ИЗВЕСТИЯ РАН. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, 2023, № 4, с. 117–130

УДК 532.591

ФОРМИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ЗА ТЕЛОМ, ДВИГАЮЩИМСЯ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

П. В. Матюшин*

Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия

**E-mail: pmatyushin@mail.ru*

Поступила в редакцию 27.12.2022 г.
После доработки 27.02.2023 г.
Принята к публикации 28.02.2023 г.

Рассмотрено равномерное движение диска в горизонтальном направлении вдоль оси его симметрии в покоящейся стратифицированной вязкой жидкости. Диск генерирует пространственные гравитационные внутренние волны, занимающие все пространство между диском и местом его старта. Волны наблюдаются при помощи двухцветной бета-плюс-визуализации вихревой структуры течения, рассчитанного при помощи системы уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска. В настоящей работе существенно дополнен опубликованный ранее механизм формирования полуволн над осью симметрии диска, где основное внимание уделялось периодическому процессу зарождения деформированных вихревых колец над местом старта диска, происходящему в силу гравитационной и сдвиговой неустойчивостей; левое полукольцо трансформируется в полуволну впадин или гребней, а правое полукольцо исчезает со временем. В настоящей работе установлено, что левые части правых нечетных полуколец превращаются в осевые части полуволн гребней.

Ключевые слова: диск, стратифицированная вязкая жидкость, вихревая структура, волна, нить, петля

DOI: 10.31857/S1024708422601019, **EDN:** WKFNOM

Понимание процесса формирования сложных пространственных (3D) вихревых структур в жидкости, инициированного прохождением тела конечных размеров сквозь нее, всегда вызывало большой интерес. Одним из способов получения этой сложной 3D-структуры была визуализация полей векторов скорости, рассчитанных при помощи математического моделирования этого процесса. Если использовать сферу, как простейшее 3D-тело конечных размеров, и однородную несжимаемую вязкую жидкость, то топология 3D вихревой структуры будет достаточно сложной. В 1987 г. в [1] начало процесса формирования цепочки вихревых петель в следе за сферой визуализировали при помощи нескольких мгновенных 3D-линий завихренности. Этот процесс довольно трудоемкий, так как для каждой такой линии надо грамотно задать ее начальную точку. В результате появления в 1988–1995 гг. новых подходов к визуализации вихревых структур в жидкости и газе, описанных в [2], стало возможным получать рассчитанные 3D вихревые структуры в следе за сферой [3, 4], топологии которых качественно совпадали с экспериментом [5]. В 2006 г. был впервые детально рассмотрен механизм формирования вихрей (МФВ) в следе за сферой, равномерно двигающейся в однородной несжимаемой вязкой жидкости, приводящий к формированию цепочки вихревых петель в виде шпилек для волос [6]. МФВ здесь работает в рециркуляционной области R следа, расположенной за сферой (рис. 1ж–1з).

В случае линейно стратифицированной по плотности несжимаемой вязкой жидкости наблюдается симметрия поля векторов скоростей жидкости относительно горизонтальной плоскости, проходящей через геометрический центр O выпуклого симметричного тела. Поэтому, для определенности, динамика изменения структуры течения стратифицированной жидкости описывается только в верхнем полупространстве над точкой O. Пусть точка F находится над точкой O на пересечении поверхности тела с вертикальной осью X, проходящей через точку O и направленной вверх. Например, для сферы точка F будет ее верхним полюсом. В [7] сфера покоится на уровне нейтральной плавучести в покоящейся стратифицированной вязкой жидкости. Несмот-

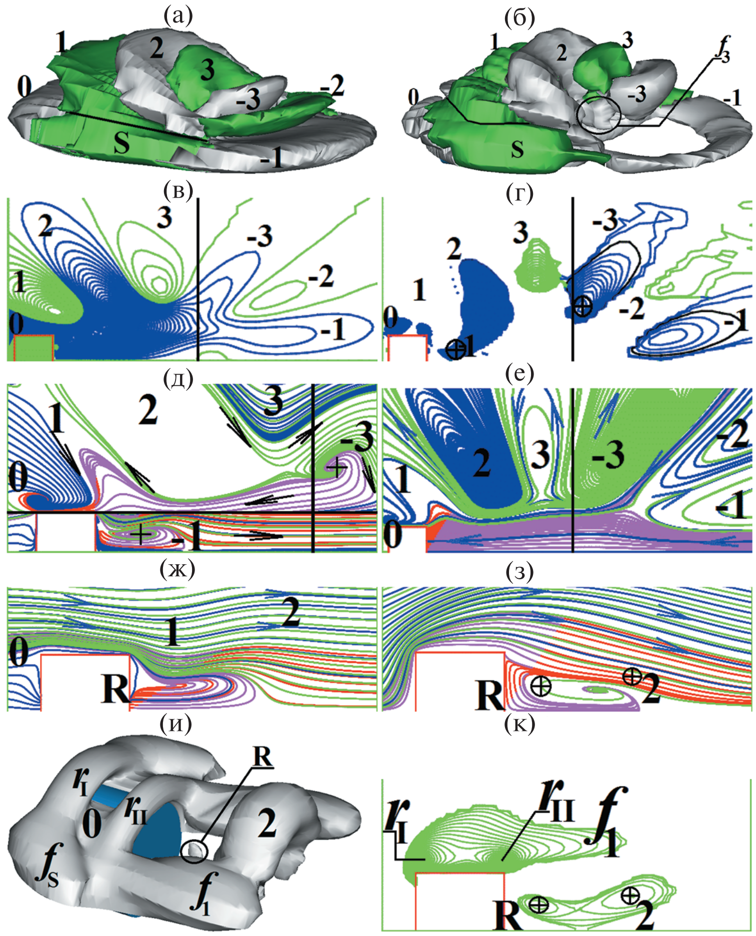

Рис. 1. Течение около диска при $T = 1.5$, Fr = 0.3, Re = 50, $T_b = 2\pi$ с: *а–б*, *и* – изоповерхности $\omega+ = |\mathrm{rot}\,\mathbf{v}|+ = \pm 0.01$, $\beta+ = \pm 0.01$, $\beta = 0.2$; *в–г*, *к* – изолинии $\omega_\varphi = (\mathrm{rot}\,\mathbf{v})_\varphi$ с шагом 0.02 (*в*) и $\beta+$ с шагом 2×10^{-3} (*г*) в вертикальной плоскости x–z и $\beta+$ с шагом 0.04 в плоскости y–z (*к*); *д–з* – мгновенные линии тока в СК3(0, –0.01, 0) при $0 \le x \le d/2$ и в СК3(0.973, 0.005, 0) при $x > d/2$, соответственно (*д*), в СК2 (*е*) и в СК1 в плоскостях x–z (*ж*) и y–z (*з*).

ря на то что силы диффузии толкают жидкость во всех направлениях, и в силу того, что многие части поверхности сферы находятся под углом к горизонту, около них при $X > 0$ создаются течения жидкости, индуцированные диффузией, направленные к точке F. Течение это будет очень медленным и осесимметричным относительно оси X. В [7] показано, что в окрестности прямой X периодически над самым верхним кольцом в силу гравитационной и сдвиговой неустойчивостей генерируется новое осесимметричное вихревое кольцо, которое уменьшает вертикальные размеры ранее сгенерированных колец. Каждая пара колец составляет одну гравитационную внутреннюю волну. Групповые скорости этих волн перпендикулярны их фазовой скорости и направлены по радиус-векторам от точки F [7]. Далее около точки F остаются только два вихревых кольца, сильно сплюснутых в вертикальном направлении и наблюдаемых в эксперименте [7]. Таким образом, краткая формулировка МФВ в [7] звучит так: “На точку F падают кольца”.

Если вместо сферы взять диск с горизонтальной осью симметрии Z, то диффузия индуцирует течение жидкости только около боковой поверхности диска [8]. Поэтому в [7] сингулярная точка F – узел, а в [8] – седло. В [8] на точку F сначала падают деформированные вихревые прямоугольники вместо колец. Далее вихревая структура течения становится все более хаотичной.

