

УДК 532.51

РАСЧЕТ ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ВОЛНИСТЫМИ ПОПЕРЕК ПОТОКА СТЕНКАМИ

© 2023 г. Ю. Я. Трифонов

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: trifonov@itp.nsc.ru

Поступила в редакцию 07.03.2023 г.

После доработки 16.04.2023 г.

Принята к публикации 06.06.2023 г.

Используя полные уравнения Навье–Стокса, рассмотрена линейная устойчивость плоского течения Пуазейля в канале с гофрированной нижней стенкой. Стенка гофрирована поперек потока, и основное течение имеет одну компоненту скорости. Возмущения полей скорости и давления являются трехмерными с двумя волновыми числами. Численно решается обобщенная задача на собственные значения. Найдено, что критическое число Рейнольдса, выше которого появляются нарастающие во времени возмущения, сложным образом зависит от безразмерной амплитуды и периода гофрирования. Величина отношения амплитуды и периода гофрирования разделяет область безразмерной амплитуды гофрирования на две, где зависимости критического числа Рейнольдса от параметров гофрирования качественно различны.

Ключевые слова: вязкое течение, гофрированные и волнистые стенки, устойчивость, ламинарно-турбулентный переход

DOI: 10.31857/S102470842360015X, **EDN:** GEZSYN

Течение в каналах с гофрированными стенками встречается во многих приложениях [1, 2] – компактные теплообменники и биореакторы, устройства охлаждения компонентов микроэлектроники, химические реакторы, топливные элементы, оксигенаторы крови и т.д. [3–5]. Диапазон возможных приложений затрагивает многие области современной техники и простирается от аэрокосмической отрасли до биологии [6]. Изменение волнистости стенок является одним из методов управления различными аспектами одно- и двухфазного течения в каналах. Например, риблеты (основной поток не пересекает гребни и впадины волнистой стенки) используются в целях снижения сопротивления и затягивания перехода к турбулентности при обтекании крыльев [7, 8]. Волновая поверхность раздела фаз, формируемая мелкой текстурой структурированных насадок при растекании по ней жидкой пленки, образует структуры для течения паровой фазы [9–11]. За их счет может происходить интенсивное перемешивание пара, что, в конечном итоге, определяет эффективность разделения нефти на фракции или воздуха на компоненты в дистилляционных колоннах, заполненных такими насадками [12]. Отметим, что в этом случае основной поток пересекает гребни и впадины волнистой стенки. Хорошее перемешивание и переход к турбулентности при малых числа Рейнольдса актуальны, также, для задач охлаждения в микроустройствах [3–5].

Проблема перехода к турбулентности является одной из фундаментальных задач современной механики [13]. Стационарное ламинарное течение в каналах с синусоидальными стенками (основной поток пересекает гребни и впадины стенки) численно исследовано в работе [3]. При большой амплитуде гофрирования появляются застойные зоны. Предсказанные отрывные структуры экспериментально наблюдались в работе [4]. Для аналогичной конфигурации стенок канала, в работах [14–16] продемонстрировано существование нестационарных колебаний отрывных зон. В дальнейшем в работах [17–19] продемонстрирован переход к турбулентности через появление аperiодических колебаний отрывных зон. При течении в канале, когда основной поток не пересекает гребни и впадины волнистой стенки, задача устойчивости рассматривалась в работах [7, 8, 20, 21]. Для второго случая (основной поток пересекает гребни волн) устойчивость рассчитывалась в работах [22–24]. Анализ проводился в рамках нестационарного расчета,

что предполагает “перебор” начальных данных и, как следствие, ограничивался вариацией параметров задачи в небольших диапазонах. В настоящей работе, решая уравнения Навье–Стокса, находится основное решение и производится линеаризация исходных нелинейных уравнений около этого решения. Затем, решая обобщенную задачу на собственные значения, анализируется весь возможный спектр возмущений. Это обеспечивает новизну и дает возможность для исследования устойчивости в широком диапазоне параметров задачи.

Математический и численный аппарат исследования был развит при рассмотрении двухфазного течения по гладким и волнистым поверхностям [25, 26], и адаптирован к задачам данной работы. Меняются граничные условия на верхней стенке, и отсутствует поверхность раздела.

