

УДК 532.526.3

ВЛИЯНИЕ ВЫДУВА И ОТСОСА ГАЗА НА НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

© 2023 г. А. В. Новиков^{a,b,*}, А. О. Образ^{a,b,**}, Д. А. Тимохин^{b,***}

^aЦентральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,
Жуковский, Московская обл., Россия

^bМосковский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Московская обл., Россия

*E-mail: novikov.av@mipt.ru

**E-mail: obraz.ao@mipt.ru

***E-mail: timokhin.da@phystech.edu

Поступила в редакцию 21.09.2022 г.

После доработки 29.09.2022 г.

Принята к публикации 11.10.2022 г.

Представлены результаты исследования устойчивости пограничного слоя на плоской пластине с участком выдува/отсоса газа через стенку по нормали к поверхности при большом сверхзвуковом числе Маха набегающего потока. Численное моделирование ламинарного обтекания пластины с участком распределенного выдува/отсоса фиксированной интенсивности производится с помощью интегрирования уравнений Навье–Стокса. Неустойчивые возмущения в искаженном выдувом/отсосом пограничном слое анализируются в рамках линейной теории устойчивости и метода e^N для течений сжимаемого газа. Рассмотрены высокочастотные возмущения, относящиеся к плоской второй моде пограничного слоя, наиболее неустойчивые при высоких скоростях. Показано, что выдув/отсос газа приводит к немонотонному изменению инкрементов роста возмущений с появлением областей стабилизации/дестабилизации по сравнению со случаем без выдува/отсоса.

Ключевые слова: сверхзвуковые течения, выдув, отсос, линейная теория устойчивости

DOI: 10.31857/S0568528122600588, **EDN:** NTEPQJ

Одним из способов управления устойчивостью пограничного слоя является организация участков выдува/отсоса газа через проницаемую поверхность [1]. В естественных условиях (низкий фон турбулентности в набегающем потоке, отсутствие значительной шероховатости) в плоском дозвуковом пограничном слое доминирующим типом неустойчивостей являются волны Толлмина–Шлихтинга. Известно, что нарастание возмущений данного типа неустойчивостей в пограничном слое эффективно подавляется при помощи отсоса пограничного слоя [2]. Оказывается, что при достаточной интенсивности отсоса можно полностью подавить развитие возмущений типа волн Толлмина–Шлихтинга. При сверхзвуковых скоростях набегающего потока возможно появление новых неустойчивых мод пограничного слоя. Например, для течений с $M > 4$ появляется так называемая вторая мода возмущений (волны Мэка) [3]. С увеличением числа Маха набегающего потока возмущения второй моды могут становиться доминирующим типом неустойчивости пограничного слоя и вызывать ламинарно-турбулентный переход. Возмущения второй моды имеют акустическую природу (иногда такие возмущения называют “запертой акустической волной”). В отличие от возмущений первой моды, которые являются аналогом волн Толлмина–Шлихтинга при сверхзвуковых скоростях течения и связаны с обобщенной точкой перегиба внутри пограничного слоя, волны Мэка не зависят от обобщенной точки перегиба. Кроме того, акустическая природа возмущений второй моды приводит к значительно большей чувствительности инкрементов роста к изменению толщины пограничного слоя.

В настоящее время достаточно подробно изучено влияние таких факторов, как температура стенки, продольный градиент давления, выдув/отсос пограничного слоя на локальные характеристики волн неустойчивостей в сверхзвуковых пограничных слоях. Обзор данных эффектов представлен в работе [4]. Так, охлаждение стенки приводит к стабилизации возмущений первой

моды и дестабилизации возмущений второй моды. Благоприятный ($dp/dx < 0$) градиент давления оказывает стабилизирующее влияние для всех типов возмущения. Отсос пограничного слоя также приводит к уменьшению инкрементов роста.

