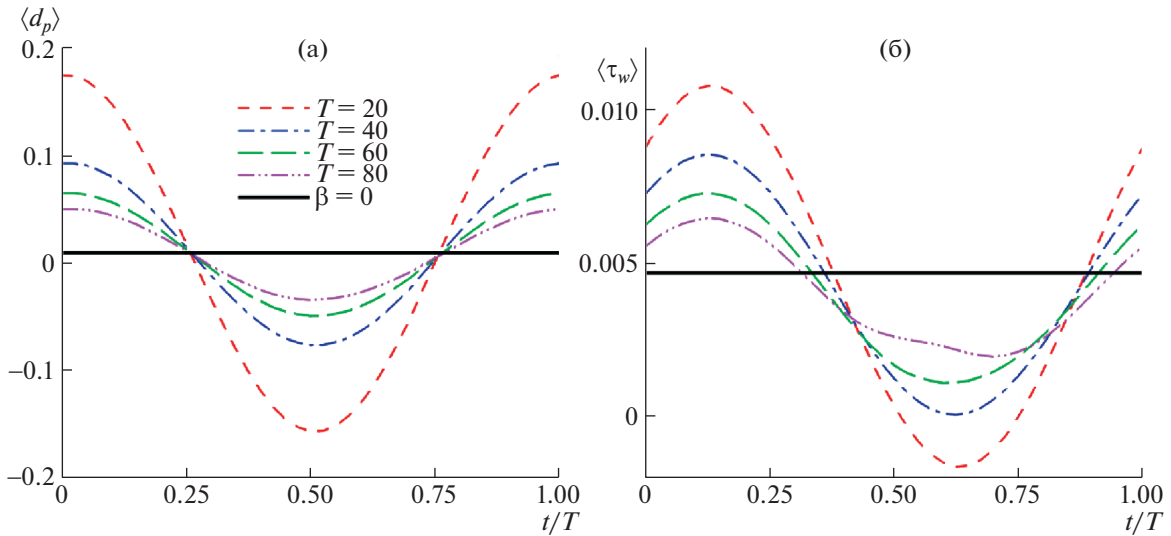


Рис. 4. Колебания осредненных по фазе (а) среднего градиента давления $\langle d_p \rangle(t)$ и (б) среднего трения на стенке $\langle \tau_w \rangle(t)$.

течении. Представленные характеристики имеют почти гармоническое поведение $\langle d_p \rangle(t) \approx d_p + \gamma_p \sin(\omega t + \varphi_p)$ и $\langle \tau_w \rangle(t) \approx \tau_w + \gamma_\tau \sin(\omega t + \varphi_\tau)$. Как видно из рис. 4, положения экстремумов представленных величин меняются слабо при изменении периода осцилляций, что согласуется с поведением осциллирующих течений в ламинарном режиме при высоких значениях числа Стокса. Колебания трения и колебания градиента давления опережают колебания средней скорости по времени на $T/8$ и $T/4$ или по фазе на $\pi/4$ и на $\pi/2$ соответственно. Таким образом, соотношения фаз колебаний этих величин совпадает с поведением в ламинарном течении при больших частотах. Амплитуды осцилляций γ_p, γ_τ как градиента давления, так и трения на стенке увеличиваются с ростом частоты, что также качественно соответствует ламинарному поведению. При наибольшем периоде осцилляций характер поведения представленных величин начинает отклоняться от гармонического, что особенно заметно на графике $\langle \tau_w \rangle(t)$ для $T = 80$ в диапазоне $t/T = 0.4-0.7$. Такое изменение свидетельствует о влиянии нелинейных эффектов, что подтверждается значительным уровнем турбулентных флуктуаций в этой области параметров. Отметим, что функции $\langle d_p \rangle(t)$ и $\langle \tau_w \rangle(t)$ при $T \leq 60$ качественно и количественно близки к соответствующим характеристикам в круглой трубе.

На рис. 5а показаны изменения амплитуды турбулентных флуктуаций $A_t = \sqrt{2K_t}$, где $K_t(t)$ – среднее по сечению трубы значение кинетической энергии турбулентности $k_t(t, y, z) = 0.5 \langle u'_i u'_i \rangle$ (по повторяющимся индексам предполагается суммирование). На рис. 5б представлены графики амплитуды вторичных течений $A_{sf}(t)$, где

$$A_{sf}^2(t) = \frac{1}{S} \iint (\langle v \rangle^2 + \langle w \rangle^2) dy dz$$

Здесь v, w – поперечные компоненты вектора скорости, S – площадь поперечного сечения трубы. Скорость изменения амплитуды турбулентных флуктуаций в целом пропорциональна величине расхода. На первой половине периода осцилляций, когда $u_b(t) > 1$, амплитуда флуктуаций растет, а на второй половине, когда $u_b(t) < 1$, падает. Эта зависимость особенно выражена при наибольшем периоде $T = 80$, когда моменты смены знака dA_t/dt практически совпадают с моментами смены знака осцилляционной части расхода. В этом же варианте достигаются максимальные и минимальные значения A_t . Достижение максимума A_t при $t/T \approx 0.5$ согласуется с появлением нелинейных искажений в графике $\langle \tau_w \rangle(t)$ для $T = 80$, показанном на рис. 4б. С ростом частоты осцилляций амплитуда изменения $A_t(t)$ падает, изменение dA_t/dt начинает отста-

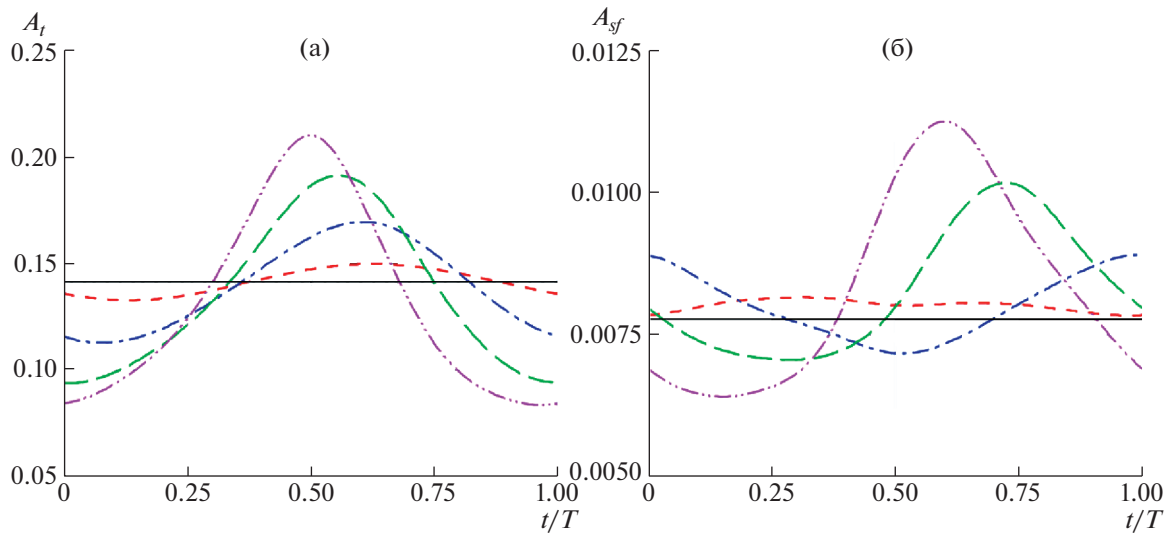


Рис. 5. Амплитуда турбулентных флуктуаций скорости (а) и амплитуда вторичных течений (б). Обозначения линий те же, что и на рис. 4.

вать от изменения $u_b(t)$. При наибольшей частоте это отставание достигает $T/8$, что эквивалентно $\pi/4$ в фазовом выражении. В нескольких исследованиях пульсирующих течений в круглой трубе, начиная с эксперимента [20], отмечается, что интенсивность турбулентности возрастает на фазе замедления потока и, наоборот, затухает на фазе ускорения. Результаты данной работы в целом согласуются с этими наблюдениями: во всех вариантах максимальные значения A_t приходятся на фазу, близкую к моменту наибольшего замедления потока. Однако следует отметить, что рост амплитуды турбулентных флуктуаций начинается несколько раньше наступления замедления, еще на фазе завершения ускорения потока.

Более подробное изучение поведения флуктуаций различных компонент скорости показывает, что основной составляющей энергии турбулентности являются флуктуации продольной компоненты скорости. Максимальные значения квадрата продольных флуктуаций $\langle u'^2 \rangle$ примерно на порядок превышают аналогичные значения для поперечных флуктуаций $\langle v'^2 \rangle + \langle w'^2 \rangle$. Кроме того, эти максимумы несколько разделены по фазе – максимумы поперечных флуктуаций отстают от продольных, и это отставание увеличивается с частотой. Поведение амплитуды вторичных течений, показанное на рис. 5б, качественно соответствует поведению амплитуды поперечных пульсаций скорости. Изменение уровня вторичных течений в пределах одного периода осцилляций уменьшается с ростом частоты, максимальная их амплитуда запаздывает по фазе от максимальной амплитуды флуктуаций скорости, соответствуя в большей степени поведению амплитуды поперечных пульсаций. В [8, 21] сформулирован механизм образования турбулентных вторичных течений в прямых трубах некруглого поперечного сечения. Источником возникновения вторичных течений являются именно турбулентные флуктуации скорости в поперечном сечении трубы. Наблюдаемая амплитудная и фазовая связь между вторичными течениями и интенсивностью поперечных флуктуаций скорости в пульсирующих течениях качественно согласуется с упомянутым механизмом.

Производство p_t и диссипация d_t кинетической энергии турбулентности в точке (y, z) поперечного сечения трубы в безразмерном представлении описываются выражениями

$$p_t(t, y, z) = -\langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \quad (3.2)$$

$$d_t(t, y, z) = \frac{2}{\text{Re}} \langle e'_{ij} e'_{ij} \rangle \quad (3.3)$$

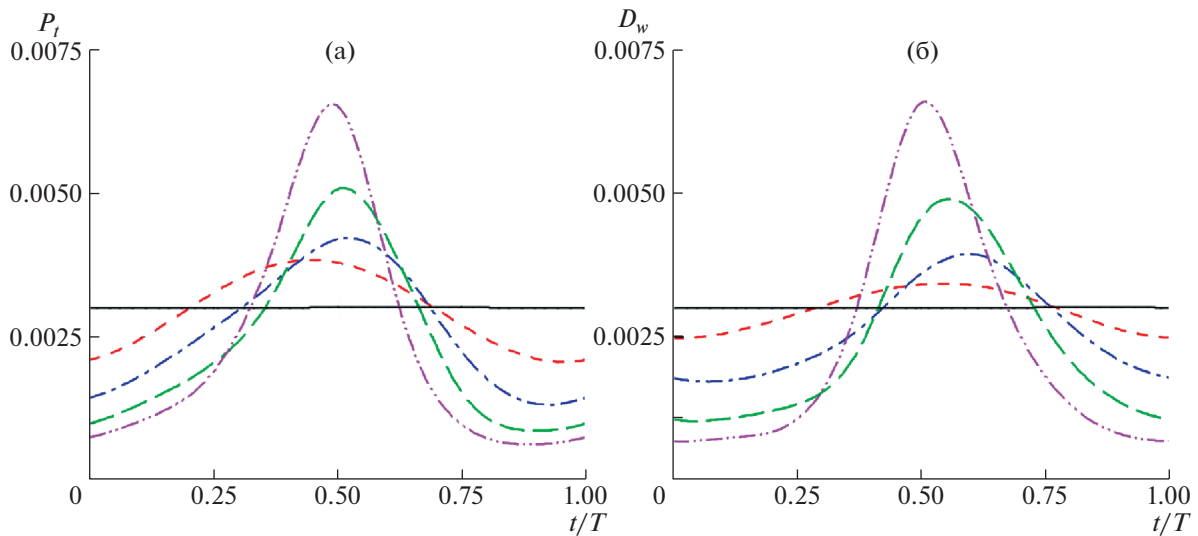


Рис. 6. Средние по сечению трубы производство (а) и диссипация (б) кинетической энергии турбулентности. Обозначения линий те же, что и на рис. 4.

В последнем выражении $e'_{ij} = 0.5(\partial u'_i/\partial x_j + \partial u'_j/\partial x_i)$ – компоненты тензора скоростей деформации турбулентных флуктуаций. Изменение кинетической энергии k_t в точке определяется конкуренцией производства и диссипации, а также изменением за счет различных механизмов внутреннего переноса. При интегрировании по площади поперечного сечения вклад переносных членов обнуляется, и для изменения средней по сечению кинетической энергии $K(t)$ получаем

$$\frac{dK(t)}{dt} = P_t - D_t$$

где $P_t(t)$, $D_t(t)$ – средние по сечению трубы значения производства (3.2) и диссипации (3.3) кинетической энергии. Графики $P_t(t)$ и $D_t(t)$ для всех расчетных вариантов приведены на рис. 6. При всех T период наибольшего производства энергии приходится на фазу уменьшения расхода. С ростом периода осцилляций амплитуда изменения $P_t(t)$ увеличивается, максимальные значения P_t все больше концентрируются в окрестности точки $t/T = 0.5$, где du_b/dt достигает минимума. Изменение диссипации энергии $D_t(t)$ в целом повторяет $P_t(t)$. Важное отличие состоит в небольшом запаздывании по фазе, в результате чего получается, что $P_t > D_t$ на первой половине периода, и наоборот, $P_t < D_t$ – на второй. Такое поведение соответствует изменению амплитуды турбулентности (рис. 5а), которая растет на первом полупериоде и уменьшается на втором. Отставание диссипации кинетической энергии от производства можно объяснить тем, что диссипация происходит на меньших пространственных масштабах, чем масштабы, возбуждаемые в процессе производства, и для их образования посредством каскадного процесса требуется некоторое время.

4. ПОЛЕ СРЕДНЕЙ СКОРОСТИ И ВТОРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Турбулентные течения в прямоугольных трубах характерны появлением вторичных течений в плоскости поперечного сечения. Флуктуационные движения частиц жидкости по искривленным траекториям в угловых областях поперечного сечения вызывают локальные повышения давления в углах. В результате возникает градиент давления, действующий вдоль стенок в обе стороны от каждой угловой точки. В пристенной области действие градиента давления может быть скомпенсировано только силой трения, действующей навстречу движению. Так возникают вторичные течения, в виде растекания жидкости в стороны от угла вдоль смежных стенок и компенсирующего притока к углу вдоль биссектрисы [8, 21]. Действие вторичных течений проявля-

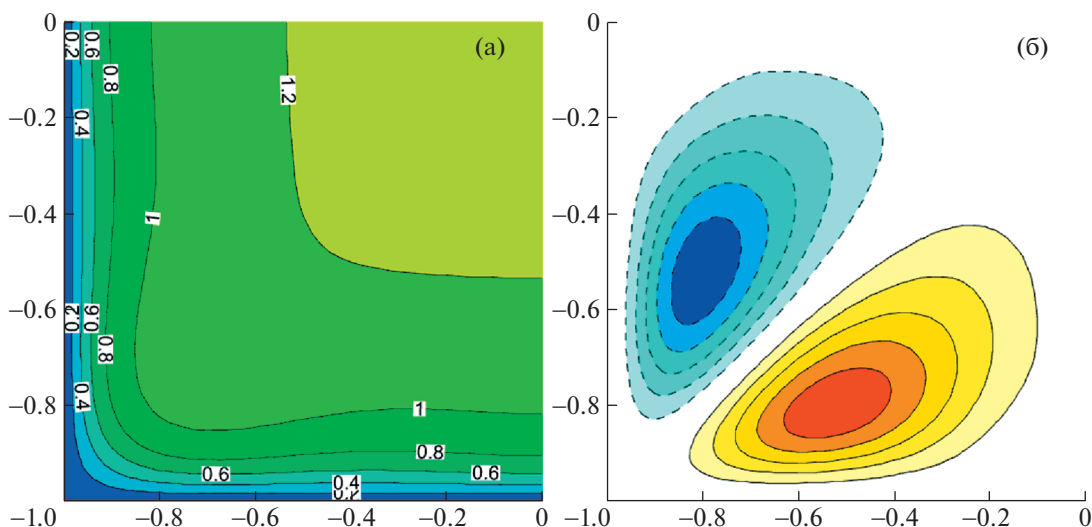


Рис. 7. Распределения продольной компоненты средней скорости $\bar{u}(y, z)$ (а) и линии тока вторичного течения (б) в стационарном ($\beta = 0$) течении. Показана четверть поперечного сечения трубы.

ется в искажениях изолиний средней скорости с характерными выпуклостями, направленными в сторону углов.

Распределение средней скорости с упомянутыми особенностями и линии тока вторичных течений в плоскости поперечного сечения квадратной трубы в стационарном ($\beta = 0$) турбулентном течении при $Re = 2200$ ([10]) показаны на рис. 7. Представлена четверть сечения трубы, соответствующая 3-му квадранту. В остальных четвертях картина движения симметрична. Линии тока вторичного течения совпадают с изолиниями функции тока $\bar{\Psi}(y, z) : v = \partial\bar{\Psi}/\partial z, \bar{w} = -\partial\bar{\Psi}/\partial y$. На рис. 7б и далее на аналогичных рисунках даны поля функций тока и их изолинии с шагом ± 0.0004 . Положительные значения функции тока отмечены сплошными изолиниями, им соответствует движение частиц жидкости против часовой стрелки. Отрицательные значения и движение по часовой стрелке показаны прерывистыми линиями. Максимальная скорость вторичного течения в сторону угла вдоль биссектрисы составляет около 0.02, примерно с такой же максимальной скоростью происходит растекание вдоль стенок.

В рассмотренных вариантах пульсирующих течений интенсивность вторичных течений и связанной с ними деформации изолиний продольной скорости увеличивается с ростом периода осцилляций. Распределения по сечению трубы фазовых средних продольной компоненты скорости $\langle u \rangle(t, y, z)$ в моменты времени $t/T = 0, 1/8, \dots, 7/8$ для варианта *ТА* приведены на рис. 8а–з. Панели (а) и (д) соответствуют моментам времени $\omega t = 0$ и π , т.е. моментам наибольшего ускорения и замедления потока соответственно. Панели (в) и (ж) отвечают $\omega t = \pi/2$ и $3\pi/2$, когда расход принимает максимальное и минимальное значения. На последней панели (з) представлено поле среднего по времени $\bar{u}(y, z)$. Так же, как и на рис. 7, показана четверть сечения трубы. Для сравнения на рис. 9 показаны аналогичные распределения, соответствующие наименьшему из периодов осцилляций $T = 20$. Как видно из рис. 8а–з, изолинии средней скорости при $T = 80$ в каждый момент претерпевают более существенные искажения, чем в стационарном течении. В наибольшей степени это относится к первой половине периода, когда расход превышает среднее значение. Среднее по времени, изображенное на рис. 8и, также заметно отличается от поля скорости в стационарном течении. При наименьшем периоде искажения изолиний $\langle u \rangle(t, y, z)$ выражены существенно слабее и незначительно изменяются в разные моменты времени. В свою очередь, среднее по времени при $T = 20$ близко к стационарному случаю, представленному на рис. 7а.

На рис. 10 изображены линии тока вторичных течений в различные моменты осцилляционного цикла, а также линии тока течения, осредненного по времени. Представлены результаты для варианта $T = 80$. При меньших периодах изменение вторичных течений во времени менее выражено. При наименьшем периоде $T = 20$ вторичные течения во все моменты времени практически не отличаются от распределения в стационарном течении, показанном на рис. 7б. В со-

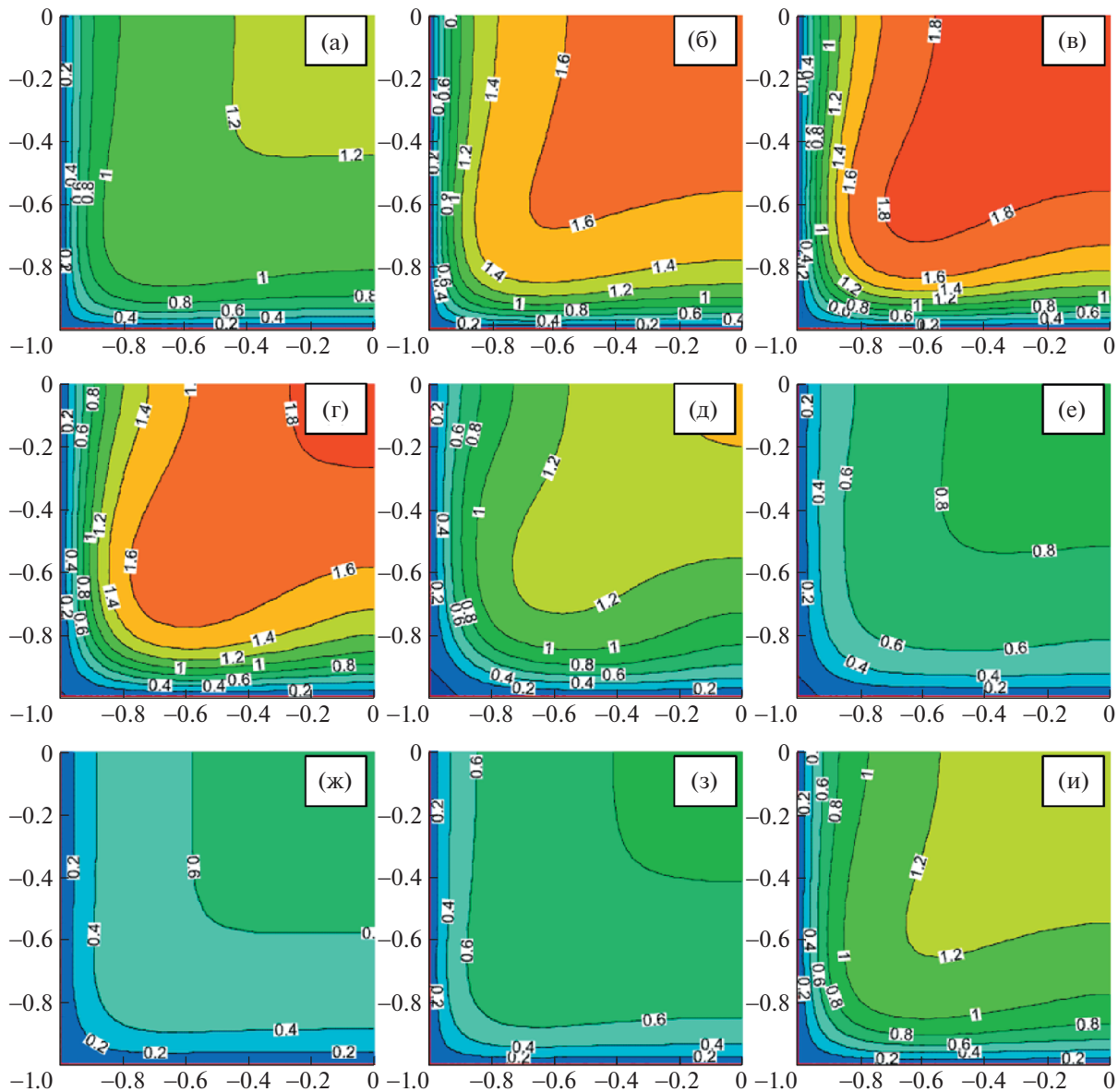


Рис. 8. Распределения фазовых средних продольной компоненты скорости $\langle u \rangle(t, y, z)$ в моменты времени $t/T = 0, 1/8, \dots, 7/8$ (а–з) и среднего по времени $\bar{u}(y, z)$ (и). $T = 80$.

ответствии с изменением интегральной амплитуды вторичных течений, показанном на рис. 5б, максимальная интенсивность вторичного течения при $T = 80$ достигается в фазах, следующих за моментом наибольшего замедления потока, именно при $\omega t = 5\pi/4$, когда скорость потока приближается к минимальному уровню. Скорость вторичного течения в максимуме почти на 50% превышает среднее значение, которое, в свою очередь, на 20% меньше, чем в стационарном течении. Интересно, что наиболее значительные искажения в форме изолиний средней скорости наблюдаются не в те моменты времени, когда вторичные течения максимальны по амплитуде, а скорее наоборот, в моменты минимального их уровня. Это можно объяснить тем, что эти моменты соответствуют максимальной скорости потока, а следовательно, и максимальным градиентам средней скорости, благодаря чему даже небольшие по величине поперечные движения приводят к заметным искажениям в распределении продольной скорости.

Изменение во времени осредненной по фазе скорости течения в каждой точке поперечного сечения можно представить в виде

$$\langle u \rangle(t, y, z) = \bar{u}(y, z) + \gamma_u(y, z) \sin(\omega t + \varphi_u(y, z)) + \delta_u(t, y, z) \quad (4.1)$$

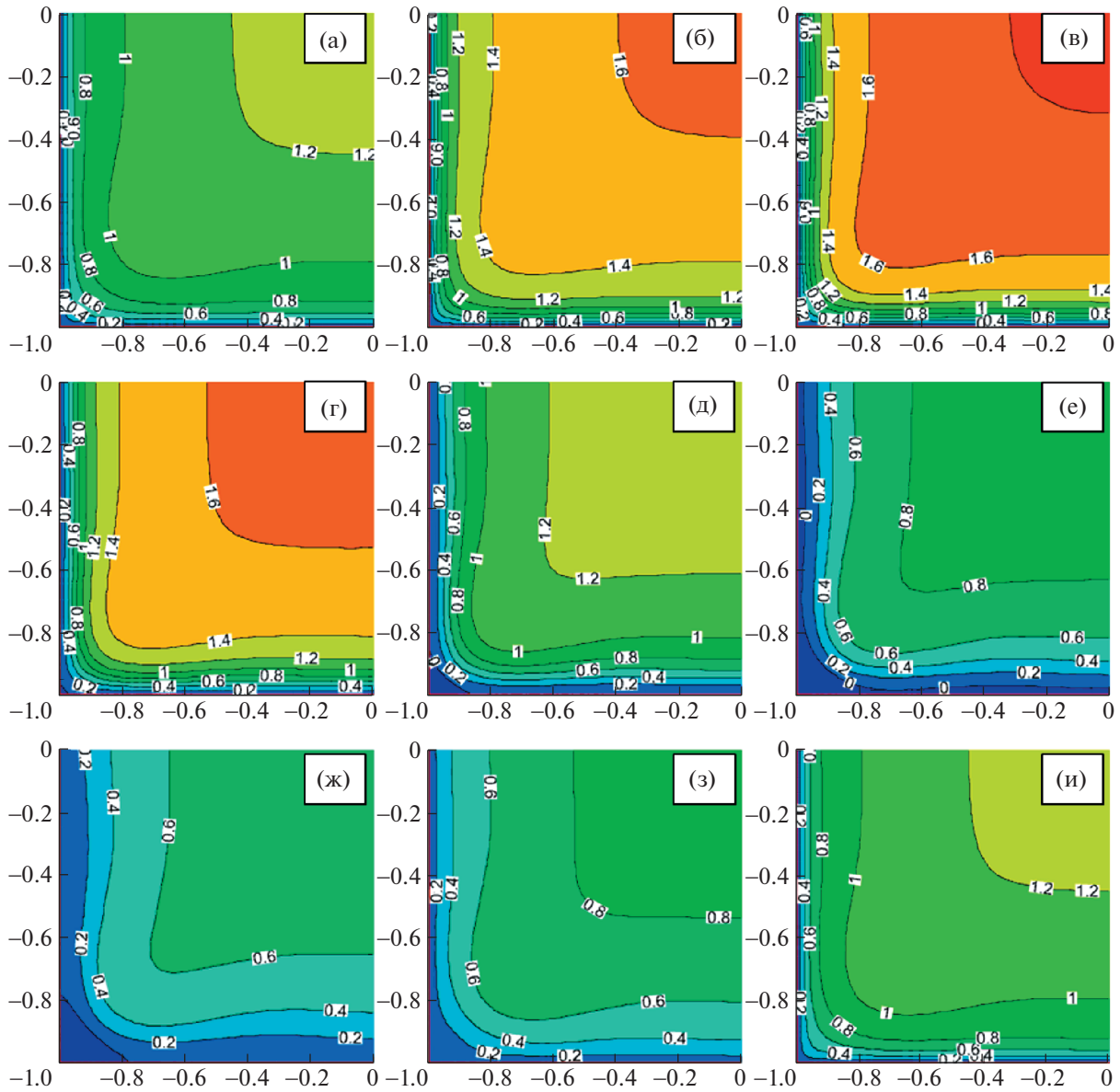


Рис. 9. Распределения фазовых средних продольной компоненты скорости $\langle u \rangle(t, y, z)$ в моменты времени $t/T = 0, 1/8, \dots, 7/8$ (а–з) и среднего по времени $\bar{u}(y, z)$ (и). $T = 20$.

Последнее слагаемое в (4.1) включает старшие гармоники разложения периодической функции $\langle u \rangle(t)$ в ряд Фурье. Величины γ_u , ϕ_u при каждом (y, z) определялись по 8 полям $\langle u \rangle(t, y, z)$ с использованием процедуры наименьших квадратов. Оказалось, что гармоническое приближение (без учета последнего слагаемого в (4.1)) приближает поле $\langle u \rangle(t, y, z)$ при всех значениях периода T с точностью до единиц процентов. Графики изменения среднего значения $\bar{u}(y, z)$ и амплитуды осцилляций $\gamma_u(y, z)$ продольной скорости вдоль срединного перпендикуляра к стенке и вдоль диагонали от угловой точки до центра сечения трубы представлены на рис. 11 для всех значений T . На рис. 12 даны графики изменения фазы $\phi_u(y, z)$ вдоль тех же линий. Распределения средней скорости $\bar{u}(y, z)$ по нормали к стенке отличаются от ламинарного случая, представленного на рис. 2а, типично турбулентной, наполненной формой с заметно бóльшим градиентом на стенке и существенно меньшим значением на оси трубы (1.33 против 2.1). С ростом периода осцилляций скорость в пристенной зоне (до $d = 0.3$) заметно снижается, что находит отражение в падении коэффициента сопротивления по сравнению со стационарным течением. Уменьшение ско-

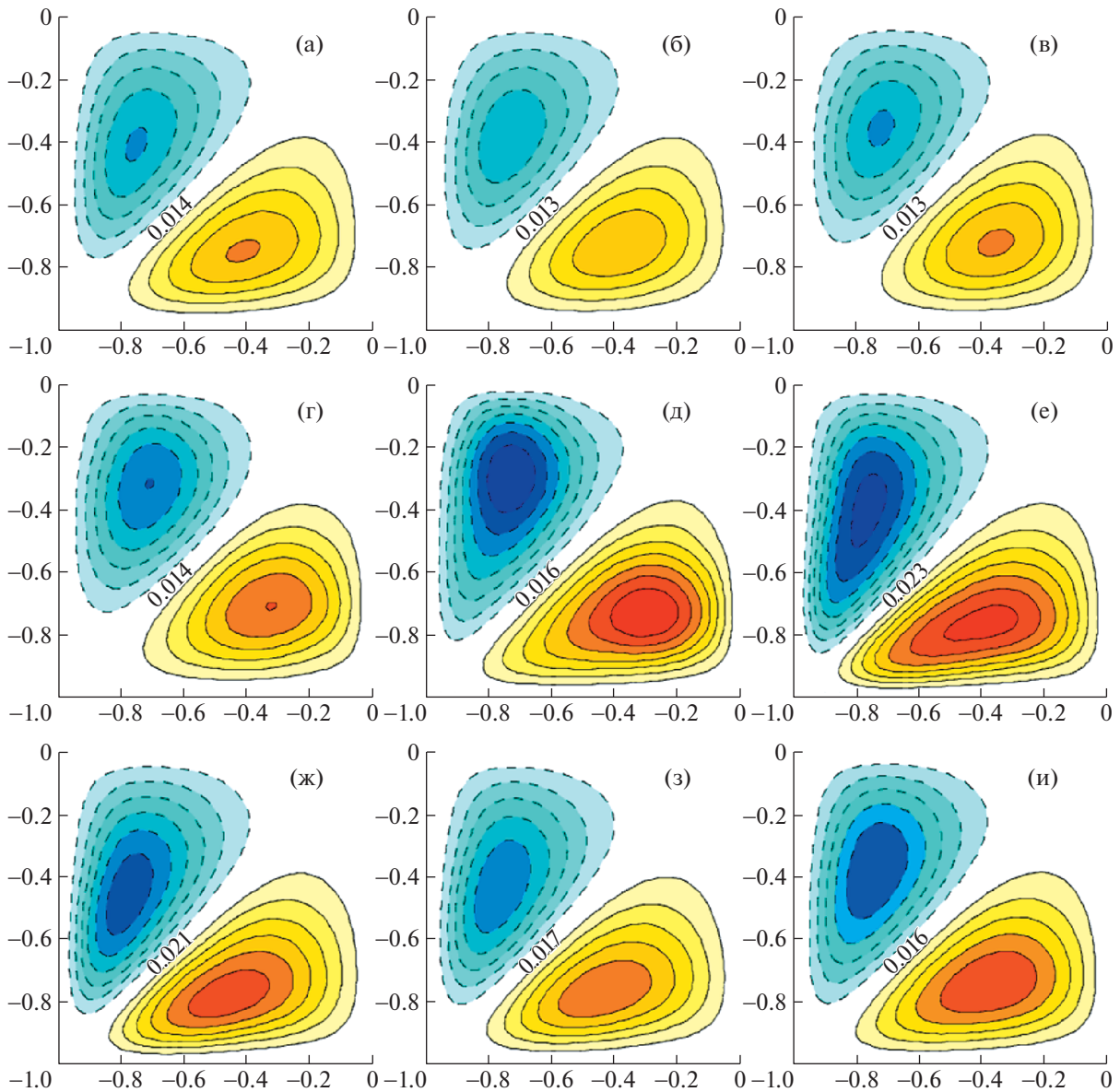


Рис. 10. Линии тока средних по фазе вторичных течений в моменты времени $t/T = 0, 1/8, \dots, 7/8$ (а–з) и среднего по времени (и). На диагонали $z = y$ указаны максимальные значения скорости вторичного течения. $T = 80$.

рости в пристенной зоне компенсируется ускорением среднего течения вдоль диагональной линии. В отличие от ламинарного течения профили средней скорости в турбулентных течениях вдоль диагонали имеют не одну, а три точки перегиба. Впрочем, выраженность дополнительных точек перегиба уменьшается с ростом периода осцилляций.

Максимальная амплитуда осцилляций $\gamma_u(y, z)$ имеет ту же величину 0.5–0.6, что и в ламинарных течениях, хотя и несколько увеличивается с ростом T . Аннулярный эффект, заключающийся в немонотонном поведении γ_u при удалении от стенки в турбулентных течениях, сохраняется, однако с ростом T становится менее выраженным, особенно вблизи плоского участка стенки. Точка локального максимума γ_u сдвигается в сторону ядра потока. Так же, как и в ламинарных течениях, амплитуда осцилляций в значительной степени остается почти постоянной на большей части сечения трубы, хотя эта область сокращается с ростом периода осцилляций. Протяженность отрезков, на которых γ_u превышает среднее значение скорости, и на которых возникают движения в обратном направлении, существенно сокращается. Вблизи плоской стенки эти

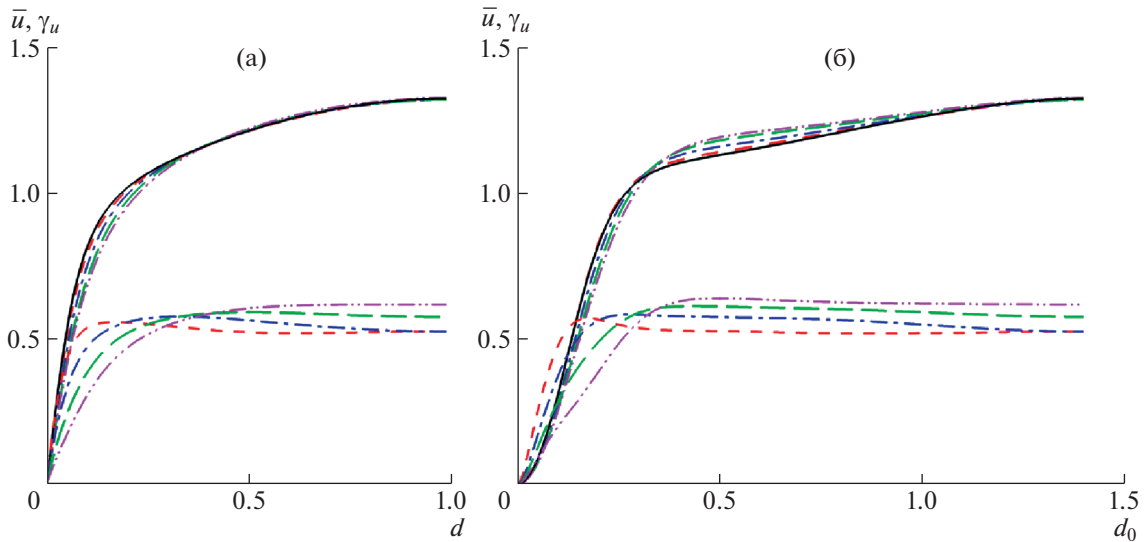


Рис. 11. Графики изменения среднего значения $\bar{u}(y, z)$ (в верхней части рисунка) и амплитуды колебаний $\gamma_u(y, z)$ (в нижней части рисунка) скорости вдоль тех же линий, что и на рис. 2. Обозначения линий те же, что и на рис. 4.

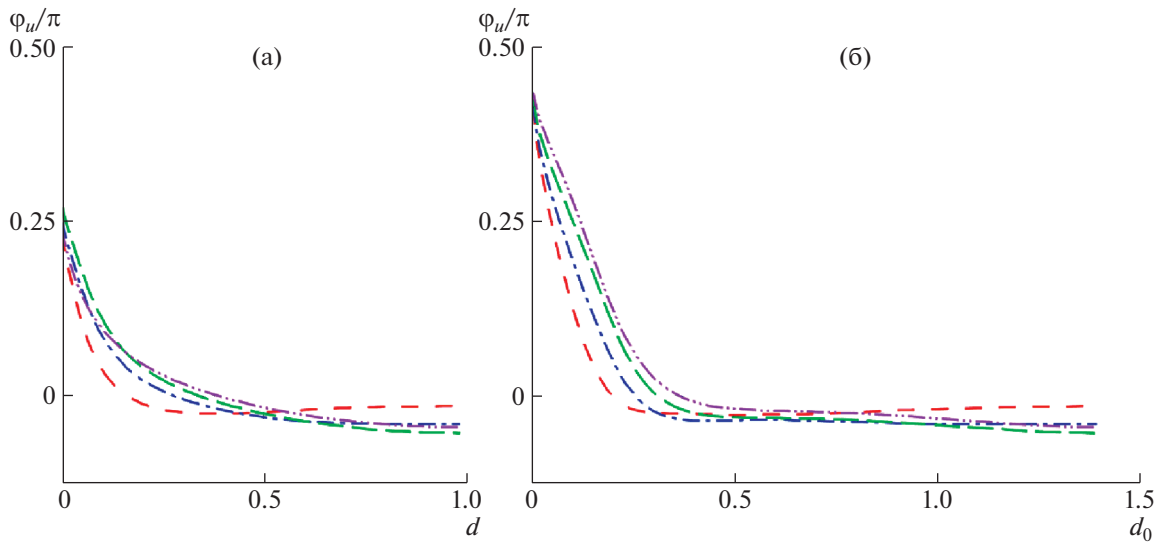


Рис. 12. Графики изменения сдвига по фазе $\varphi_u(y, z)$ колебаний скорости относительно колебаний расхода вдоль тех же линий, что и на рис. 2. Обозначения линий те же, что и на рис. 4.

области пропадают практически полностью, в угловых областях они уменьшаются до $d_o \approx 0.14$ при T (при бóльших значениях T эта область еще короче), тогда как в ламинарных течениях область обратных течений простирается до $d_o \approx 0.4$.

Поведение фазы осцилляций $\varphi_u(y, z)$ в турбулентных и ламинарных потоках качественно и количественно близко. В ядре потока $\varphi_u(y, z)$ имеет незначительное отрицательное значение, т.е. колебания ядра несколько отстают от колебаний расхода. В пристенных областях осцилляции скорости опережают поток. Опережение по фазе в этих областях аналогично ламинарным течениям: около $\pi/4$ вблизи плоской стенки и $\approx 0.4\pi$ вблизи углов. Положительные значения φ_u отражаются в моментах появления обратных течений на рис. 8 и 9. Области отрицательных зна-

чений $\langle u \rangle$ наблюдаются в моменты, предшествующие минимуму расхода, соответствующему панели (ж). Так, при $T = 80$ небольшие отрицательные скорости можно заметить в угловых областях на панелях (д) и (е). При $T = 20$ области отрицательных скоростей более выражены. В угловых областях они заметны на панелях (д)–(ж). А на панели (е), соответствующей фазовому сдвигу на $\pi/4$ от момента минимума расхода, наблюдаются отрицательные скорости и вблизи плоского участка стенки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено численное исследование пульсирующих турбулентных течений в трубе квадратного сечения. Использован универсальный метод решения уравнений Навье–Стокса, сочетающий конечно-разностный метод дискретизации по пространственным координатам и полунеявную схему интегрирования по времени. Расчеты проведены при $Re = 2200$, для которого ранее проводились расчеты стационарного течения. Рассмотрен режим доминирования потока, когда расход имеет положительную величину во все фазы движения.

Дано точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее ламинарные осциллирующие течения в прямоугольных трубах. Проведен анализ этих решений для случая трубы квадратного сечения. Найдены амплитудные и фазовые соотношения между колебаниями градиента давления, расхода и среднего напряжения трения на стенке. Изучены распределения скорости по сечению трубы. Определены области возникновения, амплитуды и фазы обратных течений.

Турбулентные режимы течения исследованы для случаев, когда безразмерный удельный расход изменяется со временем по закону $u_b(t) = 1 + \beta \sin \omega t$ при $\beta = 0.5$. Представлены результаты расчета течений, соответствующих четырем значениям периода осцилляций: $T = 2\pi/\omega$ от $T = 20$ до $T = 80$. Проведено сравнение с ламинарными течениями в квадратной трубе и турбулентными течениями в круглой трубе, которые изучались в прошлом как экспериментально, так и численно. Обнаружено, что средний по времени коэффициент сопротивления в пульсирующих течениях имеет меньшее значение, чем в стационарном течении. Разница растет с периодом осцилляций и достигает 14.7% при $T = 80$. Аналогичное уменьшение сопротивления отмечено и в круглой трубе.

Рассчитаны изменения во времени осредненных по фазе характеристик течения: средней по объему трубы кинетической энергии турбулентности, ее генерации и диссипации, амплитуды вторичных течений. Во всех вариантах максимальные значения энергии турбулентных флуктуаций приходятся на фазу, близкую к моменту наибольшего замедления потока. Однако следует отметить, что ее рост начинается несколько раньше наступления замедления потока, еще на фазе завершения ускорения. Изменение кинетической энергии турбулентности определяется конкуренцией производства и диссипации. Обнаружено, что обе эти величины имеют близкое по форме распределение по времени на периоде осцилляций с максимальным значением в районе $\omega t = \pi$ с небольшим запаздыванием диссипации относительно колебаний производства. Обнаружено, что основной вклад в кинетическую энергию турбулентности вносят флуктуации продольной компоненты скорости. Энергия поперечных флуктуаций уступает на порядок по величине и изменяется с некоторой задержкой по фазе. Отмечено, что колебания интенсивности вторичных течений также отстают по фазе от колебаний энергии турбулентности и согласованы с колебаниями энергии поперечных флуктуаций.

Проведено подробное исследование распределений средней продольной скорости по сечению трубы на разных фазах колебания потока. Даны сопоставления с ламинарными пульсирующими течениями и турбулентным стационарным течением. От ламинарного течения распределения скорости отличаются в первую очередь наполненностью профилей с заметным уменьшением скорости на оси трубы и характерными искривлениями изолиний, вызванными действием вторичных течений. От стационарного течения пульсирующие течения отличаются значительно большими искривлениями изолиний, что особенно характерно для первой половины осцилляционного цикла, когда расход превышает среднее значение. Отмеченное свойство наиболее выражено при наименьших частотах. Изменение активности вторичных течений со временем падает с ростом частоты осцилляций и практически исчезает при $T = 20$. При наименьшей частоте, соответствующей $T = 80$, амплитуда колебаний скорости вторичных течений достигает почти 50% от среднего уровня, хотя само среднее значение оказывается на 20% меньше, чем в стационарном течении.

В целом впервые выполнено подробное исследование основных особенностей турбулентных пульсирующих течений в трубах квадратного поперечного сечения. Отдельное внимание уделено вторичным течениям, отсутствующим в ламинарных течениях, а также и в турбулентных течениях в круглых трубах.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 22-21-00184, с использованием вычислительных ресурсов ОВК НИЦ “Курчатовский институт” <http://computing.nrcki.ru/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brereton G.J., Mankbadi R.R.* Review of recent advances in the study of unsteady turbulent internal flows // *Appl. Mech. Rev.* 1995. V. 48. № 4. P. 189–212.
2. *Carpinlioglu M.O., Gundogdu M.Y.* A critical review on pulsatile pipe flow studies directing towards future research topics // *Flow Meas. Instrum.* 2001. V. 12. P. 163–174.
3. *Manna M., Vacca A., Verzicco R.* Pulsating pipe flow with large-amplitude oscillations in the very high frequency regime. Part 1. Time-averaged analysis // *J. Fluid Mech.* 2012. V. 700. P. 246–282.
4. *Papadopoulos P.K., Vouros A.P.* Pulsating turbulent pipe flow in the current dominated regime at high and very-high frequencies // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2016. V. 58. P. 54–67.
5. *Stokes G.G.* On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums // *Cambridge Philos. Soc.* 1850. V. 9. P. 1–86.
6. *Ramaprian B.R., Tu S.W.* Fully developed periodic turbulent pipe flow. Part 2. The detailed structure of the flow // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 137. P. 59–81.
7. *Tardu S.F., Binder G.* Wall shear stress modulation in unsteady turbulent channel flow with high imposed frequencies // *Phys. Fluids.* 1993. V. 5. P. 2028–2034.
8. *Никитин Н.В., Попеленская Н.В., Stroh A.* Вторичные течения Прандтля 2-го рода. Проблемы описания, предсказания, моделирования // *Изв. РАН. МЖГ.* 2021. № 4. С. 73–99.
9. *Gavrilakis S.* Numerical simulation of low-Reynolds-number turbulent flow through a straight square duct // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 244. P. 101–129.
10. *Никитин Н.В., Пиманов В.О., Попеленская Н.В.* К вопросу об образовании вторичных течений Прандтля 2-го рода // *ДАН.* 2019. Т. 484. № 4. С. 420–425.
11. *Uhlmann M., Pinelli A., Kawahara G., Sekimoto A.* Marginally turbulent flow in a square duct // *J. Fluid Mech.* 2007. V. 588. P. 153–162.
12. *Nikitin N.* Finite-difference method for incompressible Navier–Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates // *J. Comput. Phys.* 2006. V. 217. P. 759–781.
13. *Yakhot A., Arad M., Ben-Dor G.* Numerical investigation of a laminar pulsating flow in a rectangular duct // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 1999. V. 29. P. 935–950.
14. *Валуева Е.П., Пурдин М.С.* Пульсирующее ламинарное течение в прямоугольном канале // *Теплофизика и аэромеханика.* 2015. Т. 22. № 6. С. 761–773.
15. *White F.M.* Viscous fluid flow, 3rd edition. International edition: McGraw-Hill publication, 2006. 629 p.
16. *Uchida S.* Pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion // *Z. angew. Math. Phys.* 1956. V. 7. P. 403–422.
17. *Richardson E.G., Tyler E.* The transfer velocity gradient near the mouths of pipes in which an alternating or continuous flow of air is established // *Proc. Phys. Soc. Lond.* 1929. V. 42. P. 1–15.
18. *Lodahl C.R., Sumer B.M., Fredsoe J.* Turbulent combined oscillatory flow and current in a pipe // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 373. P. 313–348.
19. *Manna M., Vacca A.* Spectral dynamic of pulsating turbulent pipe flow // *Comput. Fluids.* 2007. V. 37. P. 825–835.
20. *Gerrard J.H.* An experimental investigation of pulsating turbulent water flow in a tube // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 46. P. 43–64.
21. *Nikitin N.* Turbulent secondary flows in channels with no-slip and shear-free boundaries // *J. Fluid Mech.* 2021. V. 917. P. A24.