

УДК 532.529

СТРУКТУРА ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕН В СТАЦИОНАРНОМ ГАЗОКАПЕЛЬНОМ ПОТОКЕ ЗА ТОЧКОЙ ПАДЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКУЮ СТЕНКУ

© 2023 г. И. В. Голубкина^{а,*}, А. Н. Осипцов^{а,**}

^аМГУ им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт механики, Москва, Россия

*E-mail: giv-mm@mail.ru

**E-mail: osiptsov@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 13.03.2023 г.

После доработки 20.03.2023 г.

Принята к публикации 20.03.2023 г.

Рассматриваются задачи о структуре стационарного двумерного течения газокapельной смеси в пристеночной области за точкой падения косой и прямой волн уплотнения на плоскую стенку. В данном случае прямая волна соответствует ножке Маха при маховском отражении, а косая – регулярному режиму отражения падающей наклонной волны. Основной целью исследования является оценка влияния мелких капель жидкости, присутствующих в набегающем потоке, на равновесную температуру адиабатической стенки за точкой падения волны. Исследуется вопрос – насколько наличие падающей на стенку косой ударной волны может усилить эффект снижения равновесной температуры стенки присутствующими в потоке мелкими каплями. Область течения разбивается на внешнюю область “эффективно невязкого течения” и область асимптотического ламинарного пограничного слоя. Расчеты течения в каждой из областей проводятся в рамках двухконтинуальной модели газокapельной смеси с учетом фазового перехода (испарения) на поверхности капель. Исследованы наиболее интересные с точки зрения теплообмена волновые конфигурации, соответствующие неполному испарению капель за отраженной волной, а также “волнам с частичной и полной дисперсией” параметров. Используется упрощенная предельная схема формирования жидкой пленки оседающими на стенку каплями, эффектами неустойчивости и разбрызгивания пленки пре-небрегается. На основании численных расчетов получены оценки возможного снижения равновесной температуры адиабатической стенки за точкой падения ударных волн в стационарном сверхзвуковом потоке газа, содержащем малую концентрацию примеси жидких капель.

Ключевые слова: газокapельный поток, испарение капель, скачки уплотнения, волны с частичной и полной дисперсией, регулярное и маховское отражение волн, пограничный слой, адиабатическая стенка

DOI: 10.31857/S1024708423600185, EDN: WLXPUI

Настоящее исследование является продолжением работы [1], в которой анализировались условия существования и структура волн уплотнения с полной и частичной дисперсией параметров в газокapельных смесях с фазовыми переходами, а также возможные волновые конфигурации, возникающие в таких средах при отражении косых волн уплотнения от плоской стенки. Ниже постановка задачи о взаимодействии падающей волны со стенкой в газокapельном потоке дополнена описанием структуры течения на масштабе зон релаксации скоростей и температур фаз и выполнен учет пограничного слоя и формирования жидкой пленки на стенке за точкой отражения ударной волны. Кроме того, рассмотрена модельная постановка задачи о структуре двухфазного течения в ламинарном пограничном слое за прямой ножкой Маха, возникающей при маховском отражении косой ударной волны от стенки.

Актуальность указанных постановок задач обусловлена поиском новых способов “безмашинного энергоразделения” газовых потоков, т.е. таких схем течения, при которых (без совершения работы и в отсутствие внешнего теплообмена) происходит разделение исходного однородного газового потока на два потока, имеющих существенно различающиеся температуры торможения. Одной из таких схем, представляющих альтернативу хорошо известным вихревым трубкам

Ранка-Хилша, является так называемая “труба Леонтьева”, в которой энергоразделение осуществляется за счет теплообмена между “холодным” сверх- и “теплым” дозвуковым газовыми потоками, разделенными тонкой теплопроводной стенкой [2]. В дозвуковом пограничном слое температура газа изменяется незначительно, поэтому основной способ увеличения разности средних температур по обе стороны разделяющей перегородки (а следовательно, и повышения эффективности схемы Леонтьева) связан с уменьшением температуры восстановления в сверхзвуковом пограничном слое. По сути, в рамках предельной схемы, задача повышения эффективности “трубы Леонтьева” сводится к модельной задаче понижения равновесной температуры адиабатической стенки, продольно обтекаемой сверхзвуковым потоком газа [3]. В последние годы проанализированы различные способы повышения эффективности указанной схемы энергоразделения, в том числе – использование текстурированных и частично проницаемых перегородок, распределенный вдув и отсос газа, а также добавление в сверхзвуковой поток мелких жидких капель [3]. В недавней экспериментальной работе [4] сделана попытка использования центрального тела в сверхзвуковом газокапельном потоке для создания косоугольной ударной волны, приходящей на стенку, с целью активизации осаждения капель и интенсификации теплоотдачи стенки. Интерпретация полученных экспериментальных данных затруднена в связи с отсутствием информации о структуре течения, формирующегося при отражении косоугольной ударной волны от стенки в газокапельном потоке, и поведении жидкой дисперсной фазы. Частично эти вопросы затронуты в предыдущей публикации авторов [1].

На уровне качественных рассуждений естественно ожидать, что наличие в газокапельном потоке косоугольной ударной волны, приходящей на адиабатическую стенку, должно понизить равновесную температуру стенки, не изменяя температуру торможения газа. При регулярном отражении волны траектории достаточно инерционных капель за отраженной волной не успеют развернуться параллельно стенке, что должно привести к появлению протяженной области осаждения капель и формированию жидкой пленки. Как показано в [5] на примере другого течения, при наличии пленки температура адиабатической стенки падает до температуры оседающих на пленку капель, что в рассматриваемом случае соответствует статической температуре набегающего сверхзвукового потока. Такой режим характерен для слабых ударных волн, температура за которыми повышается незначительно и уменьшение размера капель за счет испарения невелико. При маховом отражении волны, за счет торможения несущей фазы на маховой ножке, возникнет заметное рассогласование продольных скоростей газа и капель, входящих в пограничный слой. Данное рассогласование должно привести к увеличению вклада боковой силы Сэфмана, но повышение температуры газа за ножкой Маха приведет к ускорению испарения капель. Эти два разнонаправленных процесса могут как увеличить, так и уменьшить поток массы капель, выпадающих на стенку из пограничного слоя. Для того чтобы количественно оценить изменение потоков массы оседающих на стенку капель и эффект снижения равновесной температуры стенки, ниже проводится численное исследование динамической и тепловой структуры газокапельного течения за точкой падения ударной волны на адиабатическую плоскую стенку для режимов регулярного и махового отражения падающей косоугольной волны. Естественно ожидать, что влияние капель на снижение температуры стенки будет значительным в случае максимальных потоков массы оседающих на стенку капель (это соответствует слабому испарению капель за падающей и отраженной волнами), поэтому ниже ограничимся случаями достаточно слабых ударных волн, т.е. небольших чисел Маха, посчитанных по нормальной скорости к падающей на стенку волне.

1. МОДЕЛЬ ГАЗОКАПЕЛЬНОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Как и в [1], в качестве модели течения газокапельной среды используется классическая двухжидкостная модель [6], в которой объемная концентрация дисперсной фазы считается пренебрежимо малой, пренебрегается столкновениями капель и различием термодинамических свойств пара вещества капель и несущей газовой среды. Среда капель описывается уравнениями континуума, имеющего числовую плотность n_s и лишенного собственных напряжений. Испарение на поверхности капель учитывается в рамках упрощенной модели, предполагающей, что весь тепловой поток к капле затрачивается на испарение, поэтому капли сохраняют свою исходную температуру. Считается, что несущая фаза – сжимаемый совершенный газ с постоянными теплоемкостями, вязкость и теплопроводность которого зависят от температуры по степенному закону: $\lambda/\lambda_0 = \mu/\mu_0 = (T/T_0)^\omega$; индекс 0 относится к параметрам невозмущенного потока. Дисперсная фаза – мелкие монодисперсные сферические капли, масса m и радиус σ которых могут

изменяться в процессе движения из-за испарения. Уравнения стационарного течения газопельной среды с фазовыми переходами [6] можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(n_s \mathbf{V}_s) &= 0, & m(\mathbf{V}_s \nabla) \mathbf{V}_s &= \mathbf{f}_s, & (\mathbf{V}_s \nabla) m &= -J \\ c_s m(\mathbf{V}_s \nabla) T_s &= 0, & J &= q_s / H \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) &= n_s J & \rho(\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} &= -\nabla p + \nabla_j \tau^{ij} \mathbf{e}_i - n_s \mathbf{f}_s + n_s J(\mathbf{V}_s - \mathbf{V}) \\ c_p \rho(\mathbf{V} \nabla) T &= (\mathbf{V} \nabla) p + \operatorname{div}(\lambda \nabla T) + \tau^{ij} e_{ij} - n_s q_s + n_s \mathbf{f}_s(\mathbf{V} - \mathbf{V}_s) + n_s J[(\mathbf{V} - \mathbf{V}_s)^2 / 2 + c_p(T_s - T)] \\ p &= \rho R T, & \tau^{ij} &= 2\mu e^{ij} - \frac{2}{3} \mu \delta^{ij} \operatorname{div}(\mathbf{V}), & e_{ij} &= \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \end{aligned}$$

$$\mathbf{f}_s = 6\pi\sigma\mu(\mathbf{V} - \mathbf{V}_s)G + 6.46\sigma^2 \sqrt{\rho\mu} \frac{\partial u}{\partial y} (u - u_s) \mathbf{j}, \quad q_s = 4\pi\sigma\lambda(T - T_s)D$$

$$G = 1 + \frac{1}{6} \operatorname{Re}_s^{2/3}, \quad D = 1 + 0.3 \operatorname{Re}_s^{1/2} \operatorname{Pr}^{1/3}, \quad \operatorname{Re}_s = \frac{2\sigma\rho|\mathbf{V} - \mathbf{V}_s|}{\mu}, \quad \operatorname{Pr} = \frac{c_p\mu}{\lambda}$$

Здесь \mathbf{V} и \mathbf{V}_s – скорости газа и капель, ρ и p – плотность и давление несущей фазы, c_p и c_s – теплоемкости газа и вещества капель, R – газовая постоянная, J – поток массы с поверхности капли за счет испарения в единицу времени, T – температура газовой фазы, T_s – температура вещества капели, осредненная по ее объему, \mathbf{f}_s – сила, действующая на каплю со стороны несущей фазы, \mathbf{j} – единичный вектор оси ординат, перпендикулярной стенке, q_s – приток тепла к поверхности капли со стороны газовой фазы, H – скрытая удельная теплота парообразования, τ^{ij} – компоненты тензора касательных напряжений, e^{ij} – компоненты тензора скоростей деформации, δ^{ij} – символы Кронекера, \mathbf{e}_i – единичные векторы базиса, Pr – число Прандтля, Re_s – число Рейнольдса обтекания капель. Условия применимости аналогичной модели, включая оценки справедливости предположения о постоянстве температуры капель во всей области течения, подробно обсуждались в [1] и [5]. В межфазном обмене импульсом и энергией учтены поправки на конечность числа Рейнольдса обтекания капель в форме Клячко и Ранца-Маршалла [7]. Помимо силы Стокса с поправкой Клячко, учитывается подъемная сила Сэфмана [8], роль которой велика в пограничном слое, где существенны поперечные градиенты скорости обтекания капель [7].

Принимается, что в невозмущенном потоке имеет место скоростное ($\mathbf{V} = \mathbf{V}_s = \mathbf{V}_0 = (u_0, 0)$), температурное $T = T_s = T_0$ и термодинамическое равновесие фаз (радиус σ_0 и числовая плотность капель n_{s0} постоянны).

Следует отметить, что при движении испаряющихся капель в инородном газе игнорируется зависимость теплофизических параметров и коэффициентов переноса смеси от концентрации паров вещества капель. Это оправдано лишь в рассматриваемом случае небольших массовых концентраций примеси.

2. ДВУХФАЗНОЕ ТЕЧЕНИЕ С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ ВО ВНЕШНЕЙ НЕВЯЗКОЙ ОБЛАСТИ

Считается, что число Рейнольдса Re , посчитанное по параметрам набегающего потока и длине скоростной релаксации l_v^* , введенной в (2.1), достаточно велико, так что всю область течения можно разбить на область эффективно невязкого течения и область асимптотического пограничного слоя. Вне пограничного слоя в уравнениях (1.1) можно пренебречь диссипативными слагаемыми и подъемной силой Сэфмана. В декартовой системе координат (x^*, Y^*) , связанной с некоторой точкой на плоской стенке, уравнения модели (1.1) для внешнего двумерного течения переписываются в безразмерном виде, при этом все искомые параметры отнесены к их значениям в невозмущенном потоке:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{l_v^*}, & Y &= \frac{Y^*}{l_v^*}, & u &= \frac{u^*}{u_0^*}, & v &= \frac{v^*}{u_0^*}, & \rho &= \frac{\rho^*}{\rho_0^*}, & T &= \frac{T^*}{T_0^*}, & p &= \frac{p^*}{\rho_0^* R T_0^*} \\ \mu &= \frac{\mu^*}{\mu_0^*}, & \lambda &= \frac{\lambda^*}{\lambda_0^*}, & u_s &= \frac{u_s^*}{u_0^*}, & v_s &= \frac{v_s^*}{u_0^*}, & T_s &= \frac{T_s^*}{T_0^*}, & n_s &= \frac{n_s^*}{n_{s0}^*}, & \sigma &= \frac{\sigma^*}{\sigma_0^*} \end{aligned}$$

$$l_v^* = \frac{m_0^* u_0^*}{6\pi\sigma_0^* \mu_0^*}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial Y} = \alpha a \lambda n_s \sigma (T - 1) D, \quad \frac{\partial(n_s u_s)}{\partial x} + \frac{\partial(n_s v_s)}{\partial Y} = 0$$

$$\sigma^2 \left(u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial Y} \right) = \mu (u - u_s) G, \quad \sigma^2 \left(u_s \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial Y} \right) = \mu (v - v_s) G$$

$$\sigma \left(u_s \frac{\partial \sigma}{\partial x} + v_s \frac{\partial \sigma}{\partial Y} \right) = \frac{a \mu (1 - T) D}{3}$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial Y} \right) = -\frac{1}{\gamma M_0^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha \mu n_s \sigma (u_s - u) G + \alpha a \lambda n_s \sigma (T - 1) D (u_s - u)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial Y} \right) = -\frac{1}{\gamma M_0^2} \frac{\partial p}{\partial Y} + \alpha \mu n_s \sigma (v_s - v) G + \alpha a \lambda n_s \sigma (T - 1) D (v_s - v)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial Y} \right) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial Y} \right) + \frac{2\alpha}{3 \text{Pr}} n_s \sigma \lambda (1 - T) D + \alpha (\gamma - 1) M_0^2 n_s \mu \sigma G [(u - u_s)^2 + (v - v_s)^2] -$$

$$- \alpha a \sigma \lambda n_s (T - 1)^2 D + \frac{1}{2} \alpha a (\gamma - 1) M_0^2 \lambda n_s \sigma (T - 1) D [(u - u_s)^2 + (v - v_s)^2]$$

$$T_s = 1, \quad p = \rho T, \quad \lambda = \mu = T^\omega$$

$$\alpha = \frac{m_0^* n_{s0}^*}{\rho_0^*}, \quad a = \frac{2c_p T_0^*}{3H \text{Pr}}, \quad \text{Pr} = \frac{c_p \mu_0^*}{\lambda_0^*}, \quad M_0 = \frac{U_0^*}{\sqrt{\gamma R T_0^*}},$$

$$\text{Re}_s = \text{Re}_{s0} \frac{2\sigma \rho}{\mu} \sqrt{(u - u_s)^2 + (v - v_s)^2}, \quad \text{Re}_{s0} = \frac{2\sigma_0^* \rho_0^* \mu_0^*}{\mu_0^*}.$$

Здесь все переменные величины, кроме отмеченных звездочками, являются безразмерными. В качестве масштаба длины выбрана характерная длина скоростной релаксации капли начального радиуса при стоксовском законе сопротивления l_v^* . Система уравнений (2.1) содержит следующие независимые параметры подобия: показатель адиабаты газовой фазы γ , число Маха M_0 , посчитанное по скорости несущей фазы в невозмущенном потоке, число Прандтля газа Pr , число Рейнольдса обтекания капли Re_{s0} , характеризующее отклонение закона сопротивления капли от стоксовского, относительную массовую концентрацию капель в невозмущенном потоке α , параметр a , характеризующий скорость испарения капель, и степенной показатель ω .

В невозмущенном потоке имеем

$$v = v_s = 0, \quad u = T = \rho = u_s = n_s = \sigma = 1$$
(2.2)

Двухфазное течение за прямым скачком

В качестве первого примера внешнего невязкого течения, которое может сформироваться вблизи стенки при отражении падающей косої волны уплотнения, рассмотрим течение за ножкой Маха, появляющейся при достаточно больших углах падения косої волны на стенку. В общем случае ножка Маха криволинейна, однако она приходит на стенку под прямым углом, поэтому, рассматривая локальную область течения вблизи стенки, можно считать ножку Маха прямой ударной волной. Тогда внешнее течение можно считать одномерным и положить в (2.1) $v = v_s = 0$. При этом система (2.1) превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений и возникает постановка задачи о структуре нормальной волны уплотнения в газе с испаряющимися каплями, подробно рассмотренная в [1]. Как отмечалось в [1], в газокapельной смеси структура зоны релаксации в волне уплотнения отличается для волн с частичной и полной дисперсией параметров. Первый случай соответствует сверхзвуковой скорости несущей фазы, посчитанной по нормальной к волне компоненте ($M_0 > 1$). При этом возникает сильный разрыв (ударная волна) в параметрах несущей фазы, за которым следует зона релаксации скоростей и

температур фаз. Постановки и методы численного решения задач о структуре волн с частичной и полной дисперсией отличаются. При расчете структуры волн с частичной дисперсией безразмерные параметры несущей фазы сразу за газодинамическим разрывом находятся из стандартных соотношений Рэнкина–Гюгонио для газа

$$\begin{aligned} \rho_+ &= \frac{(\gamma + 1)M_0^2}{2 + (\gamma - 1)M_0^2}, & u_+ &= \frac{2 + (\gamma - 1)M_0^2}{(\gamma + 1)M_0^2} \\ T_+ &= \frac{[2\gamma M_0^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_0^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_0^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь индекс “плюс” отмечает безразмерные значения параметров среды сразу за фронтом газодинамического разрыва. На ударной волне параметры дисперсной фазы непрерывны ввиду предполагаемой достаточной инерции капель:

$$u_{s+} = n_{s+} = \sigma_+ = 1 \quad (2.4)$$

Таким образом, из (2.1) получаем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями (2.3)–(2.4). Указанная задача решалась численно методом Рунге–Кутты.

Волны с полной дисперсией параметров возникают в случае, когда по параметрам несущей фазы поток дозвуковой ($M_0 < 1$), но эффективное число Маха равновесной смеси больше единицы ($M_{ef} > 1$) [6]. Эффективные параметры: безразмерная плотность, показатель адиабаты и число Маха, – определяются следующим образом [6]:

$$\rho_{ef} = (1 + \alpha)\rho, \quad \gamma_{ef} = \gamma \frac{1 + \alpha\chi}{1 + \alpha\gamma\chi}, \quad M_{ef}^2 = M_0^2 \frac{(1 + \alpha)(1 + \alpha\gamma\chi)}{(1 + \alpha\chi)}, \quad \chi = \frac{c_p}{c_s}$$

В случае волны с полной дисперсией соотношения (2.2) являются граничными условиями на левой границе расчетной области, а условия на правой границе находятся из обобщенных условий Рэнкина–Гюгонио, полученных в [1], для эффективных значений числа Маха и показателя адиабаты (детали см. в [1]). Таким образом, в случае волны с полной дисперсией для одномерного варианта системы (2.1) получаем краевую задачу. Левые и правые граничные условия заданы в особых точках дифференциальных уравнений, что затрудняет непосредственный расчет искомого решения, поэтому был использован следующий численный алгоритм. Система уравнений (2.1) была дополнена производными искомым параметром по фиктивному времени. Полученная система в частных производных решалась методом установления с использованием конечно-разностной схемы Мак–Кормака [9]. Точность всех расчетов контролировалась последовательным увеличением числа расчетных узлов сетки. Поскольку основной целью работы была оценка максимально возможного влияния жидких капель на температуру стенки, численные расчеты проводились лишь для режимов, когда в волне не происходит полного испарения капель.

Некоторые результаты расчетов структуры зоны релаксации в прямых волнах с частичной и полной дисперсией приведены в [1]. Ниже также представлены типичные рассчитанные распределения параметров фаз в зоне релаксации в области прямого скачка с частичной (рис. 1а) и полной (рис. 1б) дисперсией параметров. В численных расчетах использованы значения относительной массовой концентрации капель $\alpha_0 = 0.05$, $Re_{s0} = 100$, $a = 0.1$ и чисел Маха $M_0 = 1.2$ (а) и $M_0 = 0.98$ (б). Во всех расчетах, представленных в статье, остальные безразмерные параметры таковы: $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.72$, $\omega = 0.5$. Видно, что зона релаксации в волне с полной дисперсией гораздо шире, чем в волне с частичной дисперсией параметров. В обоих случаях распределение температуры несущей фазы имеет выраженный локальный максимум. Предельные (при больших x) безразмерные значения плотности газа и концентрации капель отличаются за счет вклада источника члена в уравнении неразрывности несущей фазы. Релаксация скоростей фаз происходит на масштабе всего нескольких длин релаксации капель ($x \sim 5$), поэтому u и u_s не приведены на рис. 1. Уменьшение радиуса капель за счет испарения при $M_0 = 1.2$ достигает 20%.

Ниже, в разд. 3 распределения параметров фаз в зоне релаксации за ударной волной используются в качестве внешних граничных условий при расчетах течений в двухфазном пограничном слое.

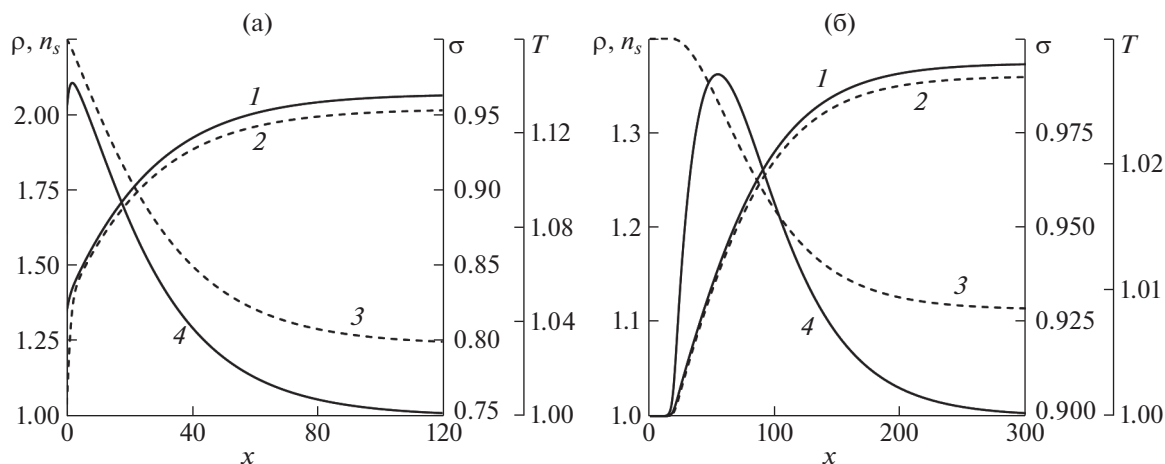


Рис. 1. Распределения безразмерных параметров фаз: плотности газа ρ , числовой концентрации капель n_s , радиуса капель σ и температуры газа T (кривые 1–4 соответственно) в зоне релаксации за прямой ударной волной (а) и в волне с полной дисперсией (б).

Двухфазное течение при регулярном отражении косой ударной волны

Для косых ударных волн важным параметром является число Маха, посчитанное по скорости, перпендикулярной поверхности волны M_{n0} . Для волны, приходящей на стенку под углом φ_0 , $M_{n0} = M_0 \sin \varphi_0$. При численном расчете двумерных течений с ударными волнами использовался метод установления по фиктивному времени. Уравнения (2.1) с соответствующими производными искомыми параметрами по фиктивному времени, добавленными в левую часть, решались конечно-разностным методом Мак–Кормака с “искусственной вязкостью” [9]. При заданных параметрах среды, числе Маха и угле падения волны на стенку из обобщенных соотношений Рэнкина–Гюгонио [1] находились число Маха и угол отраженной волны. В качестве начального приближения вдали от стенки задавались параметры, соответствующие структуре зон релаксации за соответствующими падающей и отраженной косыми волнами. В процессе установления численного решения по времени находилась структура течения в окрестности точки падения волны на стенку. Все численные расчеты проводились с необходимым контролем сеточной сходимости результатов в рамках точности значащих цифр, представленных на рисунках величин.

На рис. 2 показаны картины рассчитанных параметров течения для трех характерных примеров: (а) падающая и отраженная волны являются волнами с полной дисперсией; (б) падающая волна есть волна с частичной дисперсией, а отраженная – волна с полной дисперсией; (в) падающая и отраженная волны являются волнами с частичной дисперсией. Начало координат на стенке соответствует условной середине зоны релаксации падающего на стенку скачка. Численные расчеты приведены для начального значения массовой концентрации капель $\alpha_0 = 0.05$, угла падения волны $\varphi_0 = 30^\circ$ и чисел Маха падающей волны (по нормальной скорости): $M_{n0} = 0.96$ (а), $M_{n0} = 1.004$ (б) и $M_{n0} = 1.1$ (в); все наборы параметров соответствуют неполному испарению капель за отраженной волной. Видно, что волны с полной дисперсией имеют значительно большую ширину и более размытую структуру по сравнению с волнами с частичной дисперсией. С увеличением числа Маха падающей волны увеличивается градиент параметров “внутри” волн, а также возрастает максимальная температура газа в локальной окрестности взаимодействия волн со стенкой.

Типичные результаты расчетов траекторий инерционных капель при регулярном отражении косой ударной волной от стенки представлены на рис. 3. Видно, что капли не успевают развернуться параллельно стенке за отраженной ударной волной, что приводит к возникновению протяженной зоны инерционного осаждения капель и формированию тонкой пленки жидкости.

В заключение данного раздела приведем характерные значения параметров, представляющие интерес для приложений. Рассматривается модельная ситуация, в которой набегающий сверхзвуковой поток имеет статическую температуру $T_0^* = 300^\circ \text{K}$ и давление в одну атмосферу. Влажность несущей фазы невелика, поэтому ее параметры можно взять как у чистого воздуха:

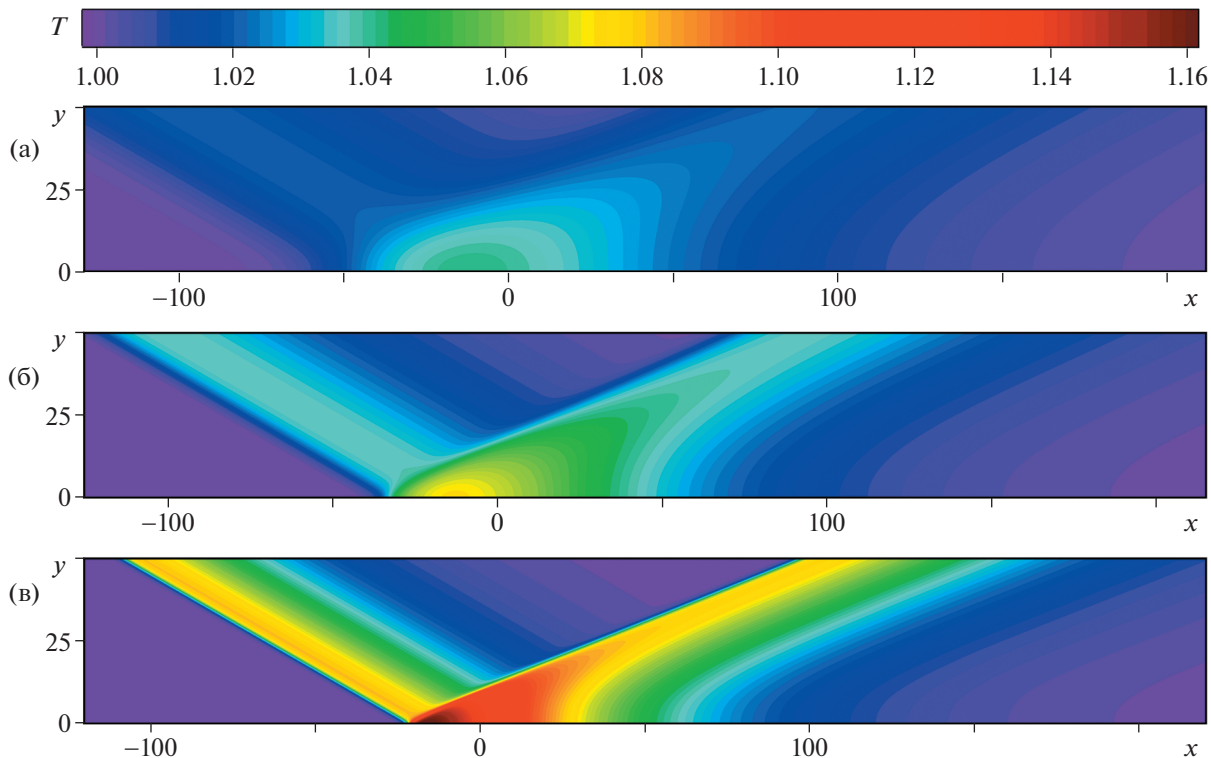


Рис. 2. Поля температуры в области регулярного отражения косой волны уплотнения от стенки при $\alpha_0 = 0.05$ для трех режимов: (а) $M_{n0} = 0.96$: падающая и отраженная волны являются волнами с полной дисперсией, (б) $M_{n0} = 1.004$: только отраженная волна является волной с полной дисперсией, (в) $M_{n0} = 1.1$: падающая и отраженная волна – волны с частичной дисперсией.

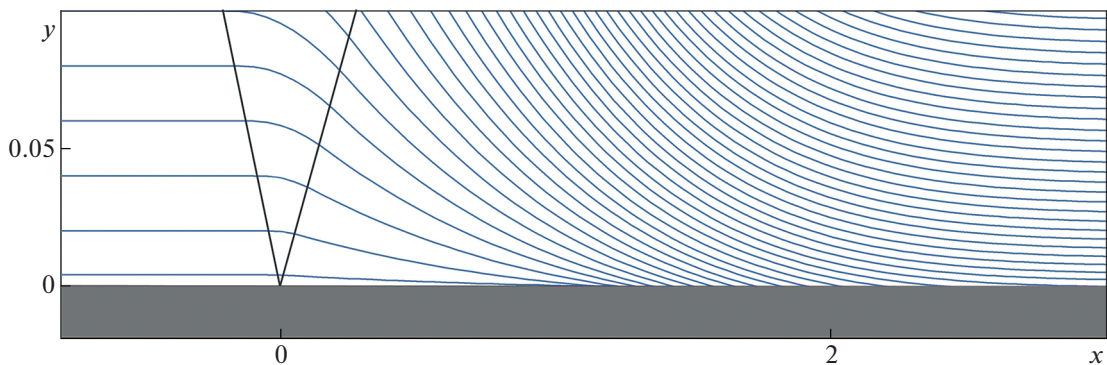


Рис. 3. Типичная картина траекторий капель, оседающих на стенку, в области регулярного отражения косой ударной волной от стенки при $M_{n0} = 2.5$, $\alpha_0 = 0.01$, $a = 0.1$, $Re_{s0} = 100$, $\phi_0 = 30^\circ$; жирные сплошные линии – положения газодинамических разрывов.

$c_p = 1.012$ дж/(г \times град), $\mu_0^* = 1.86 \times 10^{-4}$ г/(см \cdot с). Удельная теплота испарения воды $H = 2430$ дж/г, плотности фаз $\rho_0^* = 1.165 \times 10^{-3}$ г/см³ и $\rho_{s0}^* = 0.996$ г/см³, скорость звука равна 340 м/с.

В табл. 1 представлены характерные значения некоторых параметров для течения вне и внутри погранслоя при $M_0 = 1$.

Здесь B – безразмерный коэффициент перед силой Сэфмана, описанный в следующем параграфе, Re – число Рейнольдса, посчитанное по длине скоростной релаксации фаз. Поскольку и

Таблица 1

| $\sigma \times 10^4$ см | 0.5 | 1 | 3 | 5 | 10 |
|-------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Re_{s0} | 21 | 42 | 126 | 210 | 420 |
| l_v , см | 0.171 | 0.684 | 6.156 | 17.1 | 68.4 |
| Re | 3.591×10^4 | 1.436×10^5 | 1.326×10^6 | 3.591×10^6 | 1.436×10^7 |
| B | 43.3 | 122.46 | 636.3 | 1 369.1 | 3 872.4 |

число Рейнольдса частицы, и длина релаксации пропорциональны скорости газа, их значения для других чисел Маха потока можно получить умножением табличных значений на соответствующее число Маха. Для приведенных выше размерных параметров коэффициент a , характеризующий скорость испарения капель, приблизительно равен 0.115. Видно, что масштаб зон релаксации параметров фаз в ударных волнах быстро увеличивается с ростом размера капель – релаксируемые в эксперименте длины зон релаксации соответствуют каплям микронного размера.

3. ТЕЧЕНИЕ В ДВУХФАЗНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Сформулируем теперь уравнения двухфазного пограничного слоя за точкой падения ударной волны на стенку, предполагая режим течения в пограничном слое ламинарным. Рассчитанные выше течения газочапельной смеси в “невязкой” области считаются “внешними” решениями по отношению к пограничному слою и используются в качестве внешних граничных условий.

Режим отсутствия инерционного осаждения капель на стенку из внешнего потока

Как следует из асимптотической теории двухфазного пограничного слоя [7], в рамках двухжидкостной модели уравнения двухфазного пограничного слоя принципиально отличаются для режимов с наличием и отсутствием инерционного осаждения дисперсной фазы на стенку из внешнего потока. В первом случае нормальная скорость капель на стенке v_{se} , найденная из внешнего невязкого решения, конечна, а во втором случае исчезающе мала ($v_{se} \rightarrow 0$). Рассмотрим сначала второй случай, который реализуется при маховском отражении ударной волны. Введем декартову координату Ox , направленную вдоль стенки с началом в точке падения волны (середины зоны релаксации) и “растянутые” координату и вертикальные скорости фаз в пограничном слое:

$$y = \frac{y^* \sqrt{Re}}{l_v}, \quad Re = \frac{\rho_0^* u_0^* l_v}{\mu_0^*}, \quad v = \frac{v^* \sqrt{Re}}{u_0^*}, \quad v_s = \frac{v_s^* \sqrt{Re}}{u_0^*} \quad (3.1)$$

Остальные безразмерные переменные вводятся как в разделе 2. Переписав уравнения (1.1) в безразмерном виде с использованием растянутых переменных и переходя к пределу $Re \rightarrow \infty$, для главных членов разложения решения по величине, обратной числу Рейнольдса, получаем уравнения двухфазного пограничного слоя (более детально процедура вывода уравнений двухфазного пограничного слоя методом сращиваемых асимптотических разложений описана в [7]):

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = \alpha a \lambda n_s \sigma (T - 1) D \quad (3.2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\gamma M_0^2} u \frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \alpha \mu n_s \sigma (u - u_s) G + \alpha a \lambda n_s \sigma D (T - 1) (u_s - u)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} u \frac{dp_e}{dx} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial y} \right) + (\gamma - 1) M_0^2 \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{2\alpha}{3 Pr} n_s \sigma \lambda D (1 - T) + \alpha (\gamma - 1) M^2 n_s \sigma \mu G (u - u_s)^2 - \alpha a \sigma \lambda n_s D (1 - T)^2 + \frac{1}{2} \alpha a (\gamma - 1) M^2 \lambda n_s \sigma D (T - 1) (u - u_s)^2$$

$$\rho T = p_e(x), \quad \lambda = \mu = T^{\omega}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_s u_s}{\partial x} + \frac{\partial n_s v_s}{\partial y} &= 0, & u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial y} &= \frac{\mu(u - u_s)G}{\sigma^2} \\ u_s \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial y} &= \frac{\mu(v - v_s)G}{\sigma^2} + B \frac{(u - u_s)}{\sigma} \sqrt{\mu \rho} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \\ u_s \frac{\partial \sigma}{\partial x} + v_s \frac{\partial \sigma}{\partial y} &= \frac{a\mu(1 - T)D}{3\sigma} \\ \alpha &= \frac{mn_{s0}^*}{\rho_0^*}, & a &= \frac{2c_p T_0^*}{3H \text{Pr}}, & M_0 &= \frac{U_0^*}{\sqrt{\gamma R T_0^*}}, & \text{Pr} &= \frac{c_p \mu_0^*}{\lambda_0^*}, & B &= \frac{6.46}{12\pi\sqrt{6}} \left(\frac{2\sigma_0^* \rho_0^* U_0^*}{\mu_0^*} \right)^{3/2} \left(\frac{2\rho_{s0}^*}{\rho_0^*} \right)^{1/4} \\ \text{Re}_s &= \text{Re}_{s0} \frac{\sigma \rho |u - u_s|}{\mu}, & \text{Re}_{s0} &= \frac{2\sigma_0^* \rho_0^* U_0^*}{\mu_0^*} \end{aligned}$$

Здесь $p_e(x)$ – распределение безразмерного давления внешнего потока на стенке, вычисленное из решения системы (2.1). Видно, что в дополнение к ранее введенным параметрам подобия добавляется параметр B , который характеризует относительный вклад подъемной силы Сэфмана в межфазный обмен импульсом. Приближенно величину параметра B из (3.2) можно выразить следующим образом

$$B \approx 0.0832 \text{Re}_{s0}^{3/2} \left(\frac{\rho_{s0}^*}{\rho_0^*} \right)^{1/4}$$

Если считать фиксированным отношение плотностей фаз, то параметры B и Re_{s0} не являются независимыми. В рассматриваемых условиях течения роль силы Сэфмана очень велика, так как даже для малых капель размером в несколько микрон величина параметра B в высокоскоростном пограничном слое достигает величин порядка 10^2 – 10^3 .

Сформулируем теперь граничные условия для системы (3.2). Поскольку подсистема уравнений, описывающих пограничный слой несущей фазы в (3.2), является параболической, для параметров газа следует задать профили продольной скорости и температуры в начальном сечении, условия срачивания скорости и температуры с внешним потоком, найденным из решения (2.1), а также условия прилипания и адиабатичности на стенке. Подсистема, описывающая поведение дисперсной фазы, является гиперболической. Характеристики этой системы – траектории капль, поэтому в начальном сечении ($x = 0$) следует задать все параметры дисперсной фазы. Так как основной целью является исследование теплообмена в достаточно протяженной области за точкой падения волны на стенку, для простоты будем пренебрегать структурой течения на малых масштабах взаимодействия ударной волны в газе с пограничным слоем и толщиной пограничного слоя в начальном сечении расчетной области. Тогда на левой границе расчетной области имеем:

$$x = 0, \quad y > 0: \quad u = T = n_s = \sigma = 1 = u_s = 1, \quad v_s = 0. \quad (3.3)$$

Условия срачивания с внешним невязким потоком таковы:

$$y \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow u_e(x), \quad T \rightarrow T_e(x). \quad (3.4)$$

Индекс e , как и ранее, относится к параметрам невязкого потока на стенке. Возникает определенная сложность с формулировкой граничных условий для уравнений пограничного слоя на стенке. Типичной является ситуация, когда в пограничном слое за счет действия боковой силы Сэфмана капли оседают на стенку и формируют жидкую пленку. Поскольку максимальное снижение равновесной температуры стенки достигается именно при наличии пленки [5], ниже ограничимся лишь этим случаем. На рис. 4б,г представлены типичные картины траекторий капль, рассчитанные для течения в пограничном слое за прямым скачком, а также для сравнения приведены траектории в пограничном слое при отсутствии ударных волн (рис. 4а,в). Считается, что в последнем случае параметры течения фаз постоянны во внешней области, а значения определяющих параметров M_0 , α_0 и a взяты такими же, как и перед скачком в первом случае. Детали используемого численного метода можно найти в [5]. Под воздействием силы Сэфмана капли выпадают на поверхность на ограниченном участке стенки за скачком уплотнения. Причем при наличии прямой волны участок, на котором капли выпадают на стенку, может быть короче (см.

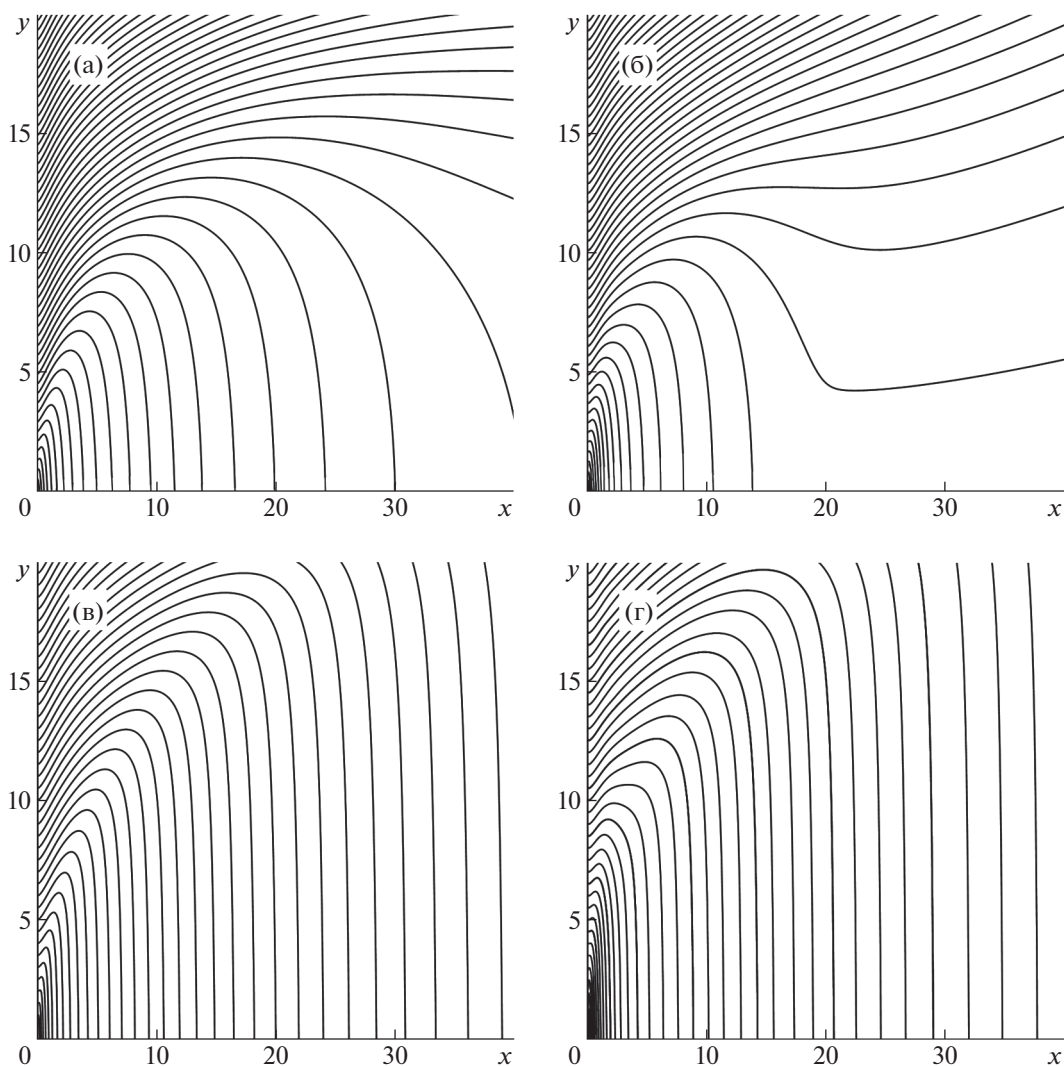


Рис. 4. Траектории капель в пограничном слое при $M_0 = 1.2$, $\alpha_0 = 0.02$, $a = 0.1$ в отсутствие волн (а, в) и за прямым маховским скачком (б, г), для значений параметра $B = 100$ (а, б), 1000 (в, г); положение скачка уплотнения совпадает с левой границей расчетной области.

рис. 4а и 4б), поскольку интенсивность испарения капель выше, и величина силы Сэфмана уменьшается для более мелких капель.

Вероятность формирования пленки максимальна именно на начальном участке, где вклад боковой силы Сэфмана наиболее значителен. По мере развития и утолщения пограничного слоя уменьшаются величина сдвига скорости и вклад боковой силы Сэфмана. В результате в некоторой точке оседание капель прекращается. С учетом испарения жидкости с поверхности пленки ее протяженность на стенке должна быть конечной. Как показано ниже, наличие пленки приводит к максимальному эффекту снижения равновесной температуры стенки до температуры капель, оседающих на пленку, поэтому длина зоны существования пленки представляет наибольший интерес.

Толщина пленки стремится к нулю в точке x_m^* , где суммарный поток массы жидкости в пленке стремится к нулю, т.е. выполняется условие

$$\int_0^{x_m^*} \left(m_w^* r_w^* |v_{sw}^*| - \lambda_w^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) / H dx^* = 0 \quad (3.5)$$

Поскольку в работе рассматриваются лишь малые концентрации жидкой фазы в набегающем потоке, считается, что толщина пленки много меньше толщины пограничного слоя, а скорость

жидкости в ней очень мала по сравнению с характерной скоростью газа в пограничном слое. При таких условиях течение в пленке описывается уравнениями ползущего гомобарического течения в тонком слое неизвестной толщины $h^*(x^*)$ с заданными потоками массы, импульса и энергии на его внешней границе (более подробный вывод и обсуждение уравнений пленки можно найти в [5]):

$$\frac{\partial u_f^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v_f^*}{\partial y^*} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_f^*}{\partial y^{*2}} = 0, \quad \frac{\partial^2 T_f^*}{\partial y^{*2}} = 0 \quad (3.6)$$

$$h^*(x^*) = \sqrt{\frac{2\mu_f^*}{\rho_{s0}^* \tau^*} \int_0^{x^*} \left(m_w^* n_{sw}^* |v_{sw}^*| - \lambda_w^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \Big|_w / H \right) dx^*}, \quad \tau^* = \mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \Big|_w + m_w^* n_{sw}^* |v_{sw}^*| u_{sw}^*$$

Если ввести безразмерные переменные как в пограничном слое (3.1), а толщину пленки отнести к

$$l_v \sqrt{\frac{\mu_f^* \rho_0^*}{\mu_0^* \rho_{s0}^* \text{Re}}}, \quad (3.7)$$

то безразмерная толщина пленки вычисляется по формуле

$$h(x) = \sqrt{\frac{2}{\tau_0} \int_0^x j_\Sigma dx}, \quad \tau = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_w + \alpha \sigma_w^3 n_{sw} |v_{sw}| u_{sw}, \quad j_\Sigma = \alpha \sigma_w^3 n_{sw} |v_{sw}| - \frac{3}{2} a \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_w$$

По сути, задача о нахождении толщины и течения в пленке отделяется от основной задачи о течении в пограничном слое. Так как стенка предполагается адиабатической, производная температуры по вертикальной координате на стенке в пленке равна нулю. Из (3.6) в этом случае следует, что течение в пленке изотермическое. Считается, что поток тепла в пленку от несущего газа затрачивается на испарение жидкости на границе пленки. Приравнявая нулю поток энергии, забираемый оседающими на пленку каплями $Q_s^* = -\rho_{sw}^* v_{sw}^* c_s (T_0^* - T_f^*) = 0$, получаем важный вывод: при наличии пленки равновесная температура адиабатической стенки T_w^* равна температуре пленки T_f^* и равна температуре оседающих на пленку капель T_0^* .

Таким образом, в области существования пленки граничное условие для уравнений пограничного слоя (3.1) на адиабатической стенке в безразмерном виде принимает вид

$$y = 0: \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T = 1 \quad (3.8)$$

При отсутствии пленки (быстрое испарение, малый поток массы капель на стенку) граничные условия адиабатичности имеют более сложный вид (см. [5]).

На рис. 5а–г приведены численные расчеты типичных распределений параметров потока в двухфазном пограничном слое за прямой маховской ножкой для набора определяющих параметров $M_0 = 1.2$, $\alpha_0 = 0.02$, $a = 0.1$, $B = 100$. Температура газа на стенке принимает минимальное значение $T = 1$ в зоне наличия пленки (рис. 5а, кривые 1–4), а за точкой испарения пленки она начинает расти (рис. 5а, кривая 5). После некоторого значения x капли полностью испаряются в пограничном слое, и вблизи стенки образуется область чистого газа (рис. 5б, кривая 5). Распределение поперечной компоненты скорости капель на рис. 5в демонстрирует влияние на скорость оседания капель силы Сэфмана, существенной в начале зоны формирования пограничного слоя. При больших значениях x размер капель и рассогласование скоростей фаз снижаются, и уменьшается интенсивность осаждения капель на стенку. Продольные скорости фаз релаксируют друг к другу на небольших расстояниях ($x \sim 5$), поэтому они не приведены на рис. 5.

Поскольку наличие пленки на обтекаемой адиабатической стенке приводит к максимальному снижению ее равновесной температуры, были проведены расчеты толщины пленки на стенке при наличии и в отсутствие прямой волны, приходящей на стенку (рис. 6). Расчеты показали, что наличие маховской ножки приводит как к увеличению, так и к уменьшению области существования пленки при одинаковых остальных параметрах потока. Длина пленочного течения существенно зависит от числа Маха набегающего потока, величины силы Сэфмана (коэффициента B) и других определяющих параметров. В целом маховский режим отражения падающей

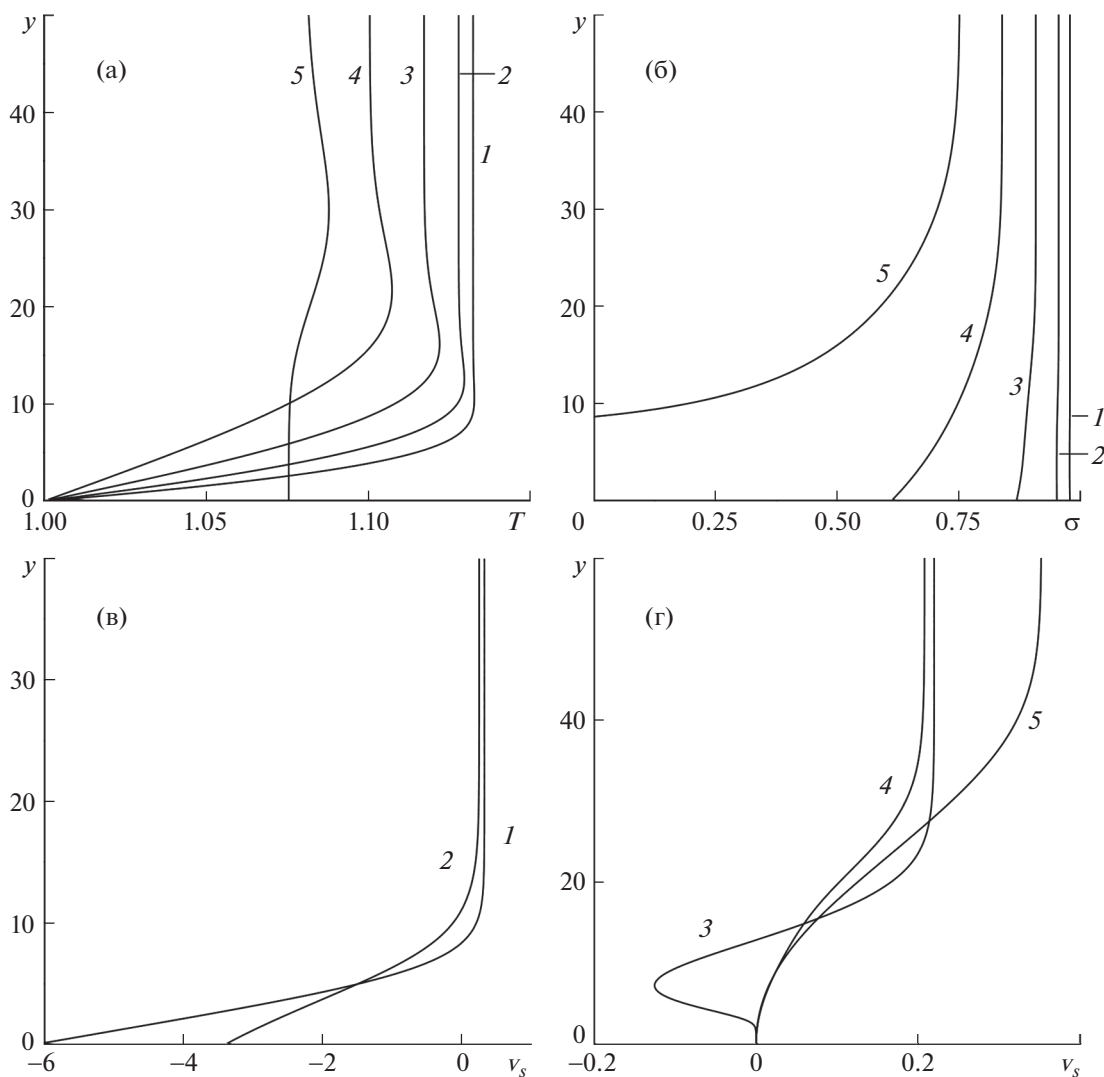


Рис. 5. Профили безразмерных температуры газа (а), радиуса капель (б) и поперечной скорости капель (в–г) в сечениях $x = 5, 10, 20, 35, 55$ (кривые 1–5 соответственно) за прямым скачком уплотнения при $M_0 = 1.2$, $\alpha_0 = 0.02$, $a = 0.1$, $B = 100$.

волны, по-видимому, не является перспективным с точки зрения снижения температуры стенки, обтекаемой газокпельным потоком.

Случай инерционного осаждения капель на стенку из внешнего невязкого потока

В случае, когда во внешнем “невязком” решении скорость капель на стенке не равна нулю, приближение двухфазного пограничного слоя значительно упрощается [7]. В этом случае в рамках погранслояного приближения капли проходят сквозь пограничный слой несущей фазы, сохраняя значения параметров, найденные из внешнего “невязкого” решения на стенке.

Определение длины существования пленки на стенке является многопараметрической задачей, но в основном, наличие пленки определяется потоком массы оседающих на стенку капель. Следует иметь в виду, что скорость осаждения капель на стенку в случае косых волн на порядок выше скорости осаждения капель из пограничного слоя в отсутствие ударных волн. Поэтому в качестве критерия, иллюстрирующего влияние косых ударных волн на эффективность снижения температуры стенки, был выбран безразмерный поток массы оседающих на стенку капель

$$J_1 = m_w^* n_w^* |v_{sw}^*| / m_0^* n_0^* u_0^*$$

Поскольку для большинства рассмотренных случаев поток массы жидкости, испаряющейся на границе пленки, мал по сравнению с потоком оседающих на пленку капель, величина J_1 поз-

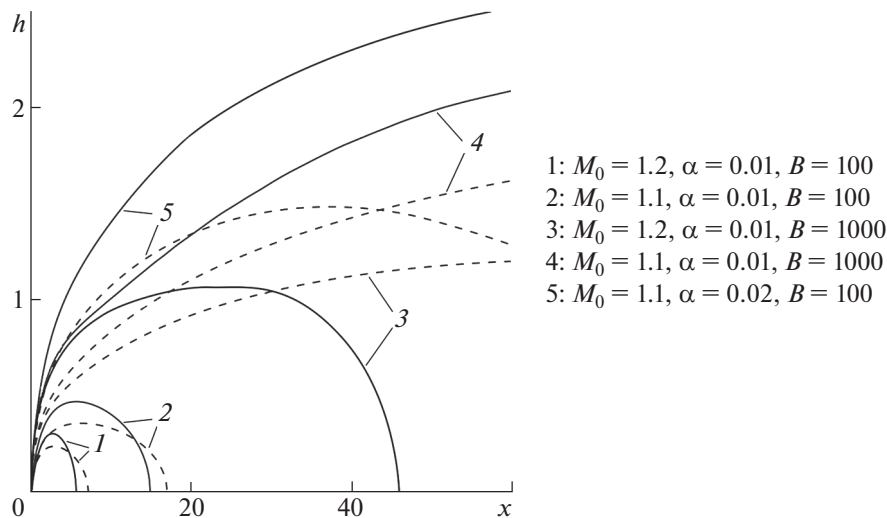


Рис. 6. Безразмерная толщина пленки (масштаб обезразмеривания (3.7)) на стенке в отсутствие (—) и при наличии (---) прямой волны уплотнения.

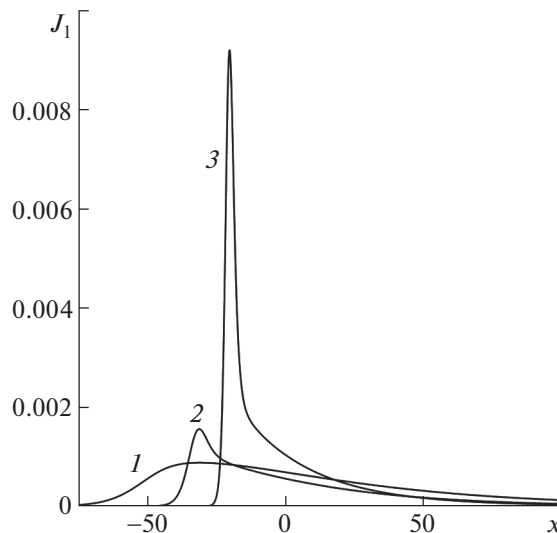


Рис. 7. Распределение безразмерного потока массы оседающих на стенку инерционных капель при отражении волны уплотнения от стенки; кривые 1–3 соответствуют режимам а–в, представленным на рис. 2.

воляет наглядно проследить влияние косых скачков уплотнения на длину зоны эффективного охлаждения стенки.

На рис. 7 показаны распределения потока массы капель вдоль стенки для трех различных наборов определяющих параметров, которые соответствуют трем режимам взаимодействия волны со стенкой, представленным выше на рис. 2. Видно, что при увеличении интенсивности падающей волны локальный рост потока массы жидкости на стенку резко усиливается благодаря более крутому повороту двухфазного потока за падающей волной, несмотря на одновременную интенсификацию процесса испарения капель, вызванную заметным ростом температуры вблизи стенки (рис. 2в).

Длины зон выпадения капель на стенку в данном случае заметно превосходят длины зон выпадения капель в отсутствие ударных волн. Поэтому схема течения с косыми ударными волнами является предпочтительной, и создание такой схемы в сверхзвуковом газокапельном потоке представляется перспективным направлением повышения эффективности энергоразделения в “трубе Леонтьева”. При этом, конечно, следует иметь в виду, что проведенные оценки основаны на предельной упрощенной схеме формирования пленочного течения, игнорирующей возможную турбулизацию пленки, ее разбрызгивание и образование вторичных капель.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках двухконтинуальной модели газок капельной среды с учетом испарения капель проведены численные расчеты структуры пристеночной зоны стационарного течения за точкой падения на адиабатическую плоскую стенку (i) прямой маховской ножки и (ii) косой ударной волны. Вся область течения разбита на зону внешнего невязкого потока и пристеночный двухфазный пограничный слой. Рассмотрены типичные случаи структуры течения в зоне релаксации за прямой маховской ножкой и за падающей косой волной при ее регулярном отражении от стенки для случаев волн с полной и частичной дисперсией параметров. Численные решения построены с использованием методов Рунге-Кутты для одномерных течений и Мак-Кормака для двумерных течений с ударными волнами. Параметрическое численное исследование динамической и тепловой структуры двухфазного пограничного слоя за точкой падения волны на стенку показало существенное влияние даже небольшой примеси жидких капель на температуру адиабатической стенки.

Установлено, что режим течения с формированием на стенке жидкой пленки соответствует максимальному эффекту снижения температуры адиабатической стенки до статической температуры набегающего сверхзвукового потока. Наличие прямой маховской ножки может приводить как к увеличению, так и к уменьшению потока массы оседающих на стенку капель. Это обусловлено конкуренцией двух процессов: активизации осаждения капель за счет силы Сэфмана из-за увеличения разности продольных скоростей фаз и активизации испарения капель за счет повышения температуры газа за ударной волной. Проведенные расчеты не выявили очевидных преимуществ схемы с прямой ударной волной с точки зрения увеличения зоны существования жидкой пленки на обтекаемой поверхности.

Для случая инерционного осаждения капель из внешнего потока, формирующегося при регулярном отражении косых волн от стенки, была вычислена величина безразмерного потока массы оседающих на стенку капель. Показано, что создание в потоке проходящих на стенку косых ударных волн увеличивает интенсивность осаждения капель и длину зоны формирования жидкой пленки.

Максимальные значения снижения температуры стенки по сравнению с течением чистого газа в расчетах могут достигать от нескольких процентов до 1.5 раз в зависимости от числа Маха и величины силы Сэфмана при исходных массовых концентрациях капель порядка 1–5%.

Работа выполнена по госбюджетному плану МГУ при финансовой поддержке гранта РФФИ № 19-19-00234.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубкина И.В., Осипцов А.Н. Волны уплотнения с полной и частичной дисперсией в газок капельных средах с фазовыми переходами // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 3. С. 44–55.
2. Леонтьев А.И. Газодинамический метод энергоразделения газовых потоков // Теплофизика высоких температур. 1997. Т. 35. № 1. С. 157–159.
3. Azanov G.M., Osipov A.N. The efficiency of one method of machineless gasdynamic temperature stratification in a gas flow // Int. J. Heat Mass Transfer. 2017. V. 106. P. 1125–1133. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.10.090>
4. Виноградов Ю.А., Здитовец А.Г., Киселев Н.А., Медвецкая Н.В., Попович С.С. Измерение адиабатической температуры стенки плоской пластины, обтекаемой сверхзвуковым воздушно-капельным потоком // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2020. № 5. С. 130–136. <https://doi.org/10.31857/S056852812005014X>
5. Golubkina I.V., Osipov A.N. Compressible gas-droplet flow and heat transfer behind a condensation shock in an expanding channel // Int. J. Thermal. Sci. 2022, V. 179, 107576. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2022.107576>
6. Marble F.E. Dynamics of dusty gases // Annu. Rev. Fluid Mech. 1970. V. 2. P. 397–446. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.02.010170.002145>
7. Osipov A.N. Mathematical modeling of dusty-gas boundary layers // Appl. Mech. Rev. 1997. V. 50. P. 357–370. <https://doi.org/10.1115/1.3101716>
8. Saffman P.G. Lift on a small sphere in a slow shear flow // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. P. 385. Corrigendum: J. Fluid Mech. 31 (1968), 628.
9. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х Т. М.: Мир, 1990. С. 728. (Tannehill J.C., Anderson D.A., Pletcher R.H., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer / (2-nd Edition. New York: Taylor & Francis, 1997. 803 p.)