В работах [5, 6] исследовалось влияние отсоса пограничного слоя на характеристики неустойчивых волн в сверхзвуковых пограничных слоях. Расчеты производились в фиксированной точке (при заданном числе Рейнольдса) и исследовалось влияние отсоса на широкий диапазон частот неустойчивостей. Однако физическое усиление возмущений в пограничном слое имеет интегральный характер, и необходимо оценивать влияние указанных факторов на всем протяжении области неустойчивости для рассматриваемых возмущений. При этом сама область интегрального усиления (кривая нейтральной устойчивости) также может изменяться. В работе [7] при числе Маха $M = 1.8$ численно исследовалась устойчивость пограничного слоя на пластине с небольшим притуплением передней кромки при помощи линейной теории устойчивости и прямого численного моделирования. Производились расчеты при помощи e^N метода. Полученные распределения огибающих N -факторов свидетельствовали о возможном немонотонном влиянии распределенного отсоса на огибающие кривых усиления.

В данной работе проводятся исследования устойчивости для сверхзвукового обтекания плоской пластины при числе Маха $M_\infty = 6.0$ с участком выдува/отсоса различных интенсивностей. В рамках линейной теории устойчивости и метода e^N произведены расчеты инкрементов роста неустойчивых волн второй моды (волн Мэка), а также интегральное усиление возмущений в зависимости от интенсивности отсоса. Показано, что наличие участка выдува/отсоса газа приводит к немонотонному изменению огибающих кривых усиления неустойчивых мод. В частности, существуют режимы выдува газа, приводящие к стабилизации пограничного слоя, что может использоваться для ламинаризации обтекания.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Моделирование ламинарного течения около пластины выполняется путем решения уравнений Навье–Стокса для идеального сжимаемого газа. В настоящей работе рассматривается плоская пластина под нулевыми углами атаки и скольжения. Применяется двумерная формулировка уравнений в консервативной безразмерной форме. Координаты нормируются на характерную длину L^* ; зависимые переменные $\{u, v, T\}$ – на соответствующие значения в набегающем потоке $\{U_\infty^*, T_\infty^*\}$, а давление p – на удвоенный скоростной напор $\rho_\infty^* U_\infty^{*2}$. Здесь и далее верхний индекс * означает размерные величины.

Уравнения Навье–Стокса интегрируются с помощью авторского пакета расчетных программ [8], который реализует неявный метод конечного объема сквозного счета с аппроксимацией второго порядка по пространству и времени. Используется TVD-схема с приближенным решателем задачи распада разрыва методом Роу. Реконструкция зависимых переменных на границах ячеек сетки выполняется с использованием подхода WENO3, который эффективно дает аппроксимацию по пространству конвективных слагаемых третьего порядка.

Характеристики устойчивости пограничного слоя исследуются в рамках линейной теории устойчивости и e^N метода с использованием авторского кода [9]. Рассматривается усиление неустойчивых волн второй моды (моды Мэка), распространяющихся в пограничном слое, полученном при решении уравнений Навье–Стокса. В рамках локально-параллельного приближения рассматриваются возмущения газодинамических величин вида $q(y) \exp(i\alpha x + i\beta z - i\omega t)$. Здесь $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ – комплексное волновое число, получающееся в результате численного интегрирования однородной краевой задачи на собственные значения; $\alpha(\omega, x)$ зависит от круговой частоты волны ω и продольной координаты x как от параметра. В настоящей работе изучаются только плоские волны второй моды Мэка с поперечным волновым числом $\beta = 0$, которые доминируют (имеют наибольшее интегральное усиление) над другими типами неустойчивых мод на рассматриваемом режиме течения [10]. Если $\alpha_i < 0$, то амплитуда волны растет вниз по потоку с инкрементом $\sigma(\omega, x) = -\alpha_i$, а ее интегральное усиление характеризуется N -фактором $N(\omega; x) =$

$$= \int_{x_0(\omega)}^x \sigma(\omega, x) dx$$
, где x_0 – точка потери устойчивости, лежащая на нижней ветви нейтральной кривой.

Выдув/отсос пограничного слоя через стенку моделируется на конечном участке, а интенсивность задается коэффициентом отсоса $c_q(x) = \rho_w v_w \sqrt{2\text{Re}_{\infty,x}}$, где $\text{Re}_{\infty,x} = x\text{Re}_{\infty,L}$. В данной работе в качестве масштаба длины используется величина $L = 1$ м (в этом случае размерная длина пластины и длина расчетной области также равны 1 м). Положительные значения коэффициента c_q соответствуют выдуву газа по нормали от стенки внутрь пограничного слоя, отрицательные значения соответствуют отсосу газа из пограничного слоя внутрь стенки. Выдув/отсос газа задается в области $x_{s1} \leq x \leq x_{s2}$, $x_{s1} = 0.26$, $x_{s2} = 0.8$, что соответствует положению профилированного участка на модели волнообразной пластины в экспериментах [10] (параметры течения в данной работе согласуются с условиями в аэродинамической трубе [10], так как в будущем планируется произвести эксперименты, подтверждающие результаты расчетов настоящей работы). Выход на постоянное значение коэффициента c_q происходит плавно в достаточно узких областях $0.26 \leq x \leq 0.3$ и $0.76 \leq x \leq 0.8$ по формуле $c_q = c_q^{\max} \cos(\pi|x - x_0|/D)$, где $D = 0.04$ – протяженность переходных областей, $x_0 = \{0.26; 0.76\}$. Расчеты производятся для случаев постоянного коэффициента отсоса $c_q = \text{const} = \{0.0, \pm 0.4, \pm 0.8\}$. Отметим, что фиксированное значение c_q сохраняет автосходимость профилей среднего течения [10]. В данной работе производились расчеты для чисел Рейнольдса по длине пластины $\text{Re} = 2.1 \times 10^7$. Для выбранного режима течения реализуются характерные N -факторы $N \approx 10$, что соответствует критическим значениям для начала ламинарно-турбулентного перехода в естественных условиях полета в атмосфере [4].

Рассматривается сверхзвуковое обтекание острой плоской пластины под нулевыми углами атаки и скольжения при числе Маха набегающего потока $M_\infty = 6$, показателе адиабаты $\gamma = 1.4$, постоянном числе Прандтля $\text{Pr} = 0.72$ и статической температуре набегающего потока $T_\infty^* = 43.14$ К. Поверхность пластины изотермическая с температурой $T_w^* = 293$ К ($T_w = 6.79$). Эти параметры потока относятся к экспериментам по исследованию устойчивости пограничного слоя над волнообразной пластиной [10] в аэродинамической трубе Транзит-М ИТПМ СО РАН.

Расчетная область представляет собой прямоугольник размерами $[0, 1] \times [0, 0.21]$ с ортогональной структурированной многоблочной сеткой из 3001×401 узлов в направлении вдоль пластины и по нормали к стенке. При этом в срединном сечении пластины на пограничный слой приходится около 240 узлов, по вертикали в пограничном слое шаг сетки является равномерным. Данная сетка является достаточно подробной и будет использоваться в дальнейшем для расчетов развития возмущений методом прямого численного моделирования. Отметим, что сходимость по сетке ламинарного поля течения достигается при значительно меньших сеточных разрешениях (максимальная разность в профиле скорости на сетках 400×300 и 800×400 узлов не превосходит 0.1%). Граничные условия задаются следующие: условие прилипания – на обтекаемой поверхности вне области выдува/отсоса; условие набегающего потока – на входной и верхней границах; линейная экстраполяция изнутри области для зависимых переменных – на выходной границе; в области выдува/отсоса на стенке граничное условие для вертикальной компоненты скорости модифицируется при помощи задания массового потока газа $[\rho v]_w(x) = c_q / \sqrt{2\text{Re}_{\infty,x}}$.

Исследование проводится в два этапа. Сначала с помощью метода установления вычисляется поле стационарного ламинарного обтекания пластины для различных интенсивностей выдува/отсоса. Затем из полученного двумерного стационарного поля извлекаются профили пограничного слоя в различных сечениях по x и решается задача линейной теории устойчивости. В результате для наиболее неустойчивых волн рассчитываются распределения инкрементов роста $\sigma(x)$ и коэффициенты интегрального усиления (N -факторы).

РАСЧЕТ ЛАМИНАРНЫХ ПОЛЕЙ ТЕЧЕНИЯ

Результаты моделирования стационарного обтекания пластины в рамках уравнений Навье–Стокса при различных интенсивностях отсоса показаны на рис. 1. Представлены поля продольной скорости u в пристенной области, причем для наглядности вертикальная координата y растянута в 10 раз, а начало и конец участка отсоса отмечены пунктирными линиями. Также показаны профили скорости u и статической температуры T в среднем сечении при $x = 0.5$. Видно, что выдув/отсос газа достаточно сильно изменяет толщину пограничного слоя, но при этом форма профилей остается подобной случаю без отсоса.

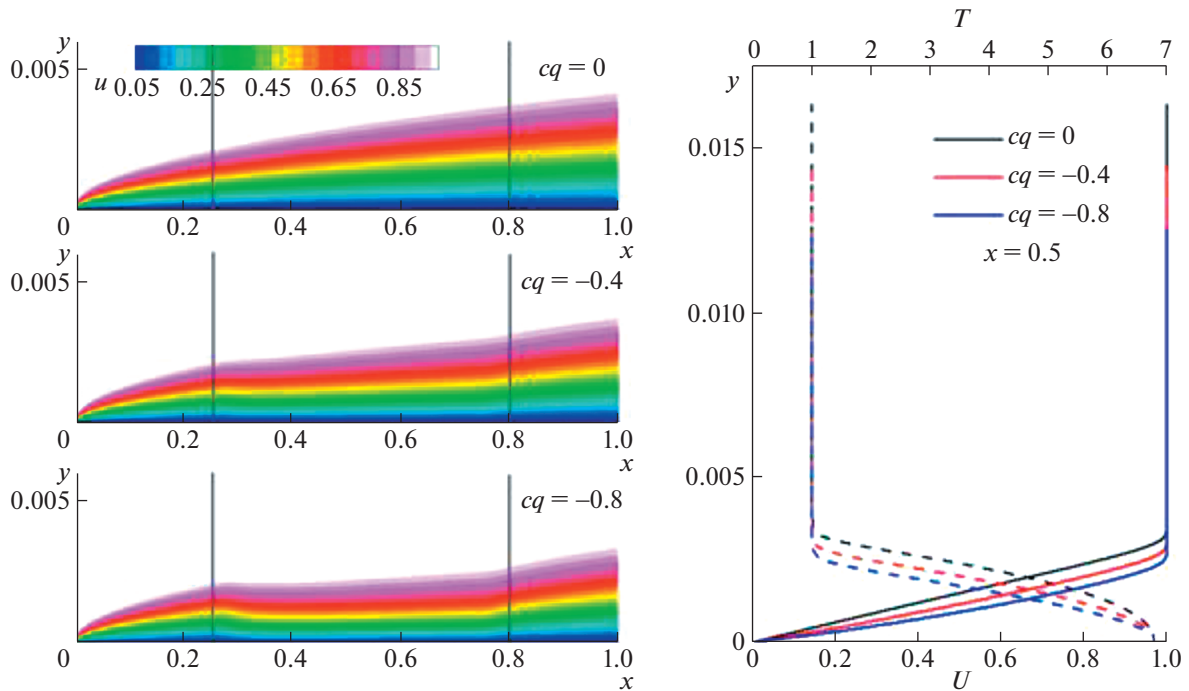


Рис. 1. Поля продольной скорости u (слева) и профили пограничного слоя в сечении $x = 0.5$ (справа) при различных интенсивностях отсоса.

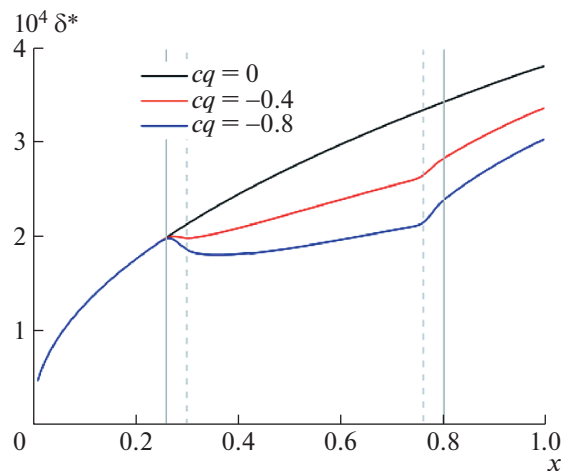


Рис. 2. Толщина вытеснения для случаев $c_q = \{0.0, -0.4, -0.8\}$.

РАСЧЕТЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ОТСОСА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Производились расчеты ламинарного обтекания пластины с участком отсоса пограничного слоя интенсивностью $c_q = \{0.0; -0.4; -0.8\}$. На рис. 2 представлено влияние отсоса газа на толщину вытеснения пограничного слоя.

На основе профилей пограничного слоя вычисляется нейтральная кривая устойчивости — в каждом сечении по x определяется диапазон частот наиболее неустойчивых волн. Для различных фиксированных частот ω из этого диапазона при каждом x вычисляются инкременты роста волн $\sigma(\omega, x)$, а затем интегральные усиления $N(\omega, x)$. Пример получаемых кривых для волны с частотой $\nu^* = \frac{\omega^*}{2\pi} = 110$ кГц показан на рис. 3. Видно, что вблизи начала участка отсоса инкре-

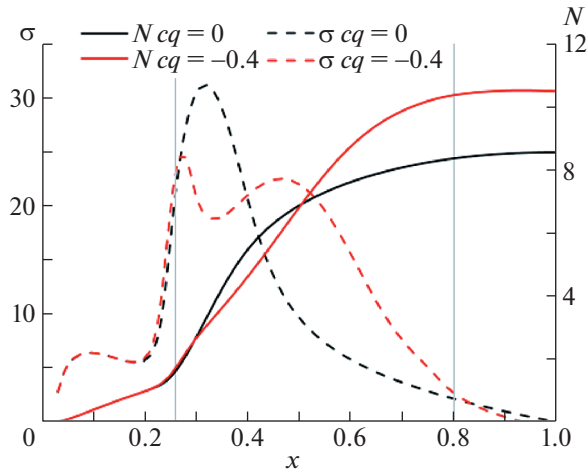


Рис. 3. Распределение инкрементов роста σ и интегрального усиления (N-фактора) неустойчивой волны второй моды с частотой $\omega = 296.8$ при распространении над пластиной без отсоса ($c_q = 0.0$) и над участком с коэффициентом отсоса $c_q = -0.4$. Вертикальные линии отмечают начало и конец участка с отсосом.

мент $\sigma(\omega_1; x)$ резко падает по сравнению со случаем без отсоса (рис. 3, пунктирные линии), т.е. локально проявляется известный эффект стабилизации пограничного слоя. Однако инкремент остается положительным $\sigma_{c_q} > 0$, и над участком отсоса рост волны продолжается, причем по сравнению с пластиной без отсоса область нарастания оказывается более протяженной.

Такое поведение инкремента роста $\sigma_{c_q}(\omega_1; x)$ волны фиксированной частоты объясняется изменением толщины $\delta(x)$ пограничного слоя над участком отсоса. Известно, что наиболее неустойчивая волна второй моды имеет длину волны $\lambda_*(x) \approx 2\delta(x)$. Ее частота — $\omega_* = 2\pi u_c / \lambda_* \approx \pi u_e / \delta$, где $u_c \approx 0.9u_e$ — типичная фазовая скорость возмущений второй моды. Она связана со скоростью на границе пограничного слоя u_e . Тогда, если зафиксировать частоту волны ω_1 , то при некоторой толщине пограничного слоя δ_* будет наблюдаться максимальный инкремент σ_* , а при отстройке толщины $\delta \neq \delta_*$ инкремент будет падать. В случае отсоса пограничного слоя через стенку скорость u_e практически не меняется. При этом происходит существенное изменение толщины $\delta_{c_q} < \delta_{c_q=0}$ (см. профили на рис. 1), поэтому у волны фиксированной частоты ω_1 отстраивается инкремент роста $\sigma_{c_q}(\omega_1; x) \neq \sigma_{c_q=0}(\omega_1; x)$. Из рис. 3 видно, что в положениях по x в окрестности верхней ветви кривой нейтральной устойчивости возможно $\sigma_{c_q}(\omega_1) > \sigma_{c_q=0}(\omega_1; x)$ в зависимости от соотношения λ_1 и $2\delta_{c_q}(x)$.

Таким образом, для волны фиксированной частоты имеются два разнонаправленных влияния отсоса газа из пограничного слоя на интегральное усиление: с одной стороны, уменьшение инкрементов роста в окрестности максимума, с другой стороны, расширение области неустойчивости за счет подстройки частоты возмущения под изменившуюся толщину пограничного слоя.

Семейство кривых интегрального усиления для всех рассмотренных частот неустойчивых волн второй моды показано на рис. 4 (для случая максимальной интенсивности отсоса представлены также кривые усиления для волн фиксированной частоты). Видно, что в области действия отсоса происходит смещение огибающей N-факторов в сторону больших значений, а эффект стабилизации наблюдается в области $x > 1$. При этом, если выбрать в качестве критерия начала ламинарно-турбулентного перехода $N_{cr} = 10$, можно ожидать смещение положения перехода от $x_{tr} = 0.9$ для случая без отсоса до $x_{tr} = 0.52$ для отсоса максимальной интенсивности. Данный результат можно назвать аномальным с той точки зрения, что до настоящего времени принято было считать, опираясь в основном на данные для дозвуковых пограничных слоев, что отсос пограничного газа приводит к равномерной стабилизации.

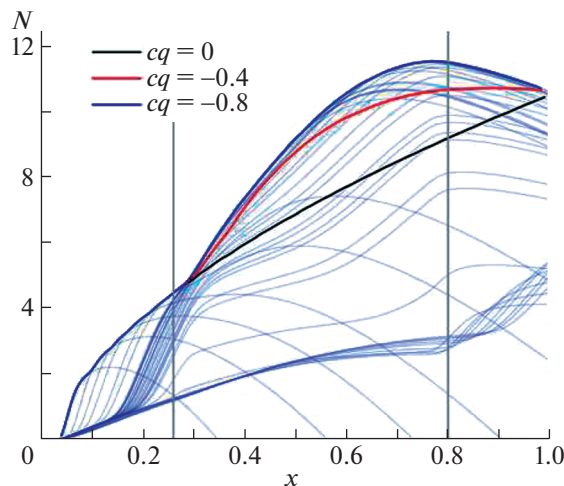


Рис. 4. Кривые интегрального усиления (N -факторы) для всех рассмотренных неустойчивых волн над пластиной с отсосом различных интенсивностей $c_q = 0.0, 0.4, 0.8$. Вертикальные линии отмечают начало и конец участка отсоса.

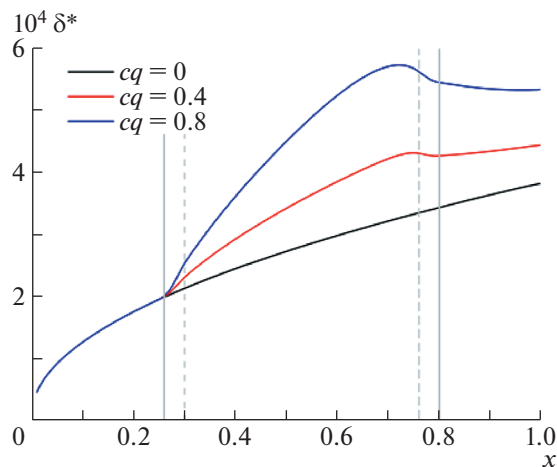


Рис. 5. Толщина вытеснения для случаев $c_q = \{0.0, 0.4, 0.8\}$.

РАСЧЕТЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ВЫДУВА ГАЗА В ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Производились расчеты ламинарного обтекания пластины с участком отсоса пограничного слоя интенсивностью $c_q = \{0.0; 0.4; 0.8\}$. На рис. 5 представлено влияние выдува газа на толщину вытеснения пограничного слоя.

Основной физической механизм изменения инкрементов роста волн неустойчивостей пограничного слоя при наличии выдува в пограничный слой аналогичен рассмотренному выше механизму подстройки неустойчивых возмущений под изменяющуюся толщину пограничного слоя. Данный факт более подробно иллюстрирует рис. 6, на котором представлено сравнение инкрементов роста возмущения фиксированной частоты $\nu^* = 115$ кГц для случая без выдува и с выдувом интенсивностью $c_q = 0.4$. Видно, что для относительно высокочастотных возмущений из-за увеличения толщины пограничного слоя происходит сужение области усиления, хотя и наблюдается некоторое увеличение максимума инкрементов роста. В итоге для высокочастотной части спектра неустойчивых возмущений наблюдается стабилизация пограничного слоя, тогда как для низкочастотной части спектра происходит дестабилизация пограничного слоя в области вниз по потоку от точки окончания действия выдува газа в пограничный слой.

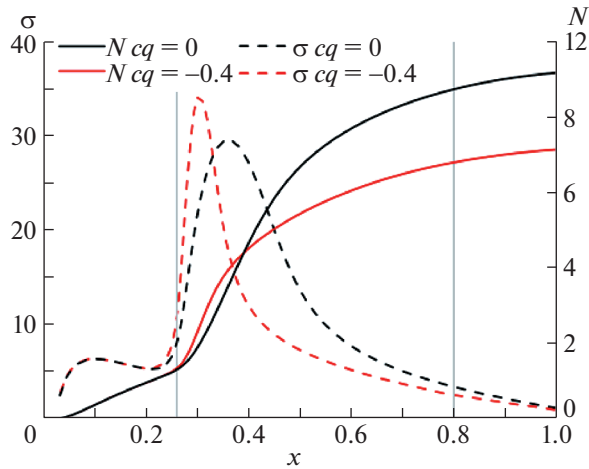


Рис. 6. Распределение инкрементов роста σ и интегрального усиления (N -фактора) неустойчивой волны второй моды с частотой $\nu^* = 115$ кГц при распространении над пластиной без отсоса ($c_q = 0.0$) и над участком с коэффициентом выдува $c_q = 0.4$. Вертикальные линии отмечают начало и конец участка с выдувом.

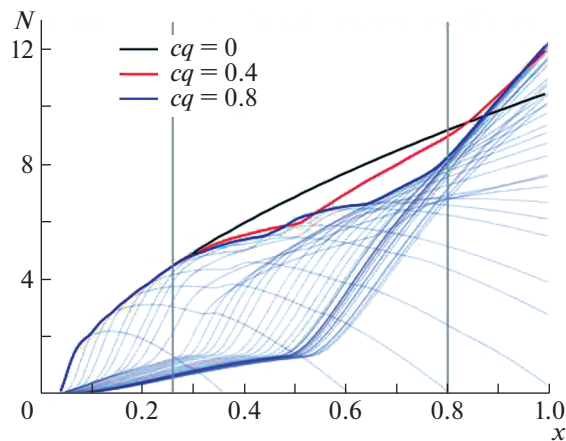


Рис. 7. Кривые интегрального усиления (N -факторы) для всех рассмотренных неустойчивых волн над пластиной с выдувом различных интенсивностей $c_q = 0.0, 0.4, 0.8$. Вертикальные линии отмечают начало и конец участка выдува.

Данный эффект иллюстрирует рис. 7, где представлены огибающие N -факторов для всех рассмотренных случаев выдува (для случая максимальной интенсивности выдува также представлены кривые усиления для фиксированных частот возмущений). Видно, что в области действия выдува огибающие N -факторов уменьшаются по сравнению со случаем без выдува, но вниз по потоку от точки окончания действия выдува наблюдается достаточно интенсивная дестабилизация пограничного слоя. Интересно отметить, что при выборе критического значения N -фактора $N_{cr} = 10$, точка начала ламинарно-турбулентного перехода практически не изменяется по мере увеличения интенсивности выдува. Для меньших значений N -фактора наблюдается затягивание ламинарно-турбулентного перехода по мере увеличения интенсивности выдува, что может быть использовано для практических приложений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнены исследования устойчивости пограничного слоя над плоской пластиной с участком выдува/отсоса газа через стенку при обтекании сверхзвуковым потоком $M_\infty = 6$. В рамках локально-параллельного приближения линейной теории устойчивости и e^N метода рассчитаны

инкременты нарастания и интегральные усиления плоских волн различных частот, относящихся ко второй моде Мэка пограничного слоя, которая является доминирующим типом неустойчивости на рассматриваемом режиме.

Показано, что неустойчивости над участком отсоса в широком диапазоне частот усиливаются слабее, чем в случае без отсоса, что распространяет известный эффект стабилизации пограничного слоя с помощью системы отсоса на случай высоких скоростей. Однако для высокочастотной части спектра неустойчивых возмущений отсос пограничного слоя приводит к увеличению области усиления и интегральных факторов роста. Этот аномальный эффект необходимо учитывать при разработке активных систем управления ламинарно-турбулентным переходом для достаточно больших сверхзвуковых скоростей. Для выдува газа в пограничный слой наблюдается обратный эффект – в области действия выдува реализуется стабилизация пограничного слоя, однако вниз по потоку от точки окончания действия выдува наблюдается дестабилизация. В частности, оказывается возможным при помощи выдува газа затягивать положение ламинарно-турбулентного перехода при правильном подборе распределенного выдува. Данный факт может быть полезен при разработке высокоскоростных летательных аппаратов, где выдув газа в пограничный слой реализовать проще, чем отсос горячего газа из пограничного слоя. В данной работе выдуваемый газ имел ту же температуру, что и локальная температура газа. С практической точки зрения представляет интерес расчеты влияния выдува относительно холодного газа в пограничный слой на характеристики устойчивости. Это составляет предмет дальнейших исследований в данной области.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00470).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Joslin R.D.* Overview of Laminar Flow Control // NASA Technical Paper NASA/TP-1998-208705. 1998.
2. *Mack L.M.* On the Inviscid Acoustic-Mode Instability of Supersonic Shear Flows. Part I: Two-Dimensional Waves // AIAA J. V. 27. № 11. November 1989. P. 1487–1493.
3. *Mack L.M.* Boundary-Layer Stability Theory // Special Course on Stability and Transition of laminar Flow/ Ed by R. Michel, AGARD Report. 1984. № 709. P. 3-1 to 3-81.
4. *Kimmel R.L.* Aspects of Hypersonic Boundary-Layer Transition Control // 41st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit 6-9 January 2003, Reno, Nevada, AIAA Paper № 2003-772.
5. *Malik M.R.* Prediction and Control of Transition in Supersonic and Hypersonic Boundary layers // AIAA J. V. 27. № 11. November 1989. P. 1487–1493.
6. *Al-Maaitah A.A., Nayfeh A.H., Masad J.A.* Effect of Suction on the Stability of Supersonic Boundary Layers. Part I – Second-Mode Waves // Journal of Fluids Engineering Dec. 1991. V. 113(4). P. 591–597. <https://doi.org/10.1115/1.2926520>
7. *Balakumar P.* Control of Supersonic Boundary Layers Using Steady Suction // 36th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, Conference Paper 20060022120.
8. *Егоров И.В., Новиков А.В., Фёдоров А.В.* Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода при гиперзвуковых скоростях потока на супер-ЭВМ // ЖВМиМФ. 2017. Т. 57. № 8. С. 1347–1373. <https://doi.org/10.7868/S0044466917080063>
9. *Образ А.О., Фёдоров А.В.* Пакет программ HSFS для анализа устойчивости сжимаемых пограничных слоев. // Уч. зап. ЦАГИ. 2017. Т. XLVIII. № 3. С. 11–28. <https://doi.org/10.1615/TsAGISciJ.2017022797>
10. *Bountin D., Chimitov T., Maslov A., Novikov A., Egorov I., Fedorov A., Utyuzhnikov S.* Stabilization of a hypersonic boundary layer using a wavy surface // AIAA J. 2013. V. 51. № 5. P. 1203–1210. <https://doi.org/10.2514/1.J052044>
11. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 703 с.