Целью настоящей работы является анализ линейной устойчивости плоского течения Пуазейля в канале с гофрированной нижней стенкой. Стенка гофрирована поперек потока и основное течение в таком канале имеет одну компоненту скорости. Возмущения полей скорости и давления являются трехмерными с двумя волновыми числами. Проанализированы нейтральные кривые и наиболее опасные линейные возмущения при широких диапазонах изменений параметров гофрирования и числа Рейнольдса. В зависимости от параметров гофрирования, рассчитано критическое число Рейнольдса, выше которого основное течение неустойчиво и существуют нарастающие во времени возмущения.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Течение жидкости между двумя горизонтальными гофрированными (рис. 1) поверхностями, неограниченными в x - и z -направлениях, описывается системой уравнений Навье–Стокса с соответствующими граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ y = y_-(z); u = v = w &= 0 \\ y = y_+(z); u = v = w &= 0 \\ \left\langle \int_{y_-(z)}^{y_+(z)} u dy \right\rangle &= 1 \end{aligned}$$

Здесь $x = x^*/L$, $y = 2y^*/D$, $z = z^*/L$, $t = u_0 t^*/L$ – безразмерные координаты и время, $u = u^*/u_0$, $v = v^*/(\varepsilon u_0)$, $w = w^*/u_0$, $P = (P^* + \rho g y^*)/(\rho u_0^2)$ – безразмерные компоненты скорости в x -, y - и z -направлениях и давление соответственно. Звездочка означает размерную величину, $\text{Re} = u_0 D/(2\nu)$ – число Рейнольдса, $\varepsilon = D/(2L)$, L – период гофрирования, D – размер канала, $u_0 = 2U_{VS}$, где U_{VS} – средняя по всему сечению скорость потока. Форма гофрирования нижней и верхней стенки обозначена как $y_-(z)$ и $y_+(z)$, соответственно, ν – кинематическая вязкость, ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести, $\langle \dots \rangle$ – означает среднее по периоду гофрирования в z -направлении.

Для дальнейших расчетов делается преобразование координат $x = x$, $z = z$, $\eta = (y - f_+)/f_-$, где $f_+ = (y_+ + y_-)/2$, $f_- \equiv y_+ - f_+ = (y_+ - y_-)/2$. Область течения в новых переменных становится известной: $\eta \in [-1, 1]$. Ниже будем рассматривать два типа каналов: (1) верхняя стенка гладкая $y_- = -1 + \varepsilon_1 f(z)$, $y_+ = 1$ и (2) обе стенки гофрированные $y_- = -1 + \varepsilon_1 f(z)$, $y_+ = 1 - \varepsilon_1 f(z)$. Для обоих случаев $f(z) = (1 + \cos(2\pi z))/2$ и $\varepsilon_1 = 2A/D$.

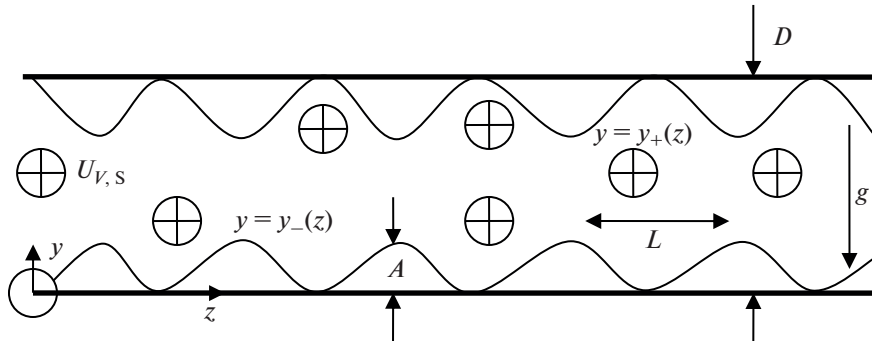


Рис. 1. Схема течения Пуазейля между двумя гофрированными поверхностями. Основной поток жидкости направлен вдоль оси x (перпендикулярно плоскости рисунка), верхняя и нижняя стенки являются периодически в z -направлении.

