

УДК 532.59:539.3

## ДВИЖЕНИЕ НАГРУЗКИ ПО ЛЕДЯНОМУ ПОКРОВУ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕЧЕНИЯ СО СДВИГОМ СКОРОСТИ

© 2023 г. Л. А. Ткачева

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия*

*E-mail: tkacheva@hydro.nsc.ru*

Поступила в редакцию 22.06.2022 г.

После доработки 20.12.2022 г.

Принята к публикации 20.12.2022 г.

Исследовано поведение ледяного покрова на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины под действием движущейся прямолинейно с постоянной скоростью области давления при наличии потока со сдвигом скорости. Течение жидкости не потенциально. Ледяной покров моделируется тонкой упругой пластиной с учетом равномерного сжатия. Движение нагрузки может происходить под произвольным углом к направлению течения. Предполагается, что в системе координат, движущейся вместе с нагрузкой, прогиб льда является установившимся. Использован метод преобразования Фурье в рамках линейной теории волн. Исследованы критические скорости и прогиб ледяного покрова в зависимости от градиента скорости течения, направления движения и коэффициента сжатия.

*Ключевые слова:* тонкая упругая плавающая пластина, изгибно-гравитационные волны, сдвиг скорости, движущаяся нагрузка, критическая скорость

**DOI:** 10.31857/S0568528123700044, **EDN:** NTTSET

Ледяной покров на поверхности рек, озер, морей и океана часто используется для создания дорог, взлетных полос, причалов и плавающих платформ для разведочного бурения. Для безопасности работ на льду необходимо изучать закономерности его поведения при механическом воздействии.

В настоящее время задача о поведении ледяного покрова под действием прямолинейно движущейся нагрузки изучена достаточно хорошо при ее стационарном и нестационарном движении. Имеется значительное число работ о действии различных физических факторов на характер распространения изгибно-гравитационных волн в плавающем ледяном покрове [1–9]. Однако влияние течения со сдвигом скорости изучено недостаточно. Имеется несколько работ на эту тему [10–15], в которых рассмотрена двумерная задача для линейного профиля скорости течения. В этом случае возмущения в жидкости носят потенциальный характер. Достаточно хорошо изучено воздействие сдвига скорости течения на поверхностные волны (см. [16–23] и имеющуюся в них библиографию). В трехмерном случае возмущения не потенциальны, носят вихревой характер [23].

Задача о влиянии сдвигового течения на изгибно-гравитационные волны в ледяном покрове в трехмерной постановке находится на начальной стадии изучения. В [24] исследована трехмерная начально-краевая задача о поведении ледяного покрова под действием импульсной и периодической нагрузки осесимметричного вида при наличии сдвигового потока. В работе [25] решена задача Коши–Пуассона для случая, когда имеются линейный сдвиг скорости по двум направлениям и неравномерное сжатие ледяного покрова.

В настоящей работе приведено решение задачи о поведении плавающего ледяного покрова под действием прямолинейно с постоянной скоростью движущейся нагрузки при наличии течения с линейным сдвигом скорости.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается бесконечный ледяной покров, плывущий на поверхности потока идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины  $H$  с вертикальным сдвигом скорости. Ледяной покров моделируется упругой бесконечной пластиной постоянной толщины. В подвижной декартовой системе координат  $Oxuz$ , связанной с пластиной, с центром  $O$  на верхней границе жидко-

сти, осью  $Ox$ , направленной противоположно основному течению и осью  $Oz$ , направленной вертикально вверх, вектор скорости жидкости можно представить в виде

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = (U(z) + u, v, w), \quad U(z) = \gamma z$$

где  $\gamma$  – константа, основное течение жидкости  $U(z)$  не потенциально, имеет постоянную завихренность,  $u, v, w$  – возмущенные компоненты скорости, малые по сравнению с основным течением. Предполагается, что заданное внешнее давление  $p_0$  равномерно распределено по прямоугольной области шириной  $2b$  и длиной  $2a$ . Область давления движется с постоянной скоростью  $V$  под углом  $\psi$  к оси  $Ox$ . Давление внешней нагрузки равно  $p_0 = gM/(4ab)$ , где  $M$  – масса движущегося тела,  $g$  – ускорение свободного падения. Данная нагрузка моделирует судно на воздушной подушке.

Рассмотрим движение жидкости. Скорость течения жидкости удовлетворяет уравнениям Эйлера и неразрывности

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P/\rho - g\mathbf{i}_z, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$P = -\rho gz + p$$

Здесь  $d/dt$  – полная производная по времени,  $P$  – гидродинамическое давление, которое складывается из гидростатической части и возмущенного гидродинамического давления  $p$ ,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\mathbf{i}_z$  – единичный орт оси  $Oz$ . Прогиб ледяного покрова  $\eta(x, y, t)$  описывается уравнением изгиба тонких упругих пластин Кирхгофа-Лява

$$D\Delta^2\eta + Q\Delta\eta + \rho_0 h d^2\eta/dt^2 = -\rho g\eta + p(x, y, 0, t) - p_0(x, y, t), \quad (1.2)$$

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

где  $D$  – цилиндрическая жесткость пластины,  $E$  – модуль Юнга,  $\rho_0, h$  – плотность и толщина льда,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $Q$  – сжимающие усилия в пластине.

Ставятся граничные условия: условие непротекания на дне

$$w(x, y, -H, t) = 0 \quad (1.3)$$

а на верхней границе жидкости кинематическое условие

$$w(x, y, 0, t) = d\eta/dt \quad (1.4)$$

и динамическое условие (1.2). Условие излучения ставится в следующем виде: перед нагрузкой распространяются только те волны, групповая скорость которых больше скорости нагрузки.

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение строится аналогично работе [21]. Введем безразмерные переменные, параметры и функции по формулам

$$(x', y', z', H', b') = (x, y, z, H, b)/a, \quad t' = t\sqrt{g/a}$$

$$F = \frac{V}{\sqrt{ag}}, \quad S = \gamma\sqrt{a/g}, \quad \beta = \frac{D}{\rho ga^4}, \quad q = \frac{Q}{\rho ga^2}, \quad \chi = \frac{\rho_0 h}{\rho a}$$

$$(U', u', v', w') = (U, u, v, w)/\sqrt{ag}, \quad \eta' = \eta/a, \quad (p', p'_0) = (p, p_0)/(\rho ga)$$

Штрихи далее опускаем. Поскольку мы ищем стационарное решение в системе координат, движущейся вместе с нагрузкой, то в исходной системе координат, связанной с ледяной пластиной, возмущенные скорости движения жидкости имеют вид

$$(u, v, w) = (u(\mathbf{r}_1, z), v(\mathbf{r}_1, z), w(\mathbf{r}_1, z)), \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{F}t$$

$$\mathbf{r} = (x, y), \quad \mathbf{F} = (F \cos \psi, F \sin \psi)$$

В предположении малости возмущенных скоростей по сравнению с основным течением уравнения (1.1) линеаризуются. Применяем преобразование Фурье по переменным  $x, y$ . Известные функции  $u, v, w, \eta, p$  ищем в виде

$$(u, v, w)(\mathbf{r}_1, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})(\mathbf{k}, z) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} d\mathbf{k}_x d\mathbf{k}_y, \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y),$$

$$\eta(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \bar{\eta}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} dk_x dk_y$$

$$p(\mathbf{r}_1, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \bar{p}(\mathbf{k}, z) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} dk_x dk_y$$

Функцию  $p_0(\mathbf{r}_1)$  также представим в виде

$$p_0(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \bar{p}_0(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} dk_x dk_y$$

Тогда из системы уравнений (1.1) получаем

$$\begin{aligned} i(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F})\bar{u} + S\bar{w} &= -ik_x \bar{p} \\ i(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F})\bar{v} &= -ik_y \bar{p} \\ i(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F})\bar{w} &= -\bar{p}_z \\ ik_x \bar{u} + ik_y \bar{v} + \bar{w}_z &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Умножим первое уравнение на  $ik_x$ , второе уравнение на  $ik_y$  и сложим. С помощью четвертого уравнения находим

$$-i(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F}) \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + ik_x S \bar{w} = k^2 \bar{p}, \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \tag{2.2}$$

Дифференцируем по  $z$  и получаем с учетом третьего уравнения

$$i(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F}) \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} - k^2 \bar{w} \right) = 0$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} - k^2 \bar{w} = 0 \tag{2.3}$$

Решение уравнения (2.3) с условием (1.3) на дне записывается в виде

$$\bar{w}(\mathbf{k}, z) = kA(\mathbf{k}) \operatorname{sh}k(z + H)$$

Подставляем это выражение в уравнения (2.1), (2.2) и находим остальные компоненты скорости и давление

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{k}, z) &= iA(\mathbf{k}) \left( k_x \operatorname{ch}k(H + z) + \frac{Sk_y^2 \operatorname{sh}k(z + H)}{k(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F})} \right) \\ \bar{v}(\mathbf{k}, z) &= iA(\mathbf{k}) \left( k_y \operatorname{ch}k(H + z) - \frac{Sk_x k_y \operatorname{sh}k(z + H)}{k(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F})} \right) \\ \bar{p}(\mathbf{k}, z) &= -i(k_x U - \mathbf{k} \cdot \mathbf{F})A(\mathbf{k}) \operatorname{ch}k(H + z) + ik_x SA(\mathbf{k}) \operatorname{sh}k(H + z)/k \end{aligned}$$

Из условия (1.4) следует

$$-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{F} \bar{\eta} = kA(\mathbf{k}) \operatorname{sh}kH$$

Тогда уравнение движения пластины (1.2) записывается в виде

$$[\beta k^4 - qk^2 + 1 - \chi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2 - k_x S(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})/k^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2 \operatorname{cth}kH/k] \bar{\eta} = -\bar{p}_0$$

С помощью обратного преобразования Фурье находим

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{r}_1) &= \frac{-1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \frac{\bar{p}_0(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} k \operatorname{th}kH dk_x dk_y}{[(\beta k^4 - qk^2 + 1 - \chi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2)k - Sk_x(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F}/k)] \operatorname{th}kH - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2} = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi/0}^{\pi} \int_{-\pi/0}^{\pi} \frac{\bar{p}_0(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1} k^2 \operatorname{th}kH dk d\alpha}{[(\beta k^4 - qk^2 + 1 - \chi(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2)k - S \cos \alpha(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})] \operatorname{th}kH - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})^2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

где  $(k, \alpha)$  – полярные координаты в  $k$ -плоскости.

Для того, чтобы картина волн была стационарна, компонента скорости источника, нормальная к гребню волны, должна быть равна фазовой скорости гребня [1]. В размерных переменных получаем  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})/k = \omega/k$ . Поэтому функция в знаменателе формулы (2.4) представляет собой дисперсионное соотношение изгибно-гравитационных волн в ледяной пластине, вызванных движением нагрузки, при наличии течения со сдвигом скорости, где  $\omega$  заменено на  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})$ .

Теперь удобно перейти в систему координат  $Ox_1y_1z$ , движущуюся вместе с нагрузкой, повернутую относительно исходной системы координат на угол  $\psi$ , с осью  $Ox_1$ , направленной вдоль линии движения, осью  $Oy_1$  – перпендикулярной к ней. В этой системе координат получаем

$$\begin{aligned} \sigma &= \alpha - \psi, \quad \bar{p}_0(\mathbf{k}) = 4p_0 \frac{\sin(k \cos \sigma) \sin(kb \sin \sigma)}{k^2 \cos \sigma \sin \sigma} \\ \eta(x_1, y_1) &= -\frac{p_0}{\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f_1(k, \sigma)}{f(k, \sigma)} e^{ik(x_1 \cos \sigma + y_1 \sin \sigma)} dk d\sigma \\ f(k, \sigma) &= [\beta k^4 - qk^2 + 1 - \chi F^2 F^2 \cos^2 \sigma - SF \cos(\sigma + \psi) \cos \sigma] \text{th} k H - k F^2 \cos^2 \sigma \\ f_1(k, \sigma) &= \frac{\sin(k \cos \sigma) \sin(kb \sin \sigma) \text{th} k H}{k \sin \sigma \cos \sigma} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из полученных ранее результатов в отсутствие течения известно, что существует критическое значение скорости, равное минимальной фазовой скорости изгибно-гравитационных волн. При скорости движения нагрузки, меньшей критической, волны в ледяном покрове не образуются, деформации льда носят локальный характер вблизи области нагрузки. При наличии течения со сдвигом скорости также существует критическая скорость и находится аналогично работе [4]. Преобразуем уравнение  $f(k, \sigma) = 0$  к виду

$$\begin{aligned} [2(\beta k^4 - qk^2 + 1) - \chi F^2 k^2 (1 + \cos 2\sigma) - SF \cos \psi (1 + \cos 2\sigma) + SF \sin \psi \sin 2\sigma] \text{th} k H - \\ - k F^2 (1 + \cos 2\sigma) = G(k, \psi) - \cos 2\sigma [F^2 k (1 + \chi k \text{th} k H) + SF \text{th} k H \cos \psi] + SF \text{th} k H \sin \psi \sin 2\sigma = 0 \quad (2.6) \\ G(k, \psi) = [2(\beta k^4 - qk^2 + 1) - \chi F^2 k^2 - SF \cos \psi] \text{th} k H - F^2 k \end{aligned}$$

Обозначим

$$\varphi = \arcsin \left( \frac{SF \text{th} k H \sin \psi}{B(k, \psi)} \right)$$

$$B(k, \psi) = \sqrt{S^2 F^2 \text{th}^2 k H \sin^2 \psi + (F^2 k (1 + \chi k \text{th} k H) + SF \text{th} k H \cos \psi)^2}$$

Тогда (2.6) можно записать в виде

$$G(k, \psi) - B(k, \psi) \cos(2\sigma + \varphi) = 0$$

Отсюда находим

$$\cos(2\sigma + \varphi) = \frac{G(k, \psi)}{B(k, \psi)} \quad (2.7)$$

Чтобы решение существовало, необходимо, чтобы

$$\left| \frac{G(k, \psi)}{B(k, \psi)} \right| \leq 1$$

Возводим в квадрат, преобразуем и в результате получаем: критическое значение числа Фруда  $F_*$  определяется как минимум функции  $\Phi(k)$

$$\Phi(k) = 2d(k) \frac{\sqrt{S^2 \text{th}^2 k H + 4d(k)d_1(k)\text{th} k H - S \text{th} k H \cos \psi}}{S^2 \text{th}^2 k H \sin^2 \psi + 4d(k)d_1(k)}$$

$$d(k) = \beta k^4 - qk^2 + 1, \quad d_1(k) = k(1 + \chi k \text{th} k H)$$

$$F_* = \Phi(k_*), \quad \Phi'(k_*) = 0$$

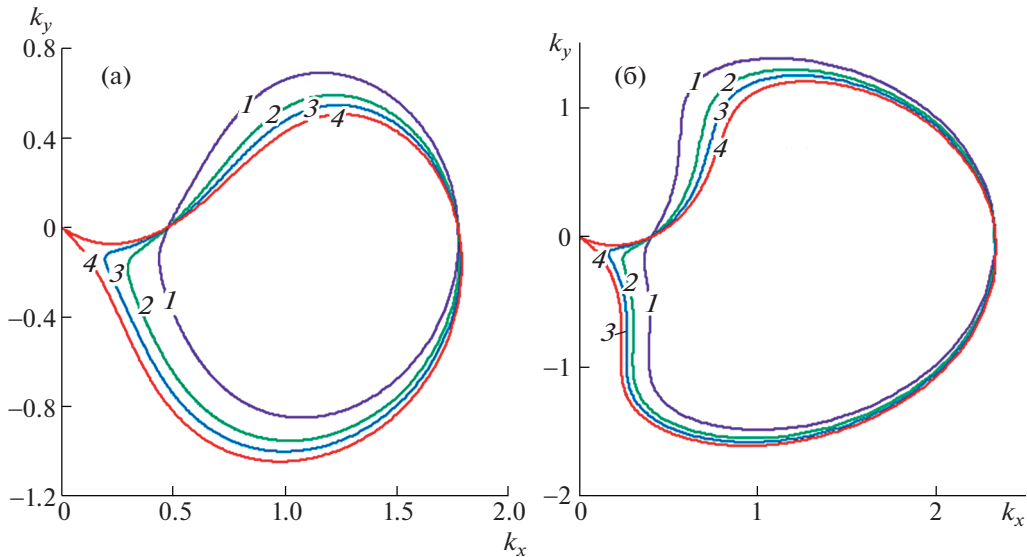


Рис. 1. Кривые волновых чисел  $C_k$  при  $\psi = \pi/2$  в случаях отсутствия сжатия  $\bar{Q} = 0$  (а) и  $\bar{Q} = 1.5$  (б): 1–4 –  $S = 0.3, 0.7, 0.9, 1.1$ .

При  $F > F_*$  функция  $f(k, \sigma)$  имеет нули  $k_1 = k_1(\sigma)$  и  $k_2 = k_2(\sigma)$ ,  $k_1 < k_2$  в некоторых областях значений угла  $\sigma$ . Поэтому при этих значениях угла  $\sigma$  интеграл по  $k$  в выражении (2.5) является интегралом в смысле главного значения. Контур интегрирования деформируется таким образом, чтобы выполнить условие излучения. Известно, что групповая скорость изгибно-гравитационных волн больше их фазовой скорости для коротких волн и меньше для длинных волн. Короткие волны соответствуют упругой ветви дисперсионной кривой, а длинные волны – гравитационной ветви. Поэтому при  $\cos \sigma > 0$  корень  $k_1$  обходится сверху, а корень  $k_2$  – снизу, при  $\cos \sigma < 0$  – наоборот.

Картини гребней изгибно-гравитационных волн в дальнем поле строятся с помощью асимптотических методов аналогично тому, как в случае отсутствия течения [1, 26]. Положения гребней волн в дальнем поле определяются с помощью кривой волновых чисел  $C_k$  в  $k$ -плоскости, удовлетворяющей уравнению  $f(k, \sigma) = 0$ . Кривые  $C_k$  удобно строить с помощью формулы (2.7). Примеры вида кривых  $C_k$  изображены на рис. 1 при  $\psi = \pi/2$ ,  $S = 0.3, 0.7, 0.9, 1.1$ , в случаях отсутствия сжатия  $Q = 0$  (а) и  $Q/\sqrt{\rho g D} = 1.5$  (б).

Стационарная картина волн содержит только те волны, волновые числа которых лежат на кривой  $C_k$ . Из любой точки  $P_0 = (k_0, \sigma_0)$  на  $C_k$  волны излучаются в направлении, нормальном к  $C_k$  и соответствующем возрастанию  $\omega$ . Вертикальное смещение ледяного покрова  $\eta$  в дальнем поле от этой точки выражается формулой

$$\eta(\mathbf{r}_1) \approx -\frac{f_1(k_0, \sigma_0)}{2\pi} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial n} \right)_{P_0} \right]^{-1} \left( \frac{2\pi}{\kappa_0 r_1} \right)^{1/2} e^{i(k_0 r_1 \cos(\sigma_0 - \theta) + \mu)} \quad (2.8)$$

Здесь  $\mathbf{r}_1 = (r_1 \cos \theta, r_1 \sin \theta)$ ;  $\kappa_0$  – величина кривизны кривой  $C_k$  в точке  $P_0$ ;  $\partial/\partial n$  – дифференцирование по нормали к  $C_k$ , соответствующей возрастанию  $\omega$ ;  $\mu = \pi/4$ , если кривая  $C_k$  выпукла в этой точке и  $3\pi/4$  в противном случае. Гребни волн являются линиями постоянной фазы  $k_0 r_1 \cos(\sigma_0 - \theta) = K$ ,  $K$  – константа. Таким образом, каждой точке  $P_0$  на  $C_k$  соответствует точка на волновом гребне с полярными координатами в  $(x_1, y_1)$ -плоскости

$$\left( \frac{K}{k_0 \cos(\sigma_0 - \theta)}, \theta \right)$$

Если кривая волновых чисел  $C_k$  имеет точку перегиба, то соответствующая линия распространения волны  $L$  является каустикой, и линии гребней имеют заострения в точке их пересечения с линией  $L$  [1, 26]. В точке перегиба константа  $K$  меняется скачком, так как меняется сдвиг фазы  $\mu$  в формуле (2.8).

С ростом параметра  $S$  кривая  $C_k$  приближается к началу координат в  $k$ -плоскости. При  $S > S_*$  кривая  $C_k$  проходит через начало координат, где критическое значение параметра  $S_*$  находится из условия

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left| \frac{G(k, \psi)}{B(k, \psi)} \right| - 1 = 0$$

При  $S = S_*$  касательные к верхней и нижней ветвям кривой  $C_k$  при  $k = 0$  совпадают. При  $S > S_*$  касательные к кривой  $C_k$  в начале координат составляют некоторый угол с  $k_x$ -осью. Существует область за нагрузкой, в которой волны не распространяются, так как нет нормалей к кривой  $C_k$  в этих направлениях.

Из формулы (2.8) следует, что амплитуда волн в дальнем поле в общем случае порядка  $O(r^{-1/2})$  и пропорциональна  $\kappa_0^{-1/2}$ . Таким образом, относительно плоские участки кривой  $C_k$  с малой кривизной дают большие амплитуды волн в соответствующих направлениях, поскольку все точки этого участка кривой  $C_k$  излучают волны примерно в одном направлении [1]. Из рис. 1 видно, что в случае  $Q = 0$  такие направления находятся за нагрузкой под некоторым углом к оси  $Ox$ . В случае  $Q/\sqrt{\rho g D} = 1.5$  такие участки дают большие амплитуды в отрицательной части оси  $Ox$ , если  $S < S_*$ . Асимптотика амплитуд изгибно-гравитационных волн в дальнем поле в каустических направлениях дана в работе [1].

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численные расчеты проводились для ледяного покрова при следующих входных параметрах задачи:  $E = 5$  ГПа,  $\rho = 1025$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_0 = 922.5$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 0.3$ ,  $a = 20$  м,  $b = 10$  м, толщина льда  $h = 1$  м, глубина жидкости  $H = 100$  м, скорость движения нагрузки  $V = 20$  м/с. Сжимающие усилия в пластине заданы в виде  $Q = \bar{Q}\sqrt{\rho g D}$ ,  $\bar{Q} = 0$  и 1.5.

На рис. 2 приведены зависимости критических скоростей изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове от направления движения нагрузки при различных значениях параметра сдвига  $S$  и  $\bar{Q} = 0, 1.5$ . Из графиков видно, что минимальные критические скорости достигаются при  $\psi = 0$ , когда нагрузка движется противоположно течению жидкости. Максимальные критические скорости наблюдаются при  $\psi = \pi$ , когда нагрузка движется по течению. При  $\psi = \pi/2$  критическая скорость при любых значениях параметра  $S$  близка к ее значению в отсутствие течения. При увеличении коэффициента сжатия льда критические скорости значительно уменьшаются. Видно, что сдвиг скорости, направление движения и коэффициент сжатия льда оказывают существенное влияние на критические скорости изгибно-гравитационных волн.

На рис. 3а показаны зависимости прогиба ледяного покрова вдоль линии движения нагрузки  $\eta(x_1, 0)$  от координаты  $x_1$  в отсутствие сжатия  $\bar{Q} = 0$  при  $S = 0$ , а также  $S = 0.4$  и  $\psi = 0, \pi$ . При наличии сдвига скорости и  $\psi = 0$  нагрузка движется против течения, при этом волны перед нагрузкой укорачиваются, встречая сопротивление, а волны за нагрузкой удлиняются, что объясняется двумя причинами. С одной стороны, они сносятся потоком. С другой стороны, выполаживание волн за нагрузкой для изгибно-гравитационных волн при увеличении разности между скоростью нагрузки и критической скоростью наблюдается и в отсутствие течения [1]. При  $\psi = \pi$  нагрузка движется по течению, в этом случае волны перед нагрузкой удлиняются, а после нагрузки укорачиваются, амплитуды волн значительно выше, чем в предыдущих случаях, т.к. скорость движения нагрузки ближе к критической скорости.

На рис. 3б приведены зависимости прогиба ледяного покрова на линии движения от координаты  $x_1$  в отсутствие течения  $S = 0$ , при  $\bar{Q} = 0$  и  $\bar{Q} = 1.5$ . Видно, что при увеличении коэффициента сжатия льда прогиб за нагрузкой значительно увеличивается, а перед нагрузкой уменьшается.

На рис. 4 изображены картины гребней изгибно-гравитационных волн при  $\bar{Q} = 0$ ,  $\psi = 0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$  и различных значений параметра сдвига  $S$ . При  $\psi = 0$  изменение картин волновых гребней аналогично тому, как меняются картины гребней при увеличении скорости нагрузки в

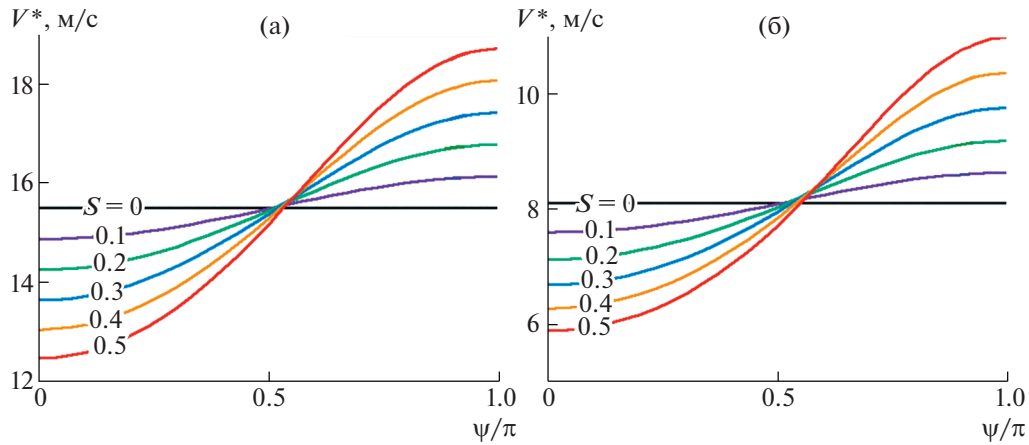


Рис. 2. Критические скорости изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове при  $h = 1$  м и различных значениях параметра сдвига  $S$ : а, б –  $\bar{Q} = 0, 1.5$ .

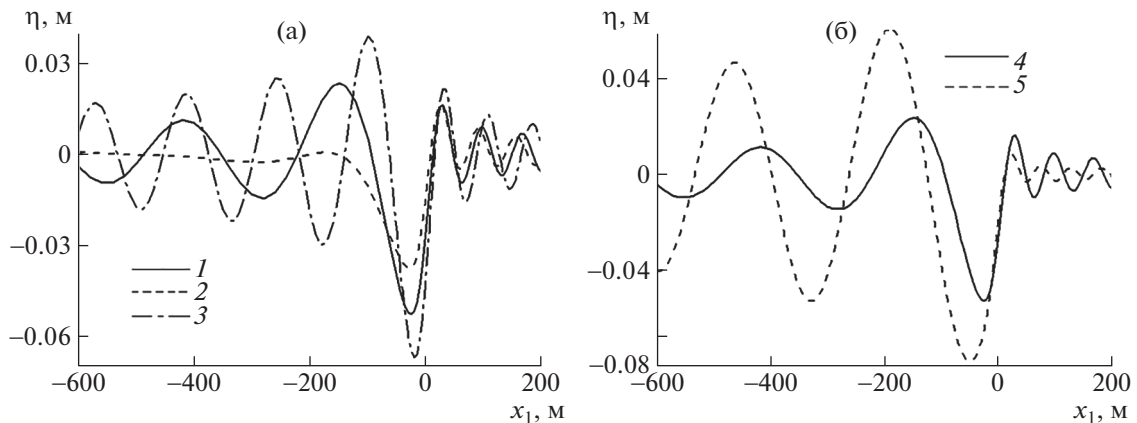


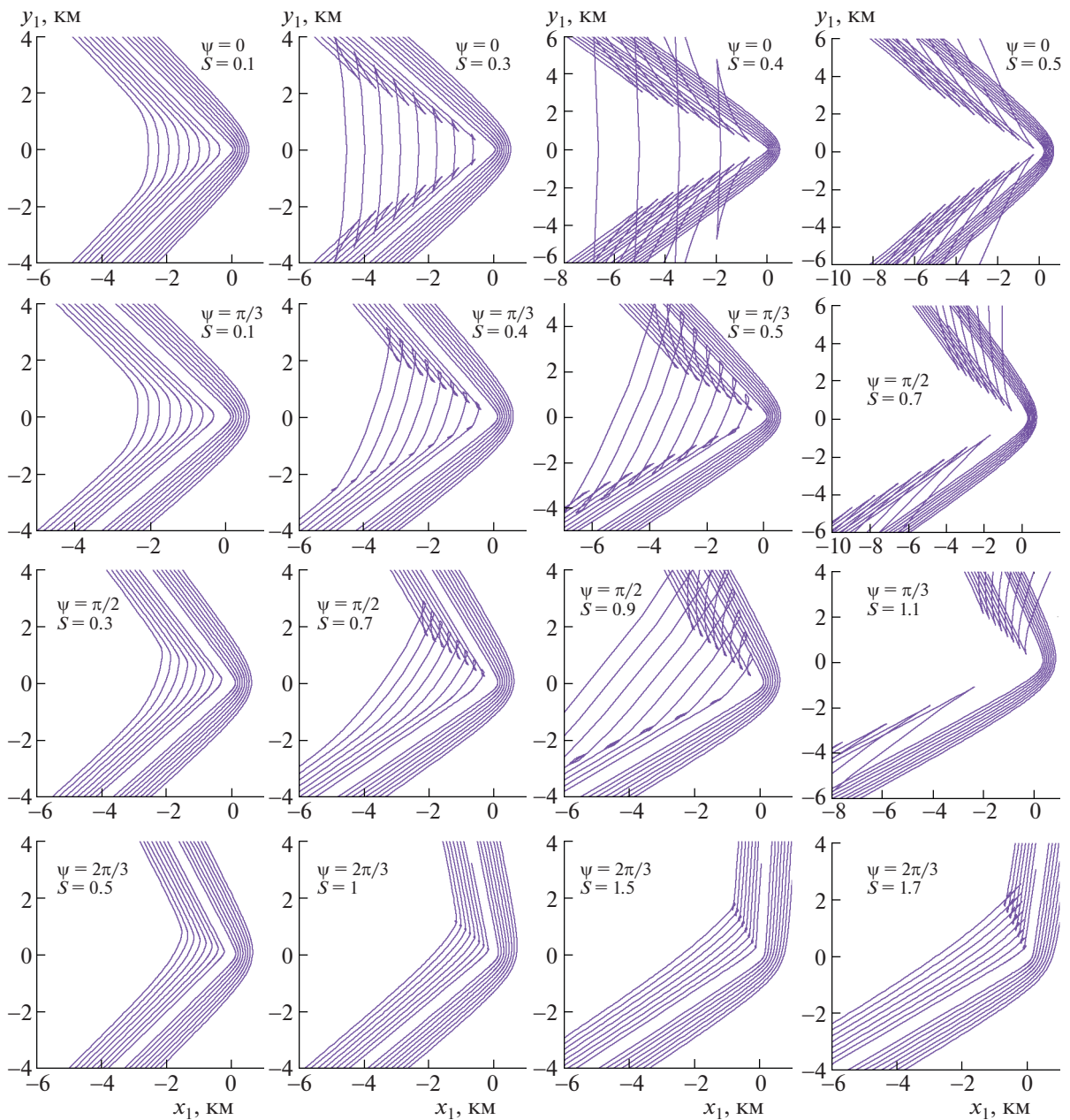
Рис. 3. Зависимость прогиба ледяного покрова от координаты  $x_1$ : (а) –  $\bar{Q} = 0, 1 - S = 0, 2, 3 - (S, \psi) = (0.4, 0), (0.4, \pi)$ ; (б) –  $S = 0, 4, 5 - \bar{Q} = 0, 1.5$ .

отсутствие течения [1]. При увеличении параметра  $S$  волны за нагрузкой становятся длиннее, амплитуда их меньше, появляются каустики и заострения. При  $S > S_*$  кривая  $S_k$  проходит через начало координат, и волн за нагрузкой нет. Этому случаю соответствуют картины волновых гребней в крайнем правом столбце рис. 4 при  $\psi < 2\pi/3$ .

При  $\psi = \pi/6$  картины волновых гребней аналогичны картинам при  $\psi = 0$  при тех же значениях параметра  $S$ , но симметрия слегка нарушена. При дальнейшем увеличении угла  $\psi$  симметрия нарушается еще сильнее. Например при  $\psi = \pi/3, S = 0.4$  и  $\psi = \pi/2, S = 0.7$  заострения наблюдаются только при  $y_1 > 0$ .

При фиксированном значении угла  $\psi \neq 0, \pi$  симметрия сильнее нарушается с ростом параметра  $S$ . С увеличением угла  $\psi$  критическая скорость изгибно-гравитационных волн растет, разница между скоростью нагрузки и критической уменьшается. Поэтому при  $\psi = 2\pi/3$  каустики и заострения линий гребней наблюдаются только при больших значениях параметра  $S$ .

На рис. 5 представлены трехмерные графики прогиба ледяного покрова в ближнем поле при  $\bar{Q} = 0$  и различных значениях угла  $\psi$  и параметра сдвига  $S$ . При  $\psi = 0$  и  $S = 0.4$  (рис. 5а) волны за нагрузкой очень длинные и малой амплитуды, близкой к нулю. При  $\psi = \pi/3$  и  $S = 0.4$  (рис. 5б) волны за нагрузкой длинные, симметрия нарушена. На рис. 5в ( $\psi = \pi/3, S = 0.4$ ) и 5г ( $\psi = 2\pi/3, S = 1$ ) волновое движение ярко выражено во всех областях.

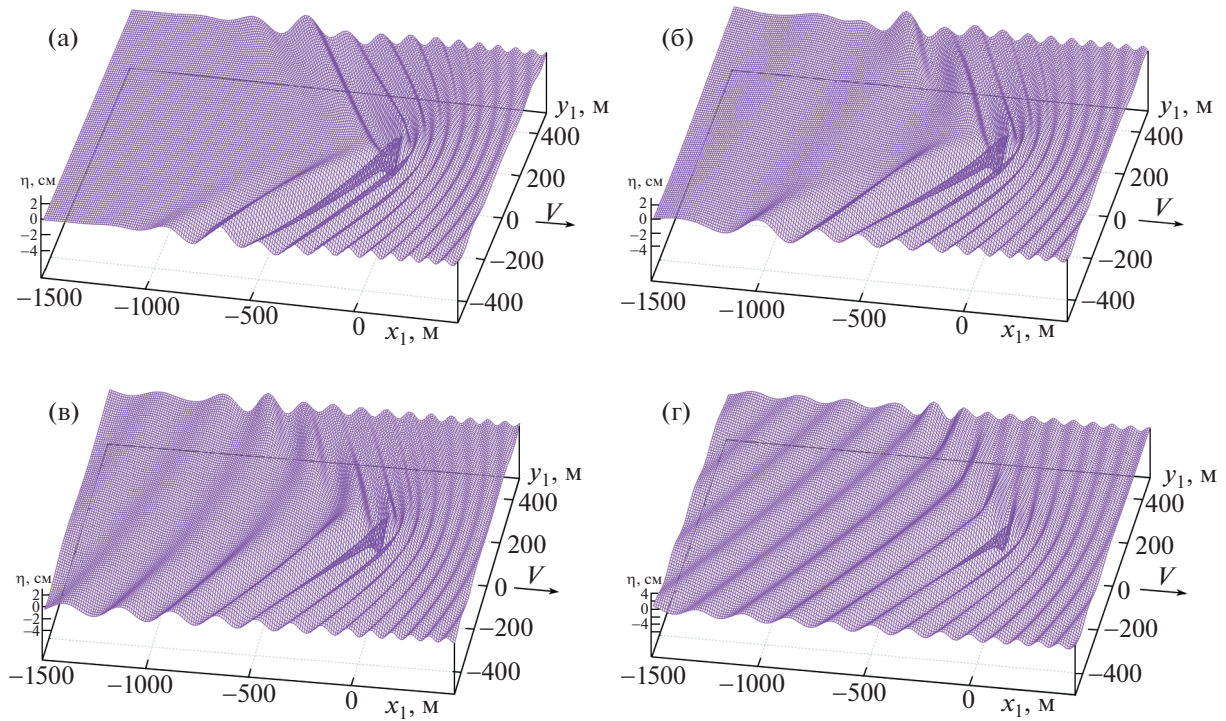


**Рис. 4.** Картины гребней изгибно-гравитационных волн в дальнем поле при  $\bar{Q} = 0$ ,  $\psi = 0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$  и различных значениях параметра  $S$ .

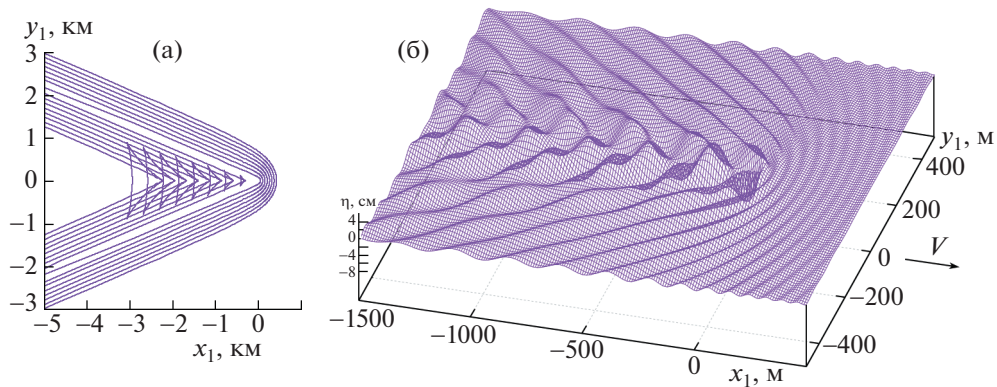
Как указано выше, сжатие льда оказывает сильное влияние на критические скорости изгибно-гравитационных волн, при  $\bar{Q} = 1.5$  они почти в два раза меньше, чем при  $\bar{Q} = 0$ . Скорость на грузки  $V = 20$  м/с значительно выше критических скоростей при  $\bar{Q} = 1.5$ , и гребни изгибно-гравитационных волн имеют заострения и каустики даже для  $S = 0$ . Если скорость на грузки уменьшить, например, до  $V = 12$  м/с, то картины гребней волн в дальнем поле будут похожи на те, что при  $\bar{Q} = 0$ .

Картина волновых гребней в дальнем поле (а) и прогиб ледяного покрова в ближнем поле (б) при  $\bar{Q} = 1.5$ ,  $V = 20$  м/с,  $\psi = 0$ ,  $S = 0.1$  изображены на рис. 6. Трехмерные графики ледяного покрова при  $\bar{Q} = 1.5$ ,  $V = 20$  м/с и различных значениях параметров  $\psi$  и  $S < S_*$  визуально типичны





**Рис. 5.** Вертикальные смещения ледяного покрова при  $\bar{Q} = 0$ : (а–г) –  $(S, \psi) = (0.4, 0), (0.4, \pi/3), (0.4, \pi/2), (1, 2\pi/3)$ .



**Рис. 6.** Картина гребней изгибно-гравитационных волн в дальнем поле (а) и вертикальные смещения ледяного покрова в ближнем поле (б) при  $\bar{Q} = 1.5, \psi = 0, S = 0.1$ .

и похожи на тот, который изображен на рис. 6б. Амплитуды прогиба ледяного покрова значительно выше, чем при отсутствии сжатия.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано влияние сдвига скорости жидкости на стационарные изгибно-гравитационные волны в ледяном покрове при равномерном прямолинейном движении нагрузки под произвольным углом к направлению течения с учетом однородного сжатия льда. Поле скоростей жидкости не потенциально. Показано, что сдвиг скорости, направление движения нагрузки и коэффициент сжатия льда оказывают существенное влияние на критические скорости изгибно-гравитационных волн и прогиб ледяного покрова. Максимальные критические скорости наблюдаются в тех случаях, когда нагрузка движется по течению. При увеличении коэффициента сжатия льда критические скорости значительно уменьшаются.

Если нагрузка движется против течения, то волны перед нагрузкой укорачиваются, встречая сопротивление, а волны за нагрузкой удлиняются. Если нагрузка движется по течению, то волны перед нагрузкой удлиняются, а за нагрузкой укорачиваются, и амплитуды волн значительно выше, чем в предыдущем случае. При увеличении коэффициента сжатия амплитуды прогиба льда значительно увеличиваются за нагрузкой и уменьшаются перед нагрузкой. Увеличение параметра сдвига  $S$  оказывает качественно такое же влияние, как увеличение скорости движения нагрузки. Картины гребней изгибно-гравитационных волн имеют такой же характер, что и в отсутствие течения, но симметрия нарушена при боковом натекании.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davys J.W., Hosking R.I., Sneyd A.D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate // J. Fluid Mech. 1985. V. 158. P. 269–287.
2. Schulkes R.M.S.M., Hosking R.J., Sneyd A.D. Waves due to a steadily moving source on a floating ice plate. Pt 2 // J. Fluid Mech. 1987. V. 180. P. 297–318.
3. Milinazzo F., Shinbrot M., Evans N.W. A mathematical analysis of the steady response of floating ice to the uniform motion of a rectangle load // J. Fluid Mech. 1995. V. 287. P. 173–197.
4. Букатов А.Е., Жарков В.В., Завьялов Д.Д. Трехмерные изгибно-гравитационные волны при неравномерном сжатии // ПМТФ. 1991. № 6. С. 51–57.
5. Жесткая В.Д., Козин В.М. Исследования напряженно-деформированного состояния полубесконечного ледяного покрова под действием движущейся нагрузки // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 112–117.
6. Squire V.A. Moving Loads on Ice Plates / V.A. Squire, R.J. Hosking, A.D. Kerr, et al. Dordrecht: Kluwer, 1996.
7. Yeung R.W., Kim J.W. Effects of a translating load on a floating plate-structural drag and plate deformation // J. Fluids Structures. 2000. V. 14. № 7. P. 993–1011.
8. Nugroho W.S., Wang K., Hosking R.J., Milinazzo F. Time-dependent response of a floating flexible plate to an impulsively started steadily moving load // J. Fluid Mech. 1999. V. 381. P. 337–355.
9. Погорелова А.В., Козин В.М., Матюшина А.А. Исследование напряженно-деформируемого состояния ледяного покрова при взлете и посадке на него самолета // ПМТФ. 2015. Т. 56. № 5. С. 214–221.
10. Букатов А.Е., Мордашев В.И. Влияние продольно сжатой упругой пластинки на развитие волнового возмущения потока однородной жидкости с вертикальным сдвигом скорости // ПМТФ. 1981. № 1. С. 122–129.
11. Суворов А.М. Развитие колебаний ледяного покрова в море при наличии горизонтального течения со сдвигом скорости // Поверхностные и внутренние волны. Севастополь: МГИ АН УССР. 1979. С. 63–69.
12. Суворов А.М., Черкесов Л.В. Нестационарные вынужденные колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности потока жидкости со сдвигом скорости // Прикладная механика. 1980. № 5. С. 102–106.
13. Букатов А.Е. Волны в море с плавающим ледяным покровом. Морской гидрофизический институт РАН. Севастополь. 2017. 357 с.
14. Das S., Kar P., Sahoo T., Meylan M.H. Flexural-gravity wave motion in the presence of shear current: Wave blocking and negative energy waves // Phys. Fluids. 2018. V. 30. 106606. <https://doi.org/10.1063/1.5052228>
15. Стурова И.В. Задача Коши–Пуассона для жидкости под ледяным покровом при наличии сдвигового течения (двумерный случай) // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 1. С. 47–56.
16. Суворов А.М., Тананаев А.Н., Черкесов Л.В. Нестационарные пространственные волны в потоке однородной жидкости со сдвигом скорости. Севастополь: МГИ АН УССР. 1979. С. 14–21.
17. Санников В.Ф. Корабельные волны в однородном море с линейным профилем скорости по глубине // Поверхностные и внутренние волны. Севастополь: МГИ АН УССР. 1979. С. 22–31.
18. Суворов А.М., Черкесов Л.В. Волны от поверхностных возмущений в потоке стратифицированной жидкости со сдвигом скорости // Поверхностные и внутренние волны. Севастополь: МГИ АН УССР. 1979. С. 128–138.
19. Ellingsen S.A. Initial surface disturbance on shear current: The Cauchy-Poisson problem with a twist // Phys. Fluids. 2014. V. 26. 082104.
20. Li Y., Ellingsen S.A. Initial Value Problems for Water Waves in the Presence of a Shear Current // Proc. 25-th Intern. Ocean and Polar Engng Conf. 2015. Kona. Big Island. Hawaii. USA. June 21–26 2015. P. 543–549.
21. Ellingsen S.A. Ship waves in the presence of uniform vorticity // J. Fluid Mech. 2014. V. 742. R2. <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.28>
22. Li Y., Ellingsen S.A. Ship waves on uniform shear current at finite depth: wave resistance and critical velocity // J. Fluid Mech. 2016. V. 791. P. 539–567.
23. Ellingsen S.A. Oblique waves on a vertical sheared current are rotational // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2016. V. 56. P. 156–160.
24. Ткачева Л.А. Начально-краевая задача о поведении ледяного покрова под действием нагрузки при наличии сдвигового потока // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 2. С. 66–76.
25. Стурова И.В. Задача Коши–Пуассона для жидкости со сдвиговым течением и неравномерно сжатым ледяным покровом // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 4. С. 69–76.
26. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Изд-во Мир. 1981.