В настоящей статье рассмотрено равномерное движение диска из статьи [8] вдоль оси Z справа налево. Пусть Q – место старта центра тыльной стороны диска. На рис. 1в–1е точка Q находится на пересечении черной вертикальной прямой и оси Z, совпадающей с нижней границей рисунков. Из линейной теории и экспериментов известно, что старт тела сопровождается излу-

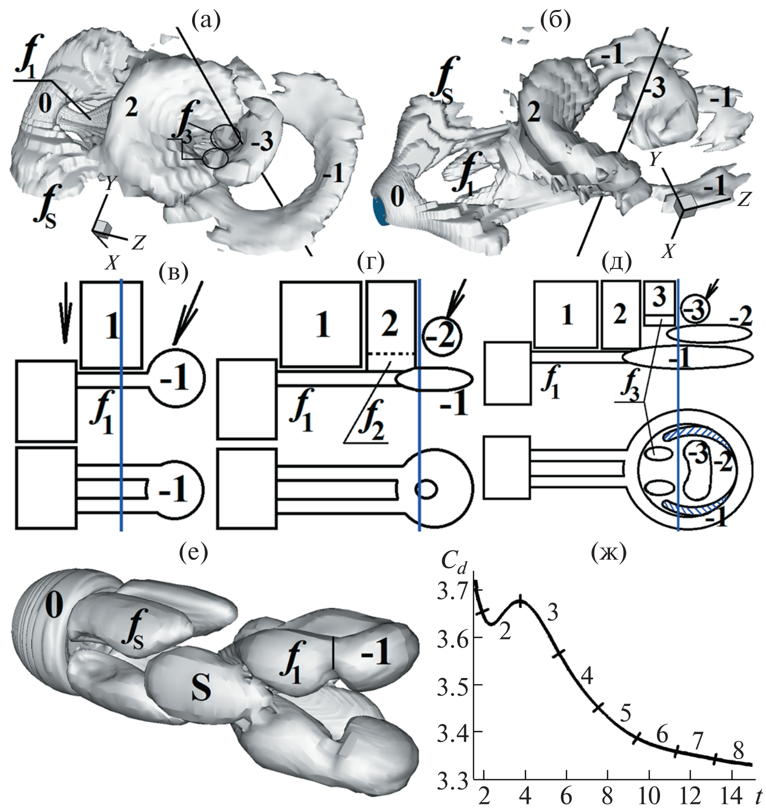

Рис. 2. Течение около диска при Re = 50, $T_b = 2\pi$ с: *а–б* – изоповерхности (β–) = 2 × 10^{-3} и (λ_2–) = –3 × 10^{-6} при $x < 0$, Fr = 0.8, T = 1.51; *в–д* – схематическое представление изоповерхностей β при $x > 0$, Fr ≤ 4, 0.28 ≤ T ≤ ≤ 1.4: *вверху* – вид сбоку, *внизу* – вид снизу; *е* – изоповерхность β = 0.003 при Fr = 4, T = 0.28; *ж* – временная зависимость коэффициента C_d сопротивления диска при Fr = 0.3, цифрам k соответствуют временные промежутки $[0.5T_b(k-1), 0.5T_bk]$.

чением пучка нестационарных гравитационных внутренних волн, которые распространяются от Q вдоль радиус-векторов [9, 10]. Математическое моделирование позволяет детально изучить этот процесс излучения пучка волн, подробно исследуя динамику 3D вихревой структуры течения жидкости. Детальное описание этого процесса было дано в [11]. Сначала между диском и точкой Q формируются две вихревые нити f_1, которые потом трансформируются в ножки вихревой петли –1, головная часть –1 которой расположена правее Q (рис. 2е). Потом над Q периодически зарождаются деформированные вихревые кольца k, где k = 2, 3, 4 ... . Таким образом, краткая формулировка МФВ в [11] звучит так: “На точку Q падают деформированные кольца”. То есть краткие формулировки МФВ в статьях [7] и [11] практически совпадают.

Здесь надо подчеркнуть важное различие МФВ для однородной и стратифицированной жидкостей. Если в однородной жидкости вихревая структура течения формируется непосредственно за телом [6], то в стратифицированной жидкости – над местом старта тела [11].

В [11] большое внимание уделяется объяснению механизма формирования вихревых колец над Q, происходящему из-за гравитационной и сдвиговой неустойчивостей. В [11] демонстрируется, что левое полукольцо k трансформируется в полуволну впадин или гребней, а правое полукольцо –k исчезает со временем. Дело в том, что водоворот жидкости, инициируемый стартом диска, заставляет левые полукольца крутиться сильнее, чем правые. В результате этого размеры левых полуколец увеличиваются, а величина завихренности в них будет на порядок больше, чем в правых полукольцах (рис. 1а, 1в). Таким образом, внутренние полуволны (бывшие левые полукольца) занимают все пространство между диском и точкой Q.

Начальная и последующие стадии МФВ сильно отличаются в приведенном выше кратком изложении. Желание получить более универсальный МФВ в широком диапазоне чисел Fr и дополнительные всесторонние исследования динамики 3D вихревой структуры течений стратифицированной вязкой жидкости привели к появлению настоящей статьи. В ней МФВ существенно доработан по сравнению с [11], и переименован в механизм формирования внутренних волн (МФВВ). Формулировка этого МФВВ будет дана после описания постановки этой задачи, методов ее численного решения и визуализации 3D вихревой структуры течений жидкости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Диск с диаметром d и толщиной $h = 0.76d$ вносится в покоящуюся линейно стратифицированную по плотности несжимаемую вязкую жидкость и сразу же начинает равномерное движение со скоростью U вдоль горизонтальной оси симметрии Z диска справа налево. Пусть точка Q старта центра тыльной стороны диска будет началом покоящейся декартовой системы координат СК2 (z, x, y,), где ось x – вертикальна, ось z совпадает с осью Z. Пусть начало двигающейся декартовой системы координат СК1 (Z, X, Y) с вертикальной осью X связано с геометрическим центром O диска. Для решения поставленной задачи моделируется вспомогательная задача обтекания диска равномерным потоком жидкости со скоростью U в СК1. Направление потока жидкости совпадает с положительным направлением оси Z.

Пусть T_b – период плавучести жидкости, T – обезразмеренное на T_b время, прошедшее с момента внесения диска в жидкость. Плотность жидкости $\rho(Z,X,Y) = 1–0.5 \cdot X/\mathrm{A} + S(Z,X,Y)$ обезразмерена на плотность ρ_0 на уровне центра диска, а координаты Z, X, Y – на $d/2$, где $\mathrm{A} = \Lambda/d$ – отношение масштабов, $N_b = 2\pi/T_b$ и $\Lambda = g/N_b^2$ – частота и масштаб плавучести жидкости, g – ускорение свободного падения, $S(Z, X, Y)$ – обезразмеренное на ρ_0 возмущение солености, которое при $T = 0$ равно нулю.

Для математического моделирования вспомогательной задачи обтекания диска в СК1 решается следующая обезразмеренная система уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска [12]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)S = \frac{2}{\mathrm{Sc} \cdot \mathrm{Re}}\Delta S + \frac{\mathrm{v}_X}{2\mathrm{A}} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{2}{\mathrm{Re}}\Delta \mathbf{v} + \frac{\mathrm{A}}{2\mathrm{Fr}^2} S\frac{\mathbf{g}}{g} \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{1.3}$$

Она записана в цилиндрической системе координат (Z, R, φ): $Z = Z$, $X = R\cos\varphi$, $Y = R\sin\varphi$, где $\mathbf{v} = (\mathrm{v}_Z, \mathrm{v}_X, \mathrm{v}_Y)$ – вектор скорости, нормированный по U; p – возмущение давления, обезразмеренное на $\rho_0 U^2$; t – время (обезразмеренное на $f = d/(2U) = 1/(2\mathrm{Fr} \cdot N_b)$); $\mathrm{Re} = Ud/\nu$ – число Рейнольдса, $\mathrm{Fr} = UT_b/(2\pi d)$ – внутреннее число Фруда, $\mathrm{Sc} = \nu/\kappa = 709.22$ – число Шмидта; $\nu = 0.01$ см^2/с – коэффициент кинематической вязкости воды, $\kappa = 4.1 \times 10^{-5}$ см^2/с – коэффициент диффузии соли; ∇ и Δ – операторы Гамильтона и Лапласа.

Для решения этой задачи используется численный метод расщепления по физическим факторам МЕРАНЖ [13], который успешно применялся для моделирования течений несжимаемой вязкой жидкости около сфер, цилиндров и дисков [4, 6–8, 11, 14–16], а также для течений со свободной поверхностью [13]. Детали численного метода, цилиндрической расчетной сетки, граничных условий и результатов тестирования программного комплекса математического моделирования и визуализации 3D-течений стратифицированной вязкой жидкости около диска опубликованы в [11, 14]. Приведенная в [14] классификация течений стратифицированной вязкой жидкости около диска толщиной $h = 0.76d$ при $0.05 < \mathrm{Fr} < 100$ и $50 < \mathrm{Re} < 500$ хорошо согласуется с трехмерными расчетами [15, 16] и с экспериментами [17, 18].

Внешняя правая граница расчетной области удалена от центра диска на $25d$. При $\mathrm{Fr} \geq 10$ длина внутренней волны $\lambda = 2\pi\mathrm{Fr}d \geq 20\pi d \approx 62.83d$, т.е. на выбранной расчетной сетке уместится менее чем 40% длины первой волны. Более того, амплитуда этой волны будет мала. Поэтому характер течения около диска будет эквивалентен течению однородной вязкой жидкости [6]. При $\mathrm{Fr} = 4$ – $\lambda = 8\pi d \approx 25.13d$, т.е. только одна волна будет доступна для наблюдения [11]. Поэтому для рассмотренной расчетной области именно при $\mathrm{Fr} \leq 4$ возможно исследовать генерацию внутренних волн, которые занимают все пространство расчетной сетки левее точки Q [11] (рис. 1а). Расчеты проводились на вычислительных ресурсах Межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук (МСЦ РАН).

В СК2 значения безразмерных горизонтальных компонент v_Z векторов скорости, рассчитанные в СК1, уменьшаются на единицу ($v_z = v_Z - 1$), а значения переменных v_x, v_y, S и p в СК2 те же, что и в СК1. Таким образом, в СК2 скорость набегающего на диск потока равна нулю, а безразмерная скорость диска равна –1, т.е. диск равномерно двигается справа налево в покоящейся жидкости. Центр тыльной стороны диска за время $T = [tf]/T_b = [t/(2\mathrm{Fr}N_\mathrm{b})][N_\mathrm{b}/2\pi] = t/(4\pi\mathrm{Fr})$ смещается в покоящейся СК2 на расстояние $L = U[tf]/(0.5d) = t = 4\pi\mathrm{Fr}T$ влево от точки Q (рис. 1е).

2. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ВИХРЕВОЙ СТРУКТУРЫ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Из-за стратификации жидкости, медленной скорости диска (Re = 50) и симметричности диска относительно плоскости x–z рассчитанные 3D-поля векторов скорости в любой момент времени характеризуются горизонтальной y–z и вертикальной x–z плоскостями симметрии. Следовательно, имеют смысл картины мгновенных линий тока в плоскостях x–z (рис. 1е–1ж) и y–z (рис. 1з). На рис. 1е для СК2 визуализируются вихревые ячейки 1, 2, 3, соответствующие внутренним полуволнам 1, 2, 3, сгенерированным при $T = 1.5$ для Fr = 0.3. На рис. 1ж–1з для СК1 показана рециркуляционная зона R, сформированная в результате отрыва набегающего на диск потока от тыльной стороны диска.

Известно, что построение 3D мгновенных линий тока с целью визуализации 3D вихревой структуры течения – трудное и неблагодарное дело. Можно легко потерять многие вихри. Поэтому для визуализации этой 3D-структуры естественно было бы использовать изоповерхности модуля завихренности $\omega = |\boldsymbol{\omega}| = |\mathrm{rot}\,\mathbf{v}|$ (рис. 1а). Рассмотрим сначала картины изолиний фитой компоненты завихренности ω_φ в вертикальной плоскости x–z (рис. 1в). Из определения ω_φ следует, что в ячейках 1, 3 и –2 на рис. 1в, где $\omega_\varphi > 0$, жидкость вращается против часовой стрелки, что подтверждается рисунком 1е. В ячейках 0, 2, –3, –1 на рис. 1в, где $\omega_\varphi < 0$, жидкость вращается по часовой стрелке (см. рис. 1е). Изоповерхность $\omega = 0.01$ на рис. 1а визуализирует внутренние полуволны 1–3 (области течения со значительным вращением сплошной среды), но не способна показать структуру более слабых вихрей около оси z [4]. Для визуализации всей вихревой структуры 3D течения несжимаемой жидкости в статье [2] было предложено использовать изоповерхность $\lambda_2 < 0$ (рис. 2б). Здесь λ_2 – второе собственное значение симметричного тензора $\mathbf{F}^2 + \mathbf{B}^2$, где $\mathbf{F} + \mathbf{B} = \mathbf{G}$ – тензор градиента скорости с элементами $v_{i,j} = \partial v_i/\partial x_j$, $F_{i,j} = 0.5(v_{i,j} + v_{j,i})$, $B_{i,j} = 0.5(v_{i,j} - v_{j,i})$. В [2] также упоминается визуализация 3D-течений при помощи изоповерхности мнимой части β двух комплексно-сопряженных собственных значений тензора $\mathbf{G}$ (рис. 1б, 1и). Интересно отметить, что в [2] эта мнимая часть никак не обозначается. Поэтому в разных статьях ее обозначают при помощи разных символов: $\mathrm{Im}(\sigma_{1,2})$ [6, 15], β [8, 11, 14, 16], λ_{ci} [19], λ_{cx} [20] и т.п. Сначала использовалась λ_2-визуализация [4], а потом β-визуализация [6, 8, 11, 14–16], которая имеет следующий ясный физический смысл. Выберем в СК1 произвольную точку M со скоростью жидкости $\mathbf{v}_\mathrm{M}$ в ней. Перейдем в систему отсчета СК3($\mathbf{v}_\mathrm{M}$), двигающуюся относительно СК1 со скоростью $\mathbf{v}_\mathrm{M}$. Тогда скорость в точке M в СК3($\mathbf{v}_\mathrm{M}$) станет равной нулю, а для скоростей в малой окрестности этой точки будет справедливо обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt \approx \mathbf{G}\mathbf{x}$. Известно, что наличие двух комплексно-сопряженных собственных значений $\sigma = \alpha + i\beta$ и $\bar{\sigma} = \alpha - i\beta$ тензора $\mathbf{G}$ в точке M дает следующее решение этого ОДУ [21]:

$$\mathbf{x} = C\mathbf{h}\exp(\sigma t) + \bar{C}\bar{\mathbf{h}}\exp(\bar{\sigma} t) + C_3\mathbf{h}_3\exp(\sigma_3 t) = \mathbf{x}_\mathrm{I} + \mathbf{x}_3$$

Здесь величины C и C_3 – комплексная и действительная константы соответственно, σ_3 – третье (действительное) собственное значение тензора $\mathbf{G}$, $\mathbf{h}_3$ – третий (действительный) собственный вектор, $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 - i\mathbf{h}_2$ и $\bar{\mathbf{h}}$ – два комплексно-сопряженных собственных вектора тензора $\mathbf{G}$, $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ – два линейно независимых действительных вектора, которые являются базисом в плоскости P. Пусть комплексное число $\zeta = \xi_1 + i\xi_2 = C\exp(\sigma t)$, тогда мы имеем: $\mathbf{x}_\mathrm{I} = \xi_1 \cdot \mathbf{h}_1 + \xi_2 \cdot \mathbf{h}_2$. Отобразим аффинно плоскость P на вспомогательную плоскость P^* комплексного переменного ζ, чтобы вектор $\mathbf{h}_1$ перешел в единицу, а вектор $\mathbf{h}_2$ – в i. Тогда вектору $\mathbf{x}_\mathrm{I} = \xi_1 \cdot \mathbf{h}_1 + \xi_2 \cdot \mathbf{h}_2$ будет соответствовать комплексное число $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$. В силу этого отображения траектория в плоскости P перейдет в траекторию в плоскости P^*, описываемую уравнением $\zeta = C\exp(\sigma t)$. В полярных координатах (r, θ) $\zeta = r\exp(i\theta)$, т.е. $\xi_1 = r\cos\theta$, $\xi_2 = r\sin\theta$. Пусть $C = C_\mathrm{real}\exp(iD)$, тогда $r = C_\mathrm{real}\exp(\alpha t)$, $\theta = \beta t + D$. Таким образом, если $\beta \neq 0$, то можно говорить о вихревом характере движения жидкости в малой окрестности точки M в СК3($\mathbf{v}_\mathrm{M}$): молекулы жидкости движутся по овалам (при $\alpha = 0$)

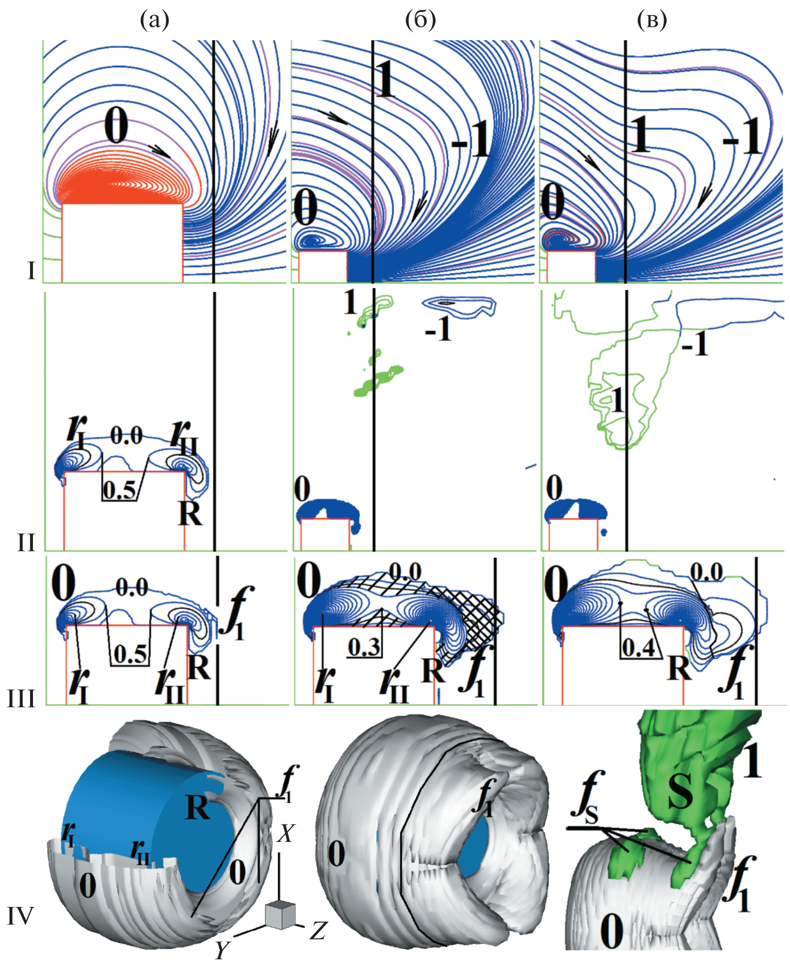

Рис. 3. Течение около диска при Fr = 0.3, Re = 50, $T_b = 2\pi$ с: *а–в* – мгновенные линии тока в СК2 (I) и изолинии $10^3\beta+$ с шагами 500, 0.1, 1 (II) в вертикальной плоскости $x–z$, изолинии $\beta+$ с шагами 0.5, 0.1, 0.1 в плоскости $\varphi = \pi/4$ (III), изоповерхности $10^3\beta = 0.5$, 5 и $10^3\beta+ = \pm 0.5$ (IV) при $T = 0.1$, 0.2, 0.24.

или овальным спиралям (при $\alpha \neq 0$) и β – это усредненная по времени угловая скорость вращения молекул жидкости около точки M в СК3($\mathbf{v}_M$) [21]. Для удобства построения одноцветной изоповерхности $\beta = \beta_0 > 0$ (рис. 1и), демонстрирующей вихревую структуру течения жидкости, в тех ячейках расчетной сетки, где $\beta = 0$, функция β переопределяется: $\beta = -0.01$ [6, 8, 11, 14–16].

В [22] была введена двухцветная $\beta+$-визуализация, которая при помощи знака ω_φ окрашивает полуволны впадин 1, 3 и гребней 2 на рис. 1б разными цветами, что очень удобно для исследования вихревой структуры внутренних волн (рис. 3–5, IV). Функция $\beta+$ определена при $\beta > 0$: $\beta+ = \mathrm{sign}(\omega_\varphi)\beta$, где функция $\mathrm{sign}(\omega_\varphi) = 1$ при $\omega_\varphi \geq 0$, $\mathrm{sign}(\omega_\varphi) = -1$ при $\omega_\varphi < 0$. Аналогичным образом можно ввести двухцветную $\omega+$-визуализацию: $\omega+ = \mathrm{sign}(\omega_\varphi)\omega$ (рис. 1а).

Далее было замечено, что на бóльшей площади рис. 1в $\omega_\varphi < 0$. Поэтому, если на рис. 1в убрать вихревые структуры, для которых $\omega_\varphi \geq 0$, то структура течения станет в два раза проще, но при этом удаленные структуры можно легко мысленно восстановить. Поэтому в [22] была введена одноцветная ($\beta-$)-визуализация течения жидкости. Функция ($\beta-$) определена при $\beta > 0$ и $\omega_\varphi < 0$: $(\beta-) = \beta$ (рис. 2а). В 3D-случае при сравнении изоповерхностей $\beta+$ на рис. 1б и изоповерхности $\beta-$ на рис. 2а видно, что на рис. 2а все полуволны впадин, кроме первой, бесследно исчезают. На рис. 1б черной линией отмечена примерная граница между областями (0 + S) и 1, где S – это головная часть боковой вихревой петли (рис. 2е) [11]. Удаление области (S+1) оставляет грубый след на оболочке следа 0 (сравните рис. 4в, IV и 5а, IV).

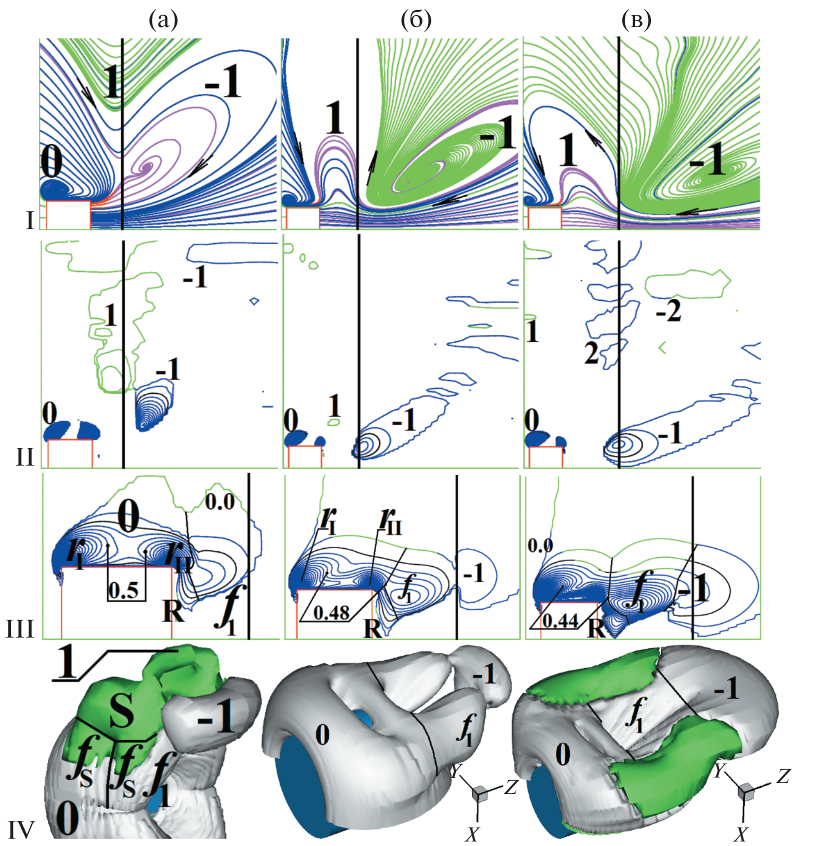

Рис. 4. Течение около диска при Fr = 0.3, Re = 50, $T_b = 2\pi$ с: *а*–*в* – мгновенные линии тока в СК2 (I) и изолинии $10^2\beta+$ с шагами 0.2, 5, 5 (II) в плоскости *x*–*z*, изолинии β+ с шагами 0.1, 0.08, 0.04 в плоскости $\varphi = \pi/4$ (III), изоповерхности β+ = ±0.0052, β = 0.15, β+ = ±0.05 (IV) при *T* = 0.28, 0.45, 0.68.

Рис. 1г–1д демонстрируют физический смысл β для двух точек M_1 и M_2 со скоростями в СК1 $(v_Z, v_R, v_\varphi) = (0.973, 0.005, 0)$ (при $x > d/2$) и (0, –0.01, 0), соответственно, отмеченных черными крестами. Рис. 1д разделен черной прямой $x = d/2$ на верхнюю и нижнюю части. Картины линий тока в верхней и нижней частях рис. 1д показаны в СК3 (0.973, 0.005, 0) и СК3(0, –0.01, 0), соответственно, и демонстрируют вращение жидкости в окрестностях точек M_1 и M_2. Картины линий тока в верхней и нижней частях рис. 1д похожи на картины линий тока в СК2 (рис. 1е) и СК1 (рис. 1ж) соответственно. Так, на рис. 1д и 1ж при $0 \le x \le d/2$ мы видим зону R. А на рис. 1д и 1е при $x > d/2$ мы видим полуволны впадин и гребней. Поэтому для приблизительного описания изменения кинематики внутренних волн и отрывных течений около оси *z* в вертикальной плоскости можно использовать мгновенные линии тока в СК2 и СК1 соответственно. Так, на рис. 1, 3–6 для каждой картины изолиний β+ в плоскости *x*–*z* приводится соответствующая ей картина мгновенных линий тока в СК2.

По аналогии с β+ и (β–)-визуализациями можно определить λ_2+ и (λ_2–)-визуализации (рис. 2б). Функция λ_2+ определена при $\lambda_2 < 0$: $\lambda_2+ = \mathrm{sign}(\omega_\varphi)|\lambda_2|$. Функция ($\lambda_2$–) определена при $\lambda_2 < 0$ и $\omega_\varphi < 0$: $(\lambda_2-) = \lambda_2$. Сравнение рис. 2а и 2б для *T* = 1.5 и Fr = 0.8 показывает, что топологии вихревых структур, полученные при помощи (β–) и (λ_2–)-визуализаций, практически совпадают, но (β–)-визуализация более гармонично представляет вихревую структуру течения жидкости. Так, на рис. 2а нити f_1 соединяются с кольцом R, а на рис. 2б не соединяются. На рис. 2а вихревое кольцо –1 цельное, а на рис. 2б – разорвано на три части.

3. МЕХАНИЗМ ФОРМИРОВАНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН ПРИ Fr ≤ 4

При *T* = 0 диск вносится в покоящуюся стратифицированную вязкую жидкость и сразу же начинает равномерное движение вдоль горизонтальной оси *z* симметрии диска справа налево.

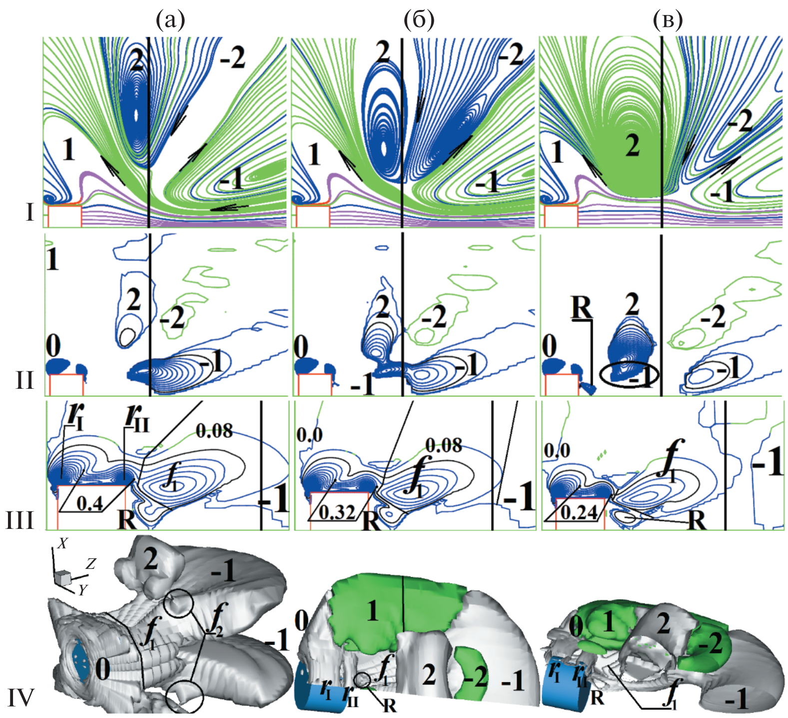

Рис. 5. Течение около диска при Fr = 0.3, Re = 50, $T_b = 2\pi$ с: *а–в* – мгновенные линии тока в СК2 (I) и изолинии β+ с шагом 10^{-2} (II) в плоскости *x–z*, изолинии β+ с шагом 0.08 в плоскости φ = π/4 (III), изоповерхности (β–) = $= 5 \times 10^{-3}$, β+ = $\pm 10^{-2}$, $\pm 10^{-2}$ (IV) при *T* = 0.8, 0.86, 1.

На потревоженную жидкость, отклонившуюся от своего начального положения, начинают действовать силы плавучести (последний член уравнения (1.2)). С другой стороны, в результате прилипания молекул жидкости к поверхности диска, перед диском и по бокам диска на жидкость действуют силы, направленные справа налево. Эти силы приводят к генерации вихревого тора с осью симметрии *z*, заполняющего все пространство (рис. 3а, I при *T* = 0.1), а силы плавучести при этом генерируют гравитационные внутренние полуволны над *Q* (рис. 3в, I при *T* = 0.24). На рис. 3–5, IV показана динамика 3D вихревой структуры течения жидкости при $0 < T < 1$, обусловленная гравитационной и сдвиговой неустойчивостями. Гравитационная неустойчивость, в свою очередь, обусловлена силами плавучести жидкости. Каждую 3D-структуру на рис. 3–5 дополняют изолинии β+ в ее сечениях при φ = 0 и φ = π/4 и мгновенные линии тока в СК2 в вертикальной плоскости *x–z* (при φ = 0). На рис. 3а, IV одна четверть изоповерхности $\beta = 5 \times 10^{-4}$ вырезана, чтобы показать поверхность диска.

При $T \le 0.1$ и $\mathrm{Fr} \le 4$ вне осесимметричной вихревой оболочки 0 диска у тыловой острой кромки диска при $x > 0$ появляются две небольшие вихревые структуры (рис. 3а, III–IV и рис. 2а–2г, 2е, 6а–6б из [11]) – зачатки двух вихревых нитей f_1 (рис. 3б–3в, III–IV). Картина изолиний β+ в сечении φ = π/4 демонстрирует динамику роста нитей f_1 и рециркуляционной зоны R. При $0.2 \le$ $\le T \le 0.24$ гравитационная и сдвиговая неустойчивости приводят к тому, что форма мгновенных линий тока над точкой *Q* в СК2 при φ = 0 из прямолинейной становится волнообразной (рис. 3в, I). Почему это происходит, подробно описано в [11]. В результате над *Q* формируются два каскада вихрей: 1 (слева) и –1 (справа) (рис. 3в, II). При *T* = 0.28 для Fr = 0.3 сердцевины каскадов 1 и –1 образуют кольцо 1 (рис. 4а, IV).

При $\mathrm{Fr} \le 1$ и $\mathrm{Fr} \ge 2$ детали процесса формирования вихрей немного отличаются. Если при $0.1 <$ $< T \le 0.28$, $\mathrm{Fr} \ge 2$ и $x > 0$ оболочка 0 следа практически не меняется со временем, а две первые нити f_1 и две вторые (боковые) нити f_S формируются вне оболочки 0 (рис. 2е) [11], то при $0.1 < T \le 0.28$, $\mathrm{Fr} \le 1$ и $x > 0$ нити f_1 и f_S размещаются в самой оболочке 0. Поэтому при $\mathrm{Fr} \le 1$ имеет смысл разделить оболочку 0 на внутреннюю 0_1 и внешнюю 0_2 части при помощи изоповерхности β_0. Модуль β_0 приведен на рис. 3–5, III. Оболочка 0_1 слабо меняется со временем и состоит из двух колец r_{I}, r_{II}, которые генерируются двумя острыми кромками диска (рис. 3а, IV). На рис. 3б, III в

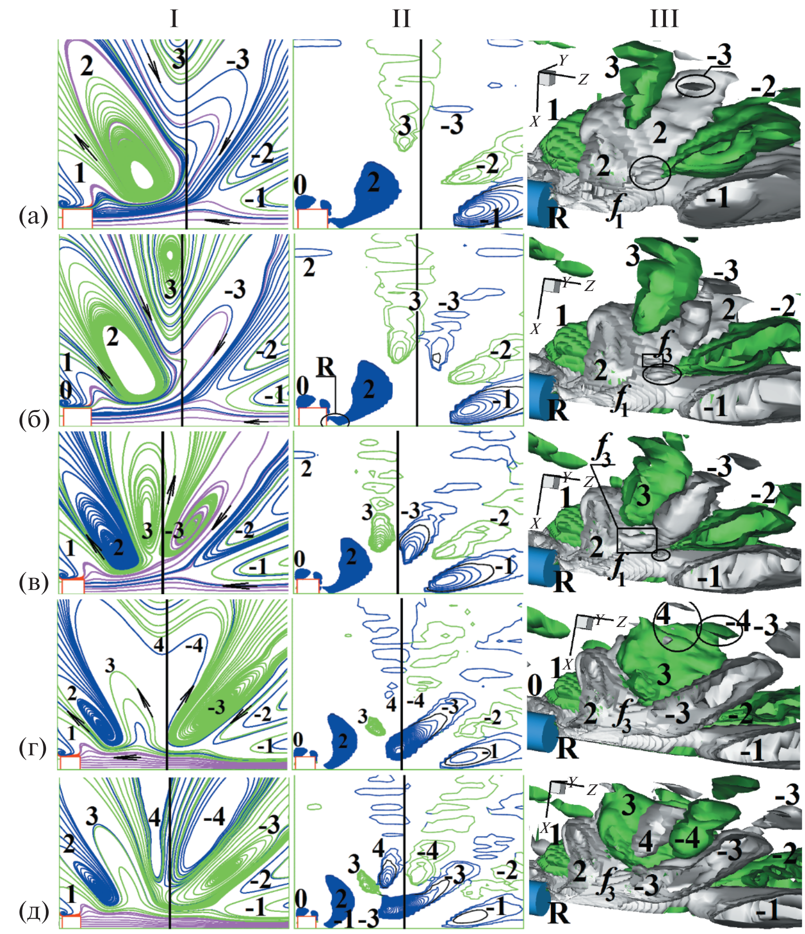

Рис. 6. Течение около диска при Fr = 0.3, Re = 50, $T_b = 2\pi$ с: *а*–*д* – мгновенные линии тока в СК2 (I) и изолинии $10^3\beta+$ с шагом 2 (II) в плоскости *x*–*z*, изоповерхности $\beta+ = \pm 10^{-3}$ (III) при T = 1.25, 1.3, 1.4, 1.73, 1.9.

сечении оболочки 0_2 при $\varphi = \pi/4$ можно выделить нити f_1, заштрихованные в клеточку, зону R у тыльной стороны диска и остальную часть 0_2 над боковой стороной диска. При $x > 0$ и $0.2 \le T \le 1$ две вихревые нити f_1 (ножки вихревой петли –1) являются частью каскада –1, а петля –1 – сердцевиной каскада –1. Генерация двух симметричных петель –1 при $x > 0$ и $x < 0$ сопровождается зарождением боковых петель S, как боковых частей двух симметричных каскадов 1. При $x > 0$ и $0.24 \le T \le 0.32$ для Fr = 0.3 наблюдаются четыре боковые нити f_S (рис. 3в, 4а, IV), для Fr = 4 – две нити f_S (рис. 2е). Появление петель S связано с присутствием диска и не упоминается в обсуждаемом здесь МФВВ, так как этот МФВВ посвящен непосредственно генерации внутренних волн.

Таким образом, при $0.1 \le T \le 0.32$ формируются две вихревые петли –1 с ножками f_1 и боковые петли S. При $T = 0.28$ для Fr = 0.3 сердцевины каскадов 1 и –1 образуют кольцо 1 (рис. 4а, IV), а для Fr = 4 полукольцо 1 похоже на арку (как на рис. 3б в статье [11]), радиус которой примерно в пять раз больше радиуса полукольца –1. Поэтому в формулировке МФВВ надо говорить о формировании не одного вихревого кольца 1, а двух каскадов вихрей 1 и –1, сердцевинами которых будут полукольца 1 и –1.

При $0.28 < T \le 0.45$ и Fr = 0.3 диаметр $D(1)$ сечения полукольца 1 плоскостью *x*–*z* уменьшается в три раза, а далее исчезает совсем. $D(1) = 0$ говорит о том, что полукольцо 1 при $x > 0$ разделилось на две половинки, симметричные относительно плоскости *x*–*z*. При $x > 0$ и $0.28 \le T \le 0.8$ диск сдвигается влево, а каскад –1 остается у точки Q, поэтому ножки f_1 петли –1 вытягивается в горизонтальном направлении (рис. 4б–4в, 5а, IV); полукольцо –1 сплющивается в вертикальном направлении и превращается в полукруг –1. На рис. 4б и 4в, IV показаны только половины изоповерхностей β для того, чтобы показать диск. При $0.5 \le T \le 0.8$ над Q из-за гравитационной и сдвиговой неустойчивостей генерируются каскады вихрей 2 и -2. Каскад вихрей 2 со временем станет полуволной гребней 2. Вихревые нити f_2, обведенные черными кругами на рис. 5а, IV для Fr = 0.3 или представленные в форме полукольцевой перемычки между нитями f_1 на рис. 3а из [11] для Fr = 4, – это нижние части каскада вихрей 2. Таким образом, при Fr = 4 полуволны гребней формируются из четных нитей около Q, а не из полуколец над Q как при Fr = 0.3.

Пусть $\beta_{max}(k)$ – значение локального максимума функции β в сечении полукольца k плоскостью x–z. При $T = 0.8$ и Fr = 0.3 сердцевина каскада 2 приближается к оси z, $\beta_{max}(2) = 0.025$, $\beta_{max}(-1) = 0.142$, т.е. полукруг -1 обладает наибольшим β_{max} в сечении $\varphi = 0$ вне оболочки диска (рис. 5а, II). При $x > 0$ и $T = 0.86$ каскад 2 садится на левый край полукруга -1, $\beta_{max}(2)$ увеличивается до 0.088, значения β перераспределяются между левым и правым краями полукруга -1: $\beta_{max}(-1, \text{левый}) = 0.12$, $\beta_{max}(-1, \text{правый}) = 0.068$ (рис. 5б, II). Теперь в СК2 через нити f_1 прокачивается жидкость, поступившая как из полукруга -1, так и из каскада 2, что в дальнейшем при $T = 1$ приводит к трансформации полукруга -1 в кольцо -1 (рис. 5в, II, $\beta_{max}(2) = 0.22$, $\beta_{max}(-1) = 0.038$). На рис. 5б и 5в, IV изоповерхности β показаны при $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/10$ для того, чтобы показать диск. Таким образом, в результате слияния при $0.86 \le T \le 1$ сердцевины каскада 2 и левой части полукруга -1 каскад 2 стал обладать наибольшим β_{max} в сечении $\varphi = 0$ вне оболочки диска.

Итак, при $T \le 1$ над Q периодически в течение каждой $\Delta T = 0.5$ формируются каскады вихрей k и $-k$, где $k = 1, 2$. Сердцевины каскадов -1 и 1 состоят из вихревой петли -1 (с ножками f_1 и полукольцом -1) и из полукольца 1 с боковыми петлями S соответственно. Сначала каскад 2 состоит из нитей f_2 (около Q) и полукольца 2, которое потом садится на левую часть полукольца -1. В результате формируются полуволна впадин 1 (над нитями f_1) и полуволна гребней 2. Фундаментом вихревой структуры первой волны при $T = 1$ является горизонтальное кольцо -1, сформировавшееся из полукольца -1.

Описанный выше процесс формирования вихрей для $T \le 1$ схематически представлен на рис. 2в–2г. Его можно обобщить на любой другой интервал времени $(n-1) < T \le n$, где $n = 2, 3, 4, \ldots$. Действительно, при $T > 0$ над Q периодически в течение каждого интервала времени $0.5(k-1) < T \le 0.5k$ формируются левый k и правый $-k$ каскады вихрей. Они состоят из нитей f_k около Q и деформированных полуколец k и $-k$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$. Для каждого нечетного k у оси z формируется вихревая петля $-k$. Она состоит из нитей f_k и нижнего полукольца $-k$, на которое потом садится четный каскад $(k + 1)$. Далее нижнее полукольцо $-k$ становится деформированным кольцом. Таким образом, в течение каждого интервала времени $(n-1) < T \le n$ формируется внутренняя волна n, состоящая из полуволн впадин $k = (2n-1)$ и гребня $(k + 1) = 2n$. Левая часть кольца $-k$ становится осевой частью гребня $(k + 1)$. В результате осевые части гребней оказываются связанными друг с другом нечетными нитями в цепочку. МФВВ для Fr ≤ 4 и $\Delta T = 1$ можно сформулировать короче. Нечетные каскады k и $-k$, нити f_k + нижний вихрь $-k$; четные каскады $(k + 1)$ и $-(k + 1)$, нити $(k + 1)$, каскад $(k + 1)$ садится на нижний вихрь $-k$ (рис. 2в–2д).

На рис. 2ж приведен график зависимости коэффициента C_d лобового сопротивления диска от времени t при Fr = 0.3. Волнообразная форма графика при $T \le 1$ обусловлена тем, что при $T \le 1$ точка Q, над которой работает МФВВ, находится около диска. Реализация МФВВ приводит к возмущению полей векторов скорости и давления у поверхности диска, которые и определяют C_d.

Если при $T \le 4$ и Fr = 0.3 реализации МФВВ для разных временных интервалов $\Delta T = 1$ немного отличаются друг от друга, то при $T > 3$ и Fr = 0.3 похожи друг на друга. Ниже подробно описываются реализации МФВВ при $1 < T \le 3$, Fr = 0.3, $T_b = 2\pi$ с и Re = 50, опираясь на рис. 1, 6–7. Описание особенностей МФВВ при $T > 3$ приведено без помощи рисунков.

4. ДЕТАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ГЕНЕРАЦИИ ВОЛН ПРИ Fr = 0.3 И $T > 1$

Рассмотрим теперь более детально МФВВ при $1 < T \le 2$ (рис. 6, 2д, 1). Так как при $T = 1$ и Fr = 4 точка Q достигла внешней границы расчетной сетки, то дальнейшее исследование МФВВ при Fr = 4 стало невозможным. При $1 < T \le 1.3$ и Fr = 0.3 над точкой Q генерируются каскады вихрей 3 и -3 (рис. 6а–6б). При $1 < T \le 1.3$ $\beta_{max}(2)$ увеличивается до 0.33. При $T > 1.3$ $\beta_{max}(2)$ больше не меняется, что говорит о том, что при $T = 1.3$ гребень 2 и вихревая структура левее его уже примерно сформировались. На рис. 6, III и 7, II изоповерхности β показаны при $\pi/2 \le \varphi \le \pi$ для того, чтобы показать диск и для лучшего понимания 3D вихревой структуры течения жидкости. При $T = 1.25$ на рис. 6а, III широкий “амфитеатр” полуволны 2 стоит перед меньшей по размерам “сценой” полукольца -2, боковые части которого выделены черной окружностью. Эти боковые

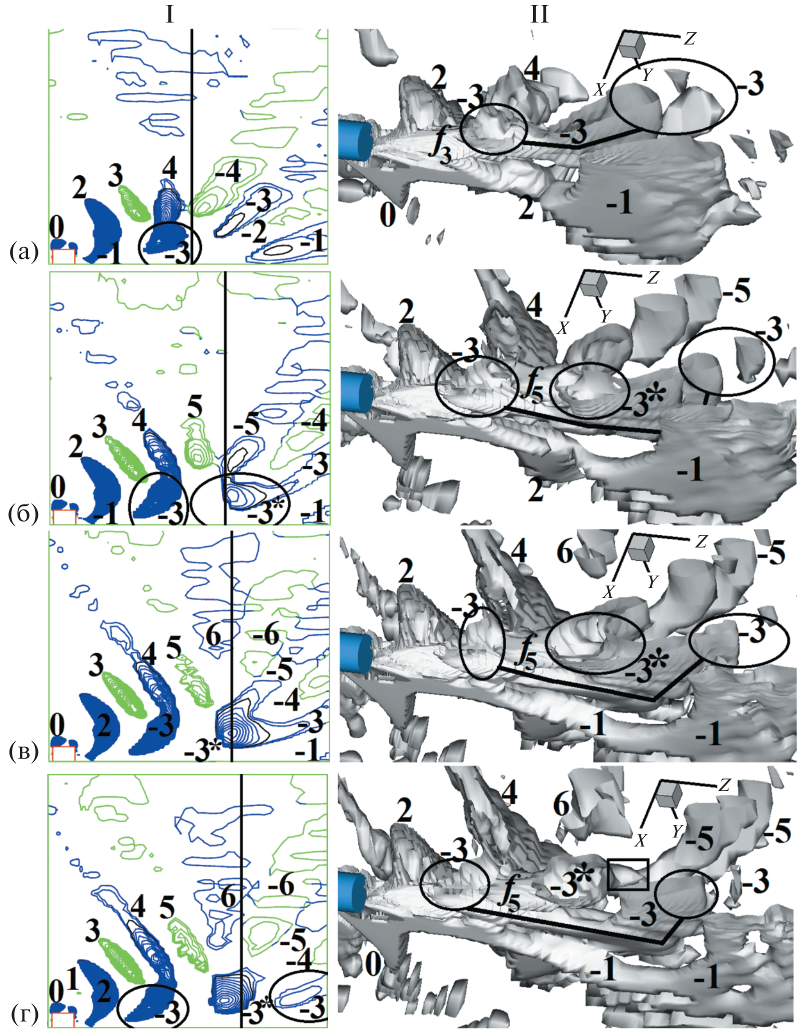

Рис. 7. Течение около диска при Fr = 0.3, Re = 50, $T_b = 2\pi$ с: *а*–*г* – изолинии $10^3\beta+$ с шагом 2 (I) в плоскости x–z, изоповерхности $(\beta-) = 10^{-3}$ (II) при $T = 2.05$, 2.6, 2.8, 2.95.

части индуцируют появление нитей f_3 над точкой Q при $T = 1.3$. Нити f_3, выделенные черным прямоугольником на рис. 6б–6в, III, являются частью формирующегося каскада –3. При $T = 1.4$ полукольцо –2 отрывается от полуволны 2, $\beta_{max}(3) = 0.021$, $\beta_{max}(-3) = 0.013$, размеры нитей f_3 увеличиваются (рис. 6в, III). Нити f_3 расположены выше нитей f_1. Картина течения при $T = 1.5$, представленная на рис. 1а–1з и 2а–2б, уже была подробно описана в подразделе 2 настоящей статьи. Здесь к этому описанию остается добавить устоявшуюся внутреннюю структуру (“скелет”) первой волны на рис. 1и, где боковые нити f_S соединены с кольцом r_I, а нити f_1 – с кольцом r_{II}. Здесь так же видно, что при $T = 1.5$ сердцевина полуволны 2 – это деформированное кольцо 2 (рис. 1к). На рис. 6г, III при $T = 1.73$ нити f_3 соединены с кольцом 2. Таким образом, в стратифицированной жидкости каждое вихревое кольцо связано с четырьмя нитями. В то время как в однородной жидкости вихревое кольцо связано только с двумя нитями [6].

При $1.5 < T \leq 1.73$ над точкой Q генерируются каскады вихрей 4 и –4 (рис. 6г). При $1.3 < T \leq 1.73$ $\beta_{max}(-2)$ уменьшается до 0.003. При $1.4 < T \leq 1.73$ $\beta_{max}(3)$ и $\beta_{max}(-3)$ увеличиваются до 0.027 и 0.052, соответственно (рис. 6г, II), полукольцо –3 превращается в полукруг –3, из нитей f_3 и полукруга –3 формируется вихревая петля –3 (рис. 6г, III); $D(3)$ уменьшается примерно в полтора раза (аналогично уменьшению $D(1)$ при $0.28 < T \leq 0.45$), но при этом объем полуволны впадин 3 значительно увеличивается. При $1.73 < T \leq 1.9$ $\beta_{max}(3)$ уменьшается до 0.023, $\beta_{max}(-3)$ увеличивается до 0.057 (рис. 6д, II). При $T = 1.9$ $\beta_{max}(4) = 0.0124$, $\beta_{max}(-4) = 0.0056$.

При $1.9 < T \leq 2.05$ развиваются две полуволны 4 и –4. Вертикальная полуволна 4 садится на левую часть вытянутого горизонтального полукруга –3, который затем трансформируется в деформированное кольцо –3, выделенное на рис. 7а, II двумя черными кругами с черной ломаной кривой между ними; $\beta_{max}(-3) = 0.0046$, $\beta_{max}(4)$ и $\beta_{max}(-4)$ увеличиваются до 0.08 и 0.0092 соответственно. Таким образом, при $1 < T \leq 2$ формируются полуволна впадин 3 над нитями f_3 и полуволна гребней 4. Фундаментом вихревой структуры второй волны при $T = 2$ является горизонтальное кольцо –3. При $2.05 < T \leq 2.95$ диаметры деформированных колец –1 и –3 постепенно увеличиваются (рис. 7, II).

При $2.05 < T \leq 2.5$ над точкой Q генерируются каскады вихрей 5 и –5. Если каскады –1 и –3 во время своего зарождения при $T = 0.28$ и 1.3, соответственно, имели одну ярко выраженную сердцевину, то на рис. 7б–7г при $2.6 \leq T \leq 2.95$ наблюдаются сразу три сердцевины каскада –5 в форме полуколец. При $2.1 \leq T \leq 2.5$ боковые части полукольца –4 формируют нити f_5 (аналогично формированию нитей f_3), которые стыкуются с нижним полукольцом каскада –5, которое при $T = 2.6$ соприкасается с верхней частью левого внутреннего куска –3* правой части кольца –3 (рис. 7б). В силу того, что кусок –3* расположен ближе к оси z, то $\beta_{max}(-3) = 0.011 > 0.005 = \beta_{max}(-5)$. Поэтому при $2.6 < T \leq 2.8$ кусок –3* поглощает полукольцо –5, т.е. $-3^* := (-3^*) + (-5)$. В результате нити f_5 соединяются с куском –3* (рис. 7в). При $2.5 < T \leq 2.95$ над точкой Q генерируются каскады вихрей 6 и –6. При $2.8 < T \leq 2.95$ кусок –3* отрывается от правой части кольца –3 и трансформируется в сильно деформированное кольцо $-3^* \equiv -5$, боковая часть которого выделена черным прямоугольником на рис. 7г, II. Далее вертикальный каскад 6 садится на левую часть кольца –5, а полуволна 1, состоящая ранее из двух половинок, снова становится полноценным полукольцом, $\beta_{max}(1) = 0.008$ (рис. 7г, I). Таким образом, при $2 < T \leq 3$ формируются полуволна впадин 5 над нитями f_5 и полуволна гребней 6. Фундаментом вихревой структуры третьей волны является кольцо –5. При $T \geq 2.8$ $\beta_{max}(4) = 0.14 < 0.33 = \beta_{max}(2)$, т.е. при $T = 2.8$ гребень 4 и вихревая структура левее его уже примерно сформировались. Поэтому ширина полуволн 2-4 на рис. 7в–7г, измеряемая вдоль прямой, перпендикулярной им, приблизительно равна $\pi \mathrm{Fr} d \approx 0.94d$. Это хорошо согласуется с линейной теорией внутренних волн.

При $T = 2.95$ вихревые кольца –1 и –3 вместе с полукольцами –5 и –6 создают вихревое “гнездо” (рис. 7г). В нем потом генерируются каскады вихрей 7 и –7 с несколькими сердцевинами, далее у оси z появляется вихревая петля –7, затем формируются вихревые каскады 8 и –8 и каскад 8 садится на головную часть петли –7. При $T = 4$ и $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$ боковая часть кольца –5 становится дополнительной нитью, связывающей осевые части гребней –5 и –7 наряду с нитью f_7. Для числа $\mathrm{Fr} = 0.3$ все МФВВ при $T > 4$ похожи на МФВВ при $3 < T \leq 4$. В результате осевые части гребней оказываются связанными друг с другом в цепочку нечетными нитями как “позвонки” “скелета” вихревой структуры течения (рис. 7г, II). На каждый такой “позвонок” прикреплены две полуволны (впадин и гребня). По мере уменьшения Fr горизонтальные размеры между центрами “позвонков”, равные $2\pi \mathrm{Fr} d$, уменьшаются.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено математическое моделирование равномерного движения диска с диаметром d и толщиной $h = 0.76d$ в горизонтальном направлении вдоль его оси симметрии Z в покоящейся линейно стратифицированной по плотности несжимаемой вязкой жидкости при $\mathrm{Re} = 50$, $T_b = 2\pi$ с и в широком диапазоне Fr. Диск генерирует пространственные (3D) гравитационные внутренние волны, занимающие все пространство между диском и местом Q его старта. Существенно дополнен опубликованный в [11] МФВ, работающий при формировании гравитационных внутренних волн, полученный на основе анализа динамики 3D вихревой структуры течения жидкости, визуализируемой при помощи изоповерхности мнимой части $\beta > 0$ комплексно-сопряженных собственных значений тензора градиента скорости. Для нахождения β в каждом узле расчетной сетки при помощи численного метода МЕРАНЖ [13] решалась система уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска, записанная в цилиндрической системе координат. Для большей наглядности полуволны гребней и впадин были окрашены разными цветами в зависимости от знака угловой компоненты завихренности ω_φ на них. Такая визуализация получила наименование β+ [22].

В [11] основное внимание уделяется периодическому процессу зарождения деформированных вихревых колец над точкой Q, происходящему в силу гравитационной и сдвиговой неустойчивостей. Тогда левое полукольцо трансформируется в полуволну впадин или гребней, а правое полукольцо исчезает со временем. В настоящей работе подчеркивается важная роль нечетных правых полуколец в МФВ и сформулирован следующий универсальный МФВВ за диском для Re = 50, $T_b = 2\pi$ с и Fr ≤ 4 в верхнем полупространстве над осью z. При $T > 0$ периодически в течение каждой $\Delta T = 0.5$ над точкой Q формируются левый k и правый $-k$ каскады вихрей, состоящие из нитей f_k около Q и деформированных полуколец k и $-k$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$ (см. рис. 3б–4а и 5а–5б для $k = 1$ и 2 соответственно). Для каждого нечетного k у оси z формируется вихревая петля $-k$, состоящая из нитей f_k и нижнего полукольца $-k$, на которое потом садится четный каскад ($k + 1$). Далее головная часть петли $-k$ становится деформированным кольцом. Таким образом, в течение каждой $\Delta T = 1$ формируется новая внутренняя волна, состоящая из полуволн впадин k и гребня ($k + 1$). Левая часть кольца $-k$ становится осевой частью гребня ($k + 1$). В результате осевые части гребней оказываются связанными друг с другом в цепочку нечетными нитями. Чтобы увидеть эту вихревую цепочку, нужно визуализировать только ту часть изоповерхности $\beta = \beta_0$, на которой $\omega_\varphi < 0$. Такая визуализация получила наименование ($\beta-$) [22]. Для разных интервалов $\Delta T = 1$ МФВВ имеет свои особенности, подробно описанные в настоящей работе. Существует небольшая зависимость МФВВ от Fr. Например, при $0.8 <$ Fr ≤ 4 полуволны гребней формируются из четных нитей около Q, а не из полуколец над Q как при Fr ≤ 0.5. При Fr = 0.8 и $T \geq 1$ все МФВВ для разных временных интервалов $\Delta T = 1$ похожи на МФВВ при Fr = = 0.3 и $T \geq 3$.

Таким образом, в настоящей работе приведены детальное описание и результаты расчетно-теоретического анализа динамики формирования пространственных вихревых структур в линейно стратифицированной вязкой сплошной среде, создаваемых движущимися в горизонтальном направлении объектами в форме диска.

Расчеты проводились на вычислительных ресурсах Межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук (МСЦ РАН).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shirayama S., Kuwahara K.* Patterns of three-dimensional boundary layer separation // AIAA-87-0461, 1987.
2. *Jeong J., Hussain F.* On the identification of a vortex // J. Fluid Mech. 1995. V. 285. P. 69–94.
3. *Johnson T.A., Patel V.C.* Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300 // J. Fluid Mech. 1999. V. 378. P. 19–70.
4. *Матюшин П.В.* Численное моделирование пространственных отрывных течений однородной несжимаемой вязкой жидкости около сферы: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. М., 2003. 194 с.
5. *Sakamoto H., Haniu H.* A study on vortex shedding from spheres in a uniform flow // Trans. ASME: J. Fluids Engng. 1990. V. 112. P. 386–392.
6. *Гущин В.А., Матюшин П.В.* Механизмы формирования вихрей в следе за сферой при 200 < Re < 380 // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 5. С. 135–151.
7. *Байдулов В.Г., Матюшин П.В., Чашечкин Ю.Д.* Эволюция течения, индуцированного диффузией на сфере, погруженной в непрерывно стратифицированную жидкость // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 2. С. 130–143.
8. *Матюшин П.В.* Эволюция течения, индуцированного диффузией на диске, погруженном в стратифицированную вязкую жидкость // Журнал “Математическое моделирование”. 2018. Т. 30. № 11. С. 44–58.
9. *Lighthill J.* Waves in Fluids. Cambridge: CUP, 1978. = *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
10. *Миткин В.В., Чашечкин Ю.Д.* Трансформация висящих разрывов в вихревые системы в стратифицированном течении за цилиндром // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 1. С. 15–28.
11. *Матюшин П.В.* Процесс формирования внутренних волн, инициированный началом движения тела в стратифицированной вязкой жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 3. С. 83–97.
12. *Boussinesq J.* Essai sur la théorie des eaux courantes // Comptes rendus de l’Académie des Sciences. 1877. V. 23. P. 1–680.
13. *Белоцерковский О.М., Гущин В.А., Коньшин В.Н.* Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // ЖВМ и МФ. 1987. Т. 27. № 4. С. 594–609.
14. *Матюшин П.В.* Классификация режимов течений стратифицированной вязкой жидкости около диска // Научный журнал “Процессы в геосредах”. 2017. № 4 (13). С. 678–687.
15. *Matyushin P.V.* The vortex structures of the 3D separated stratified fluid flows around a sphere // Сборник докладов Международной конференции “Потоки и структуры в жидкостях” (Санкт-Петербург, 2–5 июля 2007 г.). С. 75–78.

16. *Гущин В.А., Матюшин П.В.* Моделирование и исследование течений стратифицированной жидкости около тел конечных размеров // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 6. С. 1049–63.
17. *Lin Q., Lindberg W.R., Boyer D.L., Fernando H.J.S.* Stratified flow past a sphere // J. Fluid Mech. 1992. V. 240. P. 315–354.
18. *Chomaz J.M., Bonneton P., Hopfinger E.J.* The structure of the near wake of a sphere moving horizontally in a stratified fluid // J. Fluid Mech. 1993. V. 254. P. 1–21.
19. *Wang Y., Gao Y., Liu J., Liu C.* Explicit formula for the Liutex vector and physical meaning of vorticity based on the Liutex-Shear decomposition // Journal of Hydrodynamics. 2019. V. 31. № 3. P. 464–474.
20. *Zhou J., Adrian R.J., Balachandar S., Kendall T.M.* Mechanisms for generating coherent packets of hairpin vortices in channel flow // J. Fluid Mech. 1999. V. 387. P. 353–396.
21. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331 с.
22. *Матюшин П.В.* Вихревая структура, генерируемая равномерным движением диска в сильно стратифицированной вязкой жидкости // “Волны и вихри в сложных средах”: 12-я Международная конференция – школа молодых ученых; 01–03 декабря 2021 г.; Сборник материалов школы. М.: ООО “ИСПО-принт”, 2021. С. 160–162.