В новых переменных уравнения записываются следующим образом

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + (w\eta_z + v\eta_y) \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - Z + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \times \\
 & \times \left[\eta_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \eta_z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\eta_z \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \eta} + (\eta_{z\xi} + \eta_z \eta_{z\eta}) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \\
 & \varepsilon^2 \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} + (w\eta_z + v\eta_y) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = -\eta_y \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} + \\
 & + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left[\eta_y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \eta_z^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2\eta_z \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \eta} + (\eta_{z\xi} + \eta_z \eta_{z\eta}) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] \tag{1.1} \\
 & \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + (w\eta_z + v\eta_y) \frac{\partial w}{\partial \eta} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} - \eta_z \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \times \\
 & \times \left[\eta_y^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \eta_z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2\eta_z \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \eta} + (\eta_{z\xi} + \eta_z \eta_{z\eta}) \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\
 & v(t, x, z, \eta) = [\eta(f_-)_z + (f_+)_z] w(t, x, z, \eta) - \frac{\partial}{\partial x} \left(f_- \int_{-1}^{\eta} u(t, x, z, \eta') d\eta' \right) - \\
 & \quad - \frac{\partial}{\partial z} \left(f_- \int_{-1}^{\eta} w(t, x, z, \eta') d\eta' \right) \\
 & \eta = -1: u(t, x, z, \eta) = w(t, x, z, \eta) = 0 \\
 & \eta = 1: u(t, x, z, \eta) = w(t, x, z, \eta) = 0 \\
 & \left\langle f_-(z) \int_{-1}^1 u d\eta' \right\rangle = 1
 \end{aligned}$$

Здесь $P = Zx + \bar{P}$, $\eta_y = 1/f_-$, $\eta_z = -[\eta(f_-)_z + (f_+)_z]/f_-$, $\eta_{z\eta} = -(f_-)_z/f_-$, $\eta_{z\xi} = -(\eta_z(f_-)_z + \eta(f_-)_{zz} + (f_+)_{zz})/f_-$.

В задаче имеются три параметра – ε , ε_1 , Re , и безразмерная функция $f(z)$ для описания формы гофрирования. Далее, используя полиномы Чебышева и ряд Фурье, мы рассчитываем стационарные решения уравнений (1.1). Для нашего случая $[u(x, z, \eta), v(x, z, \eta), w(x, z, \eta), \bar{P}(x, z, \eta), Z] = [u_b(z, \eta), 0, 0, 0, Z]$

$$u_b(z, \eta) = \frac{1}{2}U_1(z) + \sum_{m=2}^M U_m(z)T_{m-1}(\eta),$$

$$U_m(z) = U_m^0 + \sum_{\substack{k=-N/2+1 \\ k \neq 0}}^{N/2-1} U_m^k \exp(2\pi i k z), \quad (U_m^{-k})^* = U_m^k, \quad m = 1, \dots, M.$$

Здесь $T_m(\eta)$ – полиномы Чебышева и “знак звездочки” означает комплексное сопряжение. Общее число неизвестных в уравнениях (1.1) для нашего случая составляет $M(N-1)$ гармоник поля скорости $u_b(z, \eta)$ и градиент давления Z . Численный алгоритм стартует с задания начального приближения U_m^k, Z . Далее, для уточнения начального приближения, используется итерационный метод Ньютона.

Подставляя

$$u = u_b(z, \eta) + \hat{u}(x, z, \eta) \exp(-\gamma t) + C.C., \quad v = \hat{v}(x, z, \eta) \exp(-\gamma t) + C.C.,$$

$$w = \hat{w}(x, z, \eta) \exp(-\gamma t) + C.C., \quad P = \hat{P}(x, z, \eta) \exp(-\gamma t) + C.C.$$

($C.C.$ – комплексно-сопряженная величина) в уравнения (1.1) и линеаризуя их около основного решения $[u_b(z, \eta), 0, 0, 0, Z]$, получаем систему уравнений для нахождения спектра собственных значений и решения задачи линейной устойчивости стационарного решения

$$\hat{v}(x, z, \eta) = [\eta(f_-)_z + (f_+)] \hat{w}(x, z, \eta) - \frac{\partial}{\partial x} \left(f_- \int_{-1}^{\eta} \hat{u}(x, z, \eta') d\eta' \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(f_- \int_{-1}^{\eta} \hat{w}(x, z, \eta') d\eta' \right)$$

$$\eta_y (\hat{P} - \hat{P}_0) = \int_{-1}^{\eta} \left\{ \gamma \varepsilon^2 \hat{v} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \left[\eta_y^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \eta'^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \left(\eta_z^2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \eta'^2} + 2\eta_z \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial z \partial \eta'} + \right. \right. \right. \right. \tag{1.2}$$

$$\left. \left. \left. + (\eta_{z\xi} + \eta_z \eta_{z\eta}) \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta'} \right) \right] - \varepsilon^2 u_b \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right\} d\eta' -$$

$$-\gamma \hat{u} = -\frac{\partial(\hat{P} - \hat{P}_0)}{\partial x} - \frac{\partial \hat{P}_0}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left[\eta_y^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \eta'^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \left(\eta_z^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \eta'^2} + 2\eta_z \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z \partial \eta'} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (\eta_{z\xi} + \eta_z \eta_{z\eta}) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta'} \right) \right] - \left(u_b \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \hat{w} \frac{\partial u_b}{\partial z} + (\hat{w} \eta_z + \hat{v} \eta_y) \frac{\partial u_b}{\partial \eta} \right) -$$

$$-\gamma \hat{w} = -\frac{\partial(\hat{P} - \hat{P}_0)}{\partial z} - \frac{\partial \hat{P}_0}{\partial z} - \eta_z \frac{\partial(\hat{P} - \hat{P}_0)}{\partial \eta} +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon \text{Re}} \left[\eta_y^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \eta'^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \left(\eta_z^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \eta'^2} + 2\eta_z \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z \partial \eta'} + (\eta_{z\xi} + \eta_z \eta_{z\eta}) \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta'} \right) \right] - u_b \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}$$

$$\eta = -1: \hat{u}(x, z, \eta) = \hat{w}(x, z, \eta) = 0$$

$$\eta = 1: \hat{u}(x, z, \eta) = \hat{w}(x, z, \eta) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(f_- \int_{-1}^1 \hat{u} d\eta' \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(f_- \int_{-1}^1 \hat{w} d\eta' \right) = 0$$

В соответствии с теоремой Флоке, решения линейной системы уравнений с периодическими коэффициентами могут быть представлены в следующем виде

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \\ \hat{P}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \hat{U}_1^k \exp(2\pi i k z) + \sum_{m=2}^M T_{m-1}(\eta) \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \hat{U}_m^k \exp(2\pi i k z) \\ \frac{1}{2} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \hat{W}_1^k \exp(2\pi i k z) + \sum_{m=2}^M T_{m-1}(\eta) \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \hat{W}_m^k \exp(2\pi i k z) \\ \sum_{k=-N/2+1}^{N/2-1} \hat{P}_0^k \exp(2\pi i k z) \end{bmatrix} \exp(2\pi i(Qx + Q_z z)) \quad (1.3)$$

Здесь Q и Q_z являются вещественными параметрами, $Q_z \in [0, 0.5]$. В результате задача сводится к обобщенной задаче на собственные значения для комплексных матриц общего вида

$$A\hat{x} = \gamma B\hat{x}, \quad \hat{x} = (\hat{U}_m^k, \hat{W}_m^k, \hat{P}_0^k)^T \quad (1.4)$$

Матрицы A и B имеют размерность $(2M + 1)(N - 1)$ в случае $|Q| + |Q_z| \neq 0$ и $(2M + 1)(N - 1) - 1$ в противном случае. Элементы этих матриц определяются численно, путем перебора единичных векторов возмущений и их подстановки в уравнения (1.2). В общем случае возмущения (1.3) имеют две несоизмеримых длины волны в поперечном к потоку z -направлении $-\lambda_1^* = L$, $\lambda_2^* = L/Q_z$ и одну длину волны L/Q в x -направлении. Для получения ответа на вопрос об устойчивости стационарного решения $[u_b(z, \eta), 0, 0, 0, Z]$ необходимо проанализировать $(2M + 1)(N - 1)$ собственных чисел задачи (1.4), варьируя волновые числа возмущений $\alpha = 2\pi Q\varepsilon$ и $\alpha_z = 2\pi Q_z\varepsilon$. Решение устойчиво, если вещественные части всех собственных значений больше или равны нулю при всех положительных значениях волновых чисел. Возмущение является нейтральным, если вещественная часть соответствующего ему собственного значения равна нулю $-\text{Re al}(\gamma) = 0$.

Отметим, что возмущения с $|Q| + |Q_z| = 0$ являются выделенными. Такие возмущения являются периодическими в z -направлении, и их длина волны совпадает с длиной волны основного решения и периодом гофрирования стенки. Неустойчивость решения к таким возмущениям означает невозможность его реализации на практике. Решения неустойчивые к возмущениям с конечными значениями параметров Q и Q_z могут быть реализованы на конечных расстояниях от входа.

Рассматриваемые возмущения являются трехмерными и даже в случае $|Q| + |Q_z| = 0$ имеют три компоненты скорости. В случае гладких стенок, согласно теореме Сквайера [13], двумерные возмущения наиболее опасны на линейной стадии и начинают нарастать при меньших значениях чисел Рейнольдса по сравнению с трехмерными возмущениями. Для случая гофрированных стенок данная теорема не применима.

Для тестирования алгоритма решения задачи (1.4), нами были воспроