

УДК 532.516

## КАСАТЕЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ СДВИГА ПРИ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОУПРУГОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

© 2023 г. К. Наврузов<sup>а</sup>, Ш. Б. Шарипова<sup>а,\*</sup>

<sup>а</sup>Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

\*E-mail: shohistasharipova0@gmail.com

Поступила в редакцию 06.09.2022 г.

После доработки 08.11.2022 г.

Принята к публикации 20.12.2022 г.

Решены задачи о колебательном течении вязкоупругой несжимаемой жидкости в плоском канале при заданном гармоническом колебании расхода жидкости. Определена передаточная функция (амплитудно-фазовой частотной характеристики). С помощью этой функции определено влияние частоты колебаний ускорения и релаксационных свойств жидкости на отношение касательного напряжения сдвига на стенке канала к средней скорости по сечению канала. Показано, что вязкоупругие свойства жидкости, а также ее ускорение являются ограничивающими факторами для использования квазистационарного подхода. Найденные формулы для определения передаточной функции при течении вязкоупругой жидкости в нестационарном потоке позволяют определить диссипации механической энергии в нестационарном потоке среды, имеющие важные значения при расчете регулирования гидро-и пневмосистем.

*Ключевые слова:* вязкоупругая жидкость, нестационарный поток, передаточная функция, колебательное течение, амплитуда, фаза

**DOI:** 10.31857/S1024708422600610, **EDN:** VJZRHK

### ВВЕДЕНИЕ

Исследование колебательного течения вязкой и вязкоупругой жидкости в плоском и прямоугольном канале под действием гармонических колебаний расхода жидкости могут проводиться в биологической механике, в частности для работы системы микроципов [1]. Эти системы предназначены для диагностики работы различных органов человека, а также адресной доставки к ним лекарственных препаратов. Кроме этого, с целью обеспечения постоянного расхода жидкости в медико-биологических установках часто используются пневматические микронасосы с периодическим вытеснением жидкости из свободных объемов [2]. В таких системах экономически выгодной может быть установка с пульсирующим расходом. При транспортировке высоковязкой и тяжелой нефти и нефтепродуктов на большие расстояния и циркуляции буровых растворов в скважине, одной из важных задач является разработка эффективного метода снижения гидравлического сопротивления потоков [3–5]. Используемые во всех перечисленных выше отраслях жидкости, как лекарственных препаратов, так и нефтепродуктов или буровых растворов, обработанные высокомолекулярными полимерами могут быть отнесены к вязкоупругим жидкостям [3–5]. Как известно авторам, в настоящее время практически нет работ о влиянии пульсаций расхода на колебания коэффициентов гидравлического сопротивления и сопротивления трения. Однако эти исследования имеют весьма важное значение для расчета градиента давления и других гидродинамических характеристик, занимающих особое место в проведении некоторых медико-биологических и других технологических исследований [1, 2]. Таким образом, необходимо отметить важную роль исследований касательного напряжения сдвига на стенке при колебательном течении вязкой и вязкоупругой жидкости, вместе с другими параметрами потока.

Наиболее упрощенный подход к теоретическому изучению колебательного потока вязкой жидкости опирается на предположение, что вязкая жидкость – несжимаемая, движется ламинарно в бесконечно длинной цилиндрической трубе круглого сечения под действием, гармонически изменяющимся во времени градиента давления. Пульсирующие течения вязких несжимае-

мых жидкостей в жесткой и упругой трубах исследованы в работах В.С. Громека [6, 7], в них он определил скорости распространения пульсовой волны давления и их затухания. Затем вопросы колебательного течения вязкой жидкости в трубе были исследованы в работе И.Б. Крендала [8], который, решая задачи колебательного течения вязкой жидкости в круглой бесконечной трубе, вывел формулы для профиля скорости, расхода жидкости и импеданса при распространении синусоидальной волны давления. Спустя несколько лет П. Ламбосии [9] опубликовал свои выводы того же профиля скорости и, помимо этого, вычислил вязкое сопротивление. Дж.Р. Уомерсли [10] заново вывел решение П. Ламбосии. Его отличительные качественные результаты заключались в том, что были обнаружены: во-первых, сдвиг фаз между колебаниями давления и средней по сечению скорости и, во-вторых, образование немонотонного распределения профилей скорости.

Впервые влияние наложенных колебаний средней по сечению скорости при ламинарном течении в трубе было изучено в экспериментальной работе [11]. Был получен так называемый “анулярный эффект” Ричардсона при относительно высоких частотах колебаний, возникающий максимум на профиле колеблющейся составляющей продольной скорости в узком пристеночном слое, толщина которого уменьшается с увеличением частоты колебаний. В остальной части трубы жидкость колеблется как целое в соответствии с колебанием средней по сечению скорости. Также проведены эксперименты на трубы внутренним диаметром 40 мм, в которой поршнем создаются гармонические изменения расхода жидкости около нулевого значения [12]. На график нанесены точки, полученные с осциллограмм, на которых с помощью электротермометра записывались местные скорости в различных точках сечения трубы. Из графиков видно, что максимальные значения местных скоростей наблюдаются вблизи стенки. Эти экспериментальные результаты хорошо согласуются с результатами указанного выше исследования. Теоретически задача о ламинарном пульсирующем течении жидкости в трубе была решена в [12]. В работе [13] решение указанной задачи выполнялось аналогично [12], но при условии, что задавалось не гармоническое колебание средней по сечению скорости, а колебание градиента давления. Из аналитического решения уравнения движения для пульсирующего течения следует, что при определенных числах Рейнольдса среднего во времени течения и относительно высоких частотах и амплитудах колебаний существует зона возвратных (реверсивных) течений вблизи стенки, когда местная скорость направлена против среднего потока. Наличие этих зон подтверждено в работе [14] экспериментально с очень хорошим совпадением теории и эксперимента. В работе [15] проведено аналогичное решение задачи о пульсирующем течении в плоском канале и в цилиндрической трубе. Отмечено, что закономерности колебаний гидродинамических величин для течения в плоском канале и в круглой цилиндрической трубе качественно совпадают.

Нестационарные пульсирующие течения вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе бесконечной длины под действием гармонического изменяющего градиента давления исследованы в работе [16]. При помощи решения задачи получены расчетные формулы для распределения скорости и расхода жидкости. Численные расчеты показали, что в пульсирующем потоке при меньших значениях безразмерной частоты колебаний скорость, расход и др. гидродинамические параметры из нулевого начального состояния устанавливаются медленно, сравнительно при больших частотах колебаний и близки к параметрам неппульсирующего потока. В осциллирующем потоке при больших значениях частоты колебаний эти параметры устанавливаются практически мгновенно.

Пульсирующие течения вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольном канале исследованы в работах [17, 18]. Задача решена методом конечных разностей. Определены оптимальные параметры разностной схемы и получены данные по амплитуде и по фазе колебаний продольной скорости, коэффициента гидравлического сопротивления и других параметров течения. При низких частотах колебаний показано, что все гидродинамические параметры колеблются согласно законам средней по сечению скорости. Для прямоугольных каналов с разной формой поперечного сечения (плоской, прямоугольной и круглой цилиндрической) в высокочастотном колебании зависимости гидродинамические величины от безразмерной частоты колебаний имеют одинаковый характер. Также проанализировано влияние соотношения сторон прямоугольного канала на гидродинамику пульсирующего потока. В работе [19] рассматривалось колебательное течение в прямоугольном канале, где две противоположные стенки проницаемые. Как указывается, решение этой задачи может быть полезно при описании течения крови в фибровых мембранах, используемых для искусственных почек. Также авторами было получено аналитическое решение для развитого колеблющегося течения в треугольном [20] и в тороидальном [21] каналах. В работе [21a] исследуется эволюция картины возмущений, наложенных на плоскопа-

раллельное периодическое по времени ньютоновской вязкой жидкости в слое, одна из границ которого совершает продольные гармонические колебания вдоль самой себя, а на другой границе возможно проскальзывание материала с нулевым трением. На основе метода интегральных соотношений, основанного на вариационных неравенствах для квадратичных функционалов и развитого применительно к нестационарным течениям, выводятся достаточные интегральные оценки экспоненциального затухания начальных возмущений.

Практический интерес предоставляет изучение пульсирующего течения вязкоупругой жидкости в плоском канале и в цилиндрической трубе под воздействием гармонических колебаний градиента давления или при наложении на течение гармонических колебаний расхода жидкости. Исследовано движение вязкоупругой жидкости по длинной трубе под действием колебательного градиента давления [22]. Показаны отличительные особенности этого движения по сравнению с соответствующим движением ньютоновской жидкости. Безынерционный колебательный поток вязкоупругой жидкости в круглой бесконечной трубе под действием колебательного градиента давления исследован в работе [23], в которой показано, что в осциллирующем потоке профили продольной скорости симметричны и существует значительный фазовый сдвиг между градиентом давления и скоростью. В пульсирующих потоках фазовый сдвиг фактически отсутствовал, и осевая скорость изменялась несимметрично относительно своего среднего за период колебания. Ламинарные колебательные течения вязкоупругих жидкостей Максвелла и Олдройда-Б были исследованы в работе [24], где демонстрируется много интересных особенностей отсутствующих в потоках ньютоновских жидкостей. Результаты исследования [24] показывают, что в безынерционном режиме,  $Re \ll 1$  свойства течения зависят от трех характерных длин, в частности длины

волны  $\lambda_0$  и длины затухающих вязкоупругих сдвиговых волн  $x_0 = \left(\frac{2\nu}{\omega_0}\right)^{1/2}$ , где  $\nu$  – кинематическая

вязкость;  $\omega_0$  – частота колебания, а также характерный поперечный размер системы  $a$ . В этой связи они соответственно длине разделены на три шкалы и три независимые безразмерные груп-

пы:  $\frac{t_0}{\lambda}$  (вязкость до времени релаксации),  $De$  (время релаксации до периода колебаний) и  $X$  (ко-

эффициент вязкости). Вместе с тем колебательные области течения разделены на две системы, соответствующие “широкой”  $\left(\frac{a}{x_0} > 1\right)$  и “узкой”  $\left(\frac{a}{x_0} < 1\right)$  системы. В широких системах колебания ограничиваются околостеночными течениями, а в центральном ядре невязкой. В узких системах поперечные волны тоже пересекают всю систему и пересекают ее центр, что в конечном итоге приводит к конструктивным резонансам, которые ведут к резкому увеличению амплитуды профиля скорости. Проанализированы нестационарные течения вязкоупругой жидкости на модели Олдройда-Б в круглой бесконечной цилиндрической трубе под действием зависящего от времени градиента давления в следующих случаях: а) градиент давления изменяется со временем в соответствии с экспоненциальными законами; б) градиент давления изменяется по гармоническим законам; в) градиент давления постоянный [25]. Во всех случаях получены формулы для распределения скорости, расхода жидкости и других гидродинамических величин в пульсирующем потоке.

На основе модели Максвелла рассмотрена задача нестационарного колебательного течения вязкоупругой жидкости в круглой цилиндрической трубе [26]. Получены формулы для определения динамических и частотных характеристик. С помощью численных экспериментов изучено влияние частоты колебания и релаксационных свойств жидкости на касательное напряжение сдвига на стенке. Показано, что вязкоупругие свойства жидкости, а также ее ускорение являются ограничивающим факторами для использования квазистационарного подхода.

В последние десятилетия проблема электрокинетических явлений, в том числе электроосмос, потенциал течений, электрофорез и седиментационный потенциал привлекли к себе большое внимание и предоставили множество приложений в микро и наноканалах. В связи с этим в работе [27] исследовано электрокинетическое течение вязкоупругих жидкостей в плоском канале под воздействием колебательного градиента давления. Предполагается, что движение жидкости происходит ламинарно и однонаправленно, в этой связи движение жидкости находится в линейном режиме. Поверхностные потенциалы считаются малыми, поэтому уравнение Пуассона-Больцмана линеаризуется. В течении появляется резонансное поведение, где преобладает упругое свойство жидкости Максвелла. Резонансное явление усиливает электрокинетический эффект, и вместе с тем возрастает эффективность преобразования электрокинетической энергии.

В перечисленных выше работах в основном исследуется поле скоростей жидкости при различных режимах изменения градиента давления. Изменение касательного и нормального напряжения, возникающее при движении колебательного потока, исследовано относительно мало. В большинстве случаев в гидродинамических моделях нестационарных течений жидкости заменялись последовательностью течений с квазистационарным распределением гидродинамических величин. Однако структуры нестационарных течений отличаются от структуры стационарных течений, и в таких случаях такая замена должна быть обоснованной в каждом конкретном случае. В настоящее время вопрос правомерности исследования квазистационарных характеристик для определения поля касательных напряжений в нестационарных течениях вязкой и вязкоупругой жидкостей практически не решен. Естественно, что в таких условиях возникает необходимость использования гидродинамических моделей нестационарных процессов, учитывающих изменение гидродинамических характеристик потока в зависимости от времени.

Следует отметить, что в общем случае гидродинамическая характеристика в трубопроводном транспорте не может быть определена из характеристик, которые соответствуют условиям стационарного потока.

В данной работе исследуется колебательное течение вязкоупругой жидкости на модели Максвелла в плоском канале при наложении на течение гармонических колебаний расхода жидкости. Определяется передаточная функция амплитудно-фазовых частотных характеристик (АФЧХ). С помощью этой функции изучается зависимость нестационарного касательного напряжения сдвига на стенке от безразмерной частоты колебаний, ускорения и релаксационных свойств жидкости.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим задачи медленного колебательного течения вязкоупругой несжимаемой жидкости между двумя неподвижными параллельными плоскостями, простирающимися в обе стороны до бесконечности. Обозначим расстояние между стенками через  $2h$ . Ось  $0x$  проходит горизонтально в середине канала вдоль потока. Ось  $0y$  направлена перпендикулярно к оси  $0x$ . Течение вязкоупругой жидкости происходит симметрично по оси канала. Дифференциальное уравнение движения вязкоупругой несжимаемой жидкости в напряжении имеет следующий вид [28, 30–32]

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (1.1)$$

где  $u$  – продольная скорость;  $p$  – давление;  $\rho$  – плотность;  $\mu$  – динамическая вязкость;  $\tau$  – касательная напряжения;  $t$  – время.

Реологическое уравнение состояния жидкости принимается в виде уравнения Максвелла [29]

$$\left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \tau(y, t) = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.2)$$

Здесь  $\lambda$  – время релаксации. В (1.2) при  $\lambda = 0$  получаем закон вязкого трения Ньютона. Подставляя (1.2) в уравнение движения (1.1) для скорости жидкости, получаем

$$\rho \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial u}{\partial t} = -\left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.3)$$

Считаем, что колебательное течение вязкоупругой жидкости происходит за счет заданного гармонического колебания расхода жидкости или продольной скорости осредненной по сечению канала.

$$Q = a_Q \cos \omega t = \operatorname{Re} a_Q e^{i\omega t}, \quad \langle u \rangle = a_u \cos \omega t = \operatorname{Re} a_u e^{i\omega t},$$

где  $a_Q$  и  $a_u$  – амплитуды расхода жидкости и амплитуды продольной скорости осредненной по сечению канала. В данном случае предполагается, что на стенках канала удовлетворяются условия прилипания, т.е. продольная скорость на стенках канала равна нулю. Тогда граничными условиями будут:

$$\begin{aligned} u &= 0 & \text{при} & \quad y = h \\ u &= 0 & \text{при} & \quad y = -h \end{aligned} \quad (1.4)$$

В силу линейности уравнение (1.1) продольной скорости, давление, касательное напряжение на стенке можно записывать следующим образом

$$u(y, t) = \operatorname{Re} u_1(y) e^{i\omega t}, \quad p(x, t) = \operatorname{Re} p_1(x) e^{i\omega t}, \quad \tau(t) = \operatorname{Re} \tau_1 e^{i\omega t} \quad (1.5)$$

Подставляя выражения (1.5) в уравнение (1.3), получаем

$$\frac{\partial^2 u_1(y)}{\partial y^2} - \frac{\rho i \omega \eta^2(i\omega)}{\mu} u_1(y) = \frac{\eta^2(i\omega)}{\mu} \frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \quad (1.6)$$

Здесь  $\eta^2(i\omega) = (1 + i\omega\lambda)$ .

Фундаментальными решениями уравнения (1.6) без правой части будут функции

$$\cos\left(\frac{i^{3/2}\alpha_0}{h}\eta(i\omega)y\right) \quad \text{и} \quad \sin\left(\frac{i^{3/2}\alpha_0}{h}\eta(i\omega)y\right)$$

а решение неоднородной части имеет постоянные

$$\frac{1}{\rho i \omega} \left( -\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right)$$

Таким образом, общее решение уравнения (1.6) имеет вид

$$u_1(y) = C_1 \cos\left(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\frac{y}{h}\right) + C_2 \sin\left(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\frac{y}{h}\right) + \frac{1}{\rho i \omega} \left( -\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \quad (1.7)$$

Для определения постоянных коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$  в (1.7) используем граничные условия (1.4)

$$\begin{aligned} u_1(h) &= C_1 \cos(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)) + C_2 \sin(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)) + \frac{1}{\rho i \omega} \left( -\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \\ u_1(-h) &= C_1 \cos(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)) - C_2 \sin(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)) + \frac{1}{\rho i \omega} \left( -\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из (1.8) легко найти

$$\begin{aligned} C_2 &= 0 \\ C_1 &= -\frac{1}{\rho i \omega} \left( -\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \frac{1}{\cos(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega))} \end{aligned}$$

В результате этого для определения скорости будем иметь

$$u_1(y) = \frac{1}{\rho i \omega} \left( -\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \left( 1 - \frac{\cos\left(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)\frac{y}{h}\right)}{\cos(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega))} \right) \quad (1.9)$$

где  $\alpha_0 = \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}h$  – колебательное число Уомерсли (безразмерная частота колебаний).

С помощью уравнения

$$\tau_1 = -\frac{\mu}{\eta^2(i\omega)} \frac{\partial u_1(y)}{\partial y} \Big|_{y=h} \quad (1.10)$$

(1.10) находим касательное напряжение сдвига на стенке

$$\tau_1 = -h \left( -\frac{\partial P}{\partial x} \right) \frac{1}{i\alpha_0^2} \left( \frac{i^{3/2}\alpha_0 \sin(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega))}{\eta(i\omega) \cos(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega))} \right) \quad (1.11)$$

Теперь проинтегрирую обе части формулы (1.9) по переменной  $y$  в пределах от  $-h$  до  $h$ , найдем формулы для расхода жидкости

$$Q_1 = 2h \left[ \frac{1}{\rho i \omega} \left( -\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \left( 1 - \frac{\sin(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega))}{(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega)) \cos(i^{3/2}\alpha_0\eta(i\omega))} \right) \right] \quad (1.12)$$

Учитывая формулу (1.12)  $Q_1 = 2h\langle u_1 \rangle$ , находим продольную скорость осредненной по сечению канала

$$\langle u_1 \rangle = \frac{h^2}{\mu i \alpha_0^2} \left( -\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \left( 1 - \frac{\sin(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega))}{(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega)) \cos(i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega))} \right) \quad (1.13)$$

Здесь  $\rho i \omega$  можно записать в виде

$$\rho i \omega = i \frac{\omega}{v} h^2 \cdot \frac{\mu}{h^2} = i \alpha_0^2 \frac{\mu}{h^2}$$

Тогда формула (1.13) с учетом (1.11) приобретает вид

$$\langle u_1 \rangle = -\frac{h}{3\mu} \tau_1 \cdot \frac{3 \left( i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \cos \left( i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \right) - \sin \left( i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \right) \right)}{\left( i^{3/2} \alpha_0 \right)^2 \sin \left( i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \right)} \quad (1.14)$$

Используя формулу (1.14) определяем передаточную функцию  $W_{\tau_1, u_1}(i\omega)$  для касательного напряжения на стенки, как

$$W_{\tau_1, u_1}(i\omega) = \frac{h \tau_1(i\omega)}{3\mu \langle u_1(i\omega) \rangle} \quad (1.15)$$

Из уравнения (1.14), учитывая (1.15), получаем

$$W_{\tau_1, u_1}(i\omega) = \frac{h \tau_1(i\omega)}{3\mu \langle u_1(i\omega) \rangle} = -\frac{\left( i^{3/2} \alpha_0 \right)^2 \sin \left( i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \right)}{3 \left( i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \cos \left( i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \right) - \sin \left( i^{3/2} \alpha_0 \eta(i\omega) \right) \right)} \quad (1.16)$$

Передаточная функция (1.16) иногда называется амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ). Эта функция позволяет определить зависимость касательного напряжения на стенке канала от времени при заданном законе изменения продольной скорости осредненной по сечению канала. Как известно, в большинстве случаев при решениях нестационарных задач используется касательное напряжение на стенке, полученное при квазистационарном режиме течения жидкости. В реальных случаях такие допущения правомерны, когда распределение местных скоростей по сечению потока имеет параболический закон распределения. В этом случае касательное напряжение сдвига на стенке канала колеблется в одной фазе с колебанием осредненной продольной скорости по сечению канала.

В этом случае величину  $\tau_{o, kc}$  можно вычислить по формуле  $\tau_{o, kc} = \frac{3\mu}{h} \langle u_1 \rangle$  и вместо квазистационарного течения касательного напряжения сдвига на стенке  $\tau_{o, kc}$ , можно принять

$$\tau_{o, kc} = \tau_{nc} \quad (1.17)$$

Таким образом, соотношение (1.17) дает возможность поменять величину  $\tau_{nc}$  на значение  $\tau_{o, kc}$ , только при условии, что действительное распределение местных скоростей по сечению потока мало отличается от квазистационарного. Однако во многих случаях в нестационарном потоке закон распределения местных скоростей существенно отличается от квазистационарного. В большинстве работ [9–12, 17, 18, 23, 24] было показано, что при колебательном ламинарном течении в цилиндрической трубе изменение местных скоростей в пристенных слоях опережает во времени изменение местных скоростей в центральных слоях. Колебательный поток из-за изменения закона распределения местных скоростей по сечению канала значения  $\tau_{nc}$  в действительности существенно отличается от  $\tau_{o, kc}$ . В линейной модели нестационарного потока наиболее полное представление о зависимости  $\tau_{nc}$  от  $\langle u_1 \rangle$  можно получить с помощью передаточной функции (1.16).

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И АНАЛИЗОВ

Для определения зависимости касательного напряжения на стенке канала с продольной скорости осредненной по сечению канала в нестационарном потоке используем передаточную функцию (1.16). В связи с этим учитываем закон изменения продольной скорости осредненной по сечению канала

$$\langle u_1 \rangle = a_{u_1} \cos \omega t \quad (2.1)$$

где  $a_{u_1}$  – амплитуда продольной скорости осредненной по сечению канала. Используя формулы (2.1), можно определить зависимость касательного напряжения на стенке между продольной скоростью осредненной по сечению канала. Вследствие использованных для нахождения касательного напряжения на стенке канала линейности уравнений (2.1) его значение также будет гармоническим, но в общем случае содвинутым по фазе по отношению  $\langle u_1 \rangle$ .

Таким образом, изменение касательного напряжения на стенке определяется следующим образом:

$$\tau_1 = a_{\tau_1} \cos(\omega t + \varphi_{\tau_1}) \quad (2.2)$$

где  $a_{\tau_1}$  – амплитуда касательного напряжения на стенке канала  $\varphi_{\tau_1}$  – сдвиг фазы между величиной  $\tau_1$  и  $\langle u_1 \rangle$

Используя соотношение

$$\cos(\omega t + \varphi_{\tau_1}) = \cos \omega t \cos \varphi_{\tau_1} - \sin \omega t \sin \varphi_{\tau_1}$$

и учитывая, что

$$\frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial t} = -a_{u_1} \omega \sin \omega t$$

приведем уравнение (2.2) к виду

$$\tau_1 = \left( \frac{a_{\tau_1} \cos \varphi_{\tau_1}}{a_{u_1}} \right) \langle u_1 \rangle + \left( \frac{a_{\tau_1} \sin \varphi_{\tau_1}}{a_{u_1}} \right) \frac{1}{\omega} \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial t} \quad (2.3)$$

Величины  $\left( \frac{a_{\tau_1} \cos \varphi_{\tau_1}}{a_{u_1}} \right)$  и  $\frac{a_{\tau_1} \sin \varphi_{\tau_1}}{a_{u_1}}$  соответствуют действительной и мнимой частями передаточной функции (1.16), поэтому из (1.16) получаем

$$W_{\tau_1, u_1} = -\frac{1}{3} \left( \frac{-i \alpha_0^2 \sin(i^{3/2} \alpha_0 (1 + i De \alpha_0^2)^{1/2})}{i^{3/2} \alpha_0 (1 + i De \alpha_0^2)^{1/2} \cos(i^{3/2} \alpha_0 (1 + i De \alpha_0^2)^{1/2}) - \sin(i^{3/2} \alpha_0 (1 + i De \alpha_0^2)^{1/2})} \right) = \chi + \beta i \quad (2.4)$$

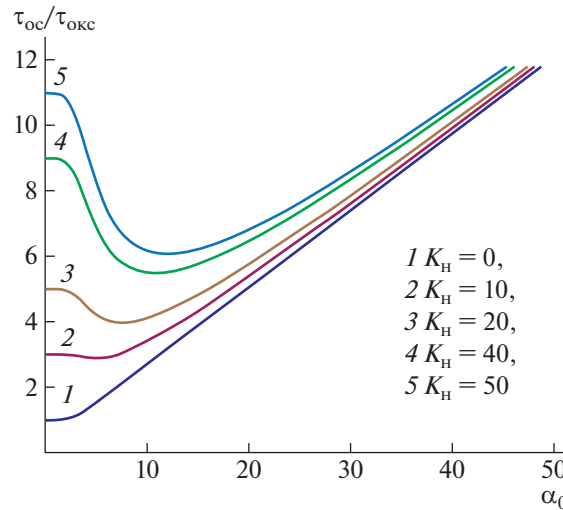
Здесь  $De = \frac{\nu \lambda}{h^2}$  – упругое число Деборы характеризует упругие свойства жидкости;  $\chi = \left( \frac{a_{\tau_1} \cos \varphi_{\tau_1}}{a_{u_1}} \right)$ ,  $\beta = \frac{a_{\tau_1} \sin \varphi_{\tau_1}}{a_{u_1}}$ .

Тогда (2.3) формула принимает вид

$$\frac{h}{3\mu} \frac{\tau_1}{\langle u_1 \rangle} = W_{\tau_1, u_1} = \chi + \beta \frac{1}{\omega} K_n \quad (2.5)$$

Здесь  $K_n = \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\langle u_1 \rangle \partial t}$  – параметр характеризует ускорения жидкости;  $\chi$  и  $\beta$  – безразмерные величины,  $t$  размерные величины, поэтому ее нужно преобразовать к безразмерному виду, с помощью преобразования

$$t = \frac{h^2 \rho}{3\mu} t^* \quad (2.6)$$



**Рис. 1.** Изменение отношения нестационарного касательного напряжения на стенке к квазистационарному касательному напряжению в зависимости от безразмерной частоты колебаний при различных значениях параметра ускорения жидкости  $K_H$ .

Учитывая (1.17), (2.4) и (2.6) на (2.5), получим расчетные формулы

$$\frac{\tau_{нс}}{\tau_{окс}} = \chi + \frac{3\beta}{\alpha_0^2} K_H \quad (2.7)$$

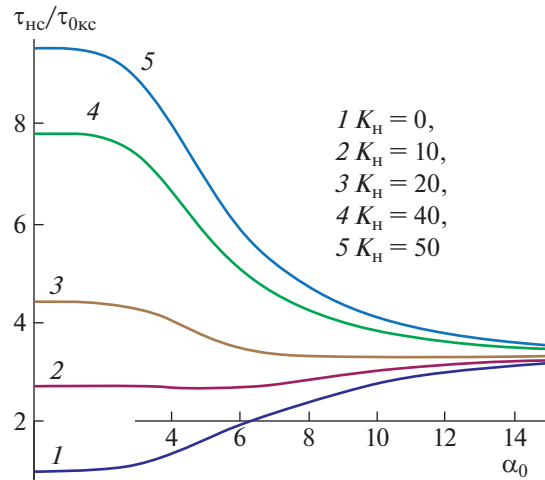
Здесь  $\tau_{окс} = \frac{3\mu}{h} \langle u_1 \rangle$  и  $\tau_1 = \tau_{нс}$ .

С помощью формулы (2.7) построены графики на рис. 1, показывающие изменение относительного касательного напряжения на стенке в нестационарном потоке в зависимости от безразмерной частоты колебаний, когда число Дебори равняется нулю. Построенные графики на рис. 1 показывают, что  $K_H = 0$  отношение  $\frac{\tau_{нс}}{\tau_{окс}}$  близко к единице, пока  $\alpha_0$  меньше чем единица. Если  $\alpha_0$

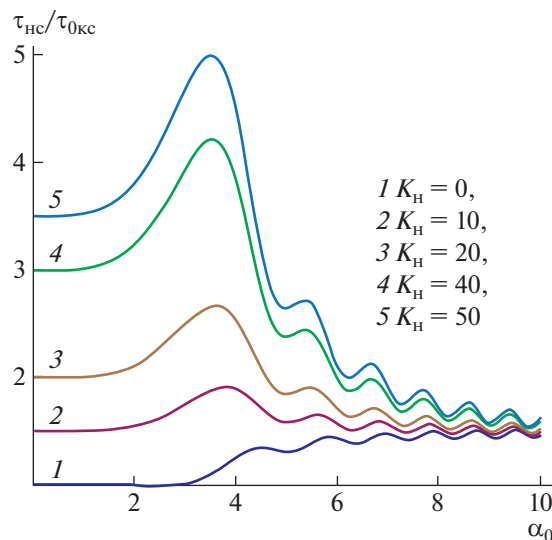
принимает большие значения, чем единица, то даже  $K_H = 0$  отношение  $\frac{\tau_{нс}}{\tau_{окс}}$  становится больше единицы и возрастает с увеличением безразмерной частоты колебаний. Это говорит о том, что касательные напряжения на стенке канала при неустановившемся течении жидкости могут превосходить свои квазистационарные значения даже в те моменты времени, когда ускорение жидкости равно нулю. Отношение  $\frac{\tau_{нс}}{\tau_{окс}}$  увеличивается с увеличением параметра  $K_H$ , что объясняется изменением касательного напряжения на стенке, происходит с опережением по фазе по сравнению средней по сечению скорости.

При течении вязкоупругой жидкости в плоском канале наблюдается существенное изменение касательного напряжения на стенке в низких частотах колебаний в зависимости от упругого числа Дебори. В работе [24] было исследовано колебательное течение вязкоупругой жидкости в плоском канале и в цилиндрической трубе, где область течения разделена на два класса, из которых  $\alpha_0 > 1$  относится к “широкому” классу, а другая  $\alpha_0 < 1$  к “узкому”. В “широких” классах колебательное течение жидкости ограничивается околостеночным течением, а в центральной части невязкой. В “узких” системах поперечные волны пересекают всю область потока, что в конечном итоге приводит к резкому увеличению амплитуды профиля скорости и других гидродинамических параметров, таких как касательное напряжение сдвига на стенке, расход жидкости в зависимости от упругого числа Дебори. На основе формулы (2.7) построены графики в рис. 2, 3 и 4; показывающие изменение касательного напряжения при колебательном потоке вязкоупругой жидкости в плоском канале в зависимости от частоты колебаний и числа Дебори соответственно  $De = 0.01; 0.05; 0.1$ .



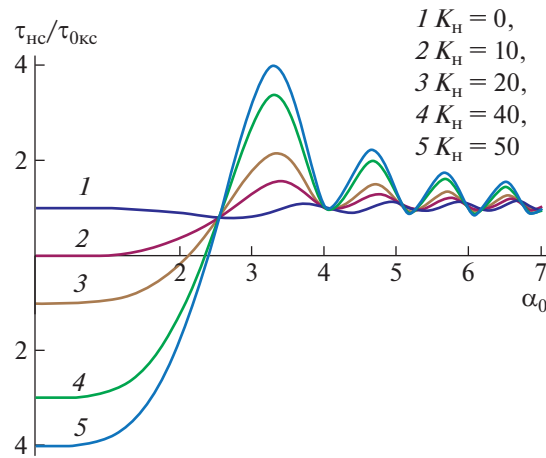


**Рис. 2.** Изменение отношения нестационарного касательного напряжения на стенке к квазистационарному касательному напряжению в зависимости от безразмерной частоты колебаний при различных значениях параметра ускорения жидкости  $K_n$  и упругое число Деборы  $De = 0.01$ .



**Рис. 3.** Изменение отношения нестационарного касательного напряжения на стенке к квазистационарному касательному напряжению в зависимости от безразмерной частоты колебаний при различных значениях параметра ускорения жидкости  $K_n$  и упругое число Деборы  $De = 0.05$ .

Следует отметить, что все графики при течении вязкоупругой жидкости в плоском канале носят колебательный характер. В рис. 2 представлено изменение отношения нестационарного касательного напряжения на стенке канала к квазистационарному касательному напряжению в зависимости от безразмерной частоты колебаний для случая  $De = 0.01$ . Следует отметить, что в этом случае, в отличие от ньютоновского течения, наблюдается увеличение касательного напряжения в области околонулевого значения частоты колебания в зависимости от ускорения жидкости. Затем происходит постепенное уменьшение для  $K_n = 20; 40; 50$ , а для  $K_n = 0; 10$  увеличение до значения  $\frac{\tau_{нс}}{\tau_{0кс}} = 3$  при больших значениях частоты колебания. Для случая  $De = 0.05$  изменения отношения нестационарного касательного напряжения на стенке канала к квазистационарному касательному напряжению в зависимости от безразмерной частоты колебаний приведены в рис. 3. В случае околонулевого значения частоты колебаний наблюдается уменьшение касатель-



**Рис. 4.** Изменение отношения нестационарного касательного напряжения на стенке к квазистационарному касательному напряжению в зависимости от безразмерной частоты колебаний при различных значениях параметра ускорения жидкости  $K_n$  и упругое число Деборы  $De = 0.1$ .

ного напряжения в зависимости от ускорения жидкости, а затем происходит увеличение до максимума в области  $2 < \alpha_0 < 4$ , потом постепенно асимптотически уменьшение до значения  $\frac{\tau_{нс}}{\tau_{0кс}} = 1.5$ . Необходимо отметить, что в случае  $De = 0.1$  при низких значениях частоты колебаний наблюдается резкое уменьшение касательного напряжения, кроме  $K_n = 0$  случая. Это говорит о том, что при больших значениях времени релаксации могут возникать обратные течения жидкости при низких частотах колебаний. Затем с увеличением частоты колебания все кривые, показывающие изменения отношения нестационарного касательного напряжения на стенке канала, с колебанием асимптотически приближается к значению  $\frac{\tau_{нс}}{\tau_{0кс}} = 1$  в зависимости от ускорения жидкости (рис. 4).

Таким образом, рассмотренные особенности в изменениях касательного напряжения на стенке при заданном гармоническом колебании расхода вызваны нарушением параболического закона распределения местных скоростей по сечению канала. Расчеты показывают, что в пристанном слое скорости изменяются синфазно с изменением касательного напряжения на стенке вдоль канала, а в центральной части потока они остаются по фазе, с фазой касательного напряжения сдвига на стенке. С этой связи вязкоупругие свойства жидкости, а также ее ускорение являются ограничивающими факторами для использования квазистационарного подхода. Кроме того, найденные формулы для определения передаточной функции при течении вязкоупругой жидкости в нестационарном потоке позволяют определить диссипации механической энергии в нестационарном потоке среды, имеющие важные значения при регулировании гидро- и пневмосистем.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решены задачи о колебательном течении вязкоупругой несжимаемой жидкости в плоском канале при заданном гармоническом колебании расхода жидкости. Определена передаточная функция (амплитудно-фазовой частотной характеристики). С помощью этой функции определено влияние частоты колебаний ускорения и релаксационных свойств жидкости на отношение касательного напряжения сдвига на стенке канала к средней по сечению канала скорости. Расчеты показывают, что нестационарное касательное напряжение на стенке канала при течении вязкоупругой жидкости увеличивается немонотонно с ускорением жидкой частицы при низких частотах колебаний. Достигая максимального значения, затем уменьшаясь с ростом безразмерной частоты колебаний, асимптотически приближается к значениям без ускоренного течения с колебанием. Показано, что вязкоупругие свойства жидкости, а также ее ускорение являются ограничивающими факторами для использования квазистационарного подхода. Найден-

ные формулы для определения передаточной функции при течении вязкоупругой жидкости в нестационарном потоке позволяют определить диссипации механической энергии в нестационарном потоке среды, имеющие немаловажные значения при расчете регулирования гидро- и пневмосистем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Marx U., Wallis H., Hoffmann S., Linder G., Harland R., Sonntag F., Klotzbach U., Sakharov D., Tonevitskiy A., Lonster R. "Homan-on-a-Chip" developments: a translational cutting-edge alternative to systemic safety assessment and effecting evacuation in laboratory animals and man? // *ATLA* 2012. V. 40. P. 235–257.
2. Inman W., Domanskiy K., Serdy J., Ovens B., Trimper D., Griffith L.G. Dishing modeling and fabrication of a constant flow pneumatic micropump // *J. Micromech. Microeng.* 2007. V. 17. P. 891–899.
3. Акилов Ж.А. Нестационарные движения вязкоупругих жидкостей. Ташкент: Фан, 1982. 104 с.
4. Хужаеров Б.Х. Реологические свойства смесей. Самарканд: Согдиана, 2000.
5. Мирзаджанзаде А.Х., Караев А.К., Ширинзаде С.А. Гидравлика в бурении и цементировании нефтяных и газовых скважин. М.: Недра, 1977. 232 с.
6. Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках. Собр. соч. М.: 1952. С. 149–171.
7. Громека И.С. О скорости распространения волнообразного движения жидкости в упругих трубках // Собр. соч. М.: 1952. С. 172–183.
8. Crandall I.B. Theory of vibrating systems and sounds. D. Van. Nostrand Co., New York. 1926.
9. Lambossy P. Oscillations foresees dun liquids incompressible et visquux dans un tube rigide et horizontal calculi de IA force de frottement // *Helv. Physiol. Acta.* 25. 1952. P. 371–386.
10. Womersly J.R. Method for the calculation of velocity rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known // *J. Physiol.* 1955. N 3. P. 553–563.
11. Richardson E.G., Tyler E. The transverse Velocity gradient neat the mothe of pipes in which an alternating or continuous flow of air is established // *Pros. Phys. Soc. London:* 1929. V. 42.
12. Попов Д.Н., Мохов И.Г. Экспериментальное исследование профилей местных скоростей в трубе при колебаниях расхода вязкой жидкости // *Изв. Вузов. Машиностроение.* 1971. № 7. С. 91–95.
13. Uchida S. The pulsating viscous flow superposed on the stead laminar motion of incompressible fluid in a circular pipe // *ZAMP* 1956. vol. 7. № 5. P. 403–422.
14. Ünsal B., Ray S., Durst F., Ertunç Ö. Pulsating laminar pipe flows with sinusoidal mass flux variations // *Fluid Dynamics Research.* 2005. vol. 37. P. 317–333.
15. Зигель Р., Перлмуттер М. Теплоотдача при пульсирующем течении в канале // *Теплопередача.* М.: 1962. № 2. С. 18–32.
16. Файзуллаев Д.Ф., Наврузов К. Гидродинамика пульсирующих потоков. Ташкент: Фан, 1986. 192 с.
17. Валуева Е.П., Пурдин М.С. Гидродинамика и теплообмен пульсирующего ламинарного потока в каналах // *Теплоэнергетика.* 2015. № 9. С. 24–33.
18. Валуева Е.П., Пурдин М.С. Пульсирующее ламинарное течение в прямоугольном канале // *Теплофизика и аэродинамика.* 2015. Т. 22. № 6. С. 761–773.
19. Tsangaris S., Vlachakis N.W. Exact solution of the Navier–Stokes equations for the fully developed, pulsing flow in a rectangular duct with a constant cross-sectional velocity // *J. Fluids Eng.* 2003. V. 125. P. 382–385.
20. Tsangaris S., Vlachakis N.W. Exact solution of the Navier–Stokes equations for the oscillating flow in a duct of a cross-section of right-angled isosceles triangle // *ZAMP.* 2003. V. 54. P. 1094–1100.
21. Tsangaris S., Vlachakis N.W. Exact solution for the pulsating finite gap Dean flow // *Appl. Math. Modelling.* 2007. V. 31. P. 1899–1906.
- 21a. Георгиевский Д.В. Оценки экспоненциального затухания возмущений, наложенных на продольные гармонические колебания вязкого слоя // *Дифференциальные уравнения.* 2020. Т. 56. № 10. С. 1366–1375.
22. Jons J.R., Walters T.S. Flow of elastic-viscous liquids in channels under the influence of a periodic pressure gradient // *Part 1. Rheol. Acta.* 1967. V. 6 P. 240–245.
23. Khabakhpasheva E., Popov V., Kekalov A., and Mikhailova E. Pulsating flow of viscoelastic fluids in tubes // *J. Non-Newtonian Fluid. Mech.* 1989. V. 33(3). P. 289–304.
24. Casanellas L., Ortin J. Laminar oscillatory flow of Maxwell and Oldroyd-B fluids // *J. Non-Newtonian Fluid. Mechanics.* 2011. 166. P. 1315–1326.
25. Hassan A.Abu-El and El-Maghawru E.M. Unsteady axial viscoelastic pipe flows of an Oldroyd-B fluid in // *Rheology-New concepic . Applications and Methods / Ed by Durairaj R. Published // Tech.* 2013. Ch. 6. P. 91–106.

26. *Akilov Zh.A., Dzhabbarov M.S. and Khuzhayorov B.Kh.* Tangential Shear Stress under the Periodic Flow of a Viscoelastic Fluid in a Cylindrical Tube // SSN 0015-4628. Fluid Dynamics. 2021. V. 56. № 2. P. 189–199.
27. *Ding Z., Jian Y.* Electrokinetic oscillatory flow and energy microchannelis: a linear analysis // J. Fluid. Mech. 2021. V. 919. A20. P. 1–31.
28. *Попов Д.Н.* Нестационарные гидромеханические процессы. М.: Машиностроение, 1982. 424 с.
29. *Астарита Дж., Марруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
30. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
31. *Колесниченко В.И., Шарифулин А.Н.* Введение в механику несжимаемой жидкости. Перм: Изд. Пермского нац. иссл. полит. ун-та, 2019. 127 с.
32. *Наврузов К.* Гидродинамика пульсирующих течений в трубопроводах. Ташкент: Фан, 1986. 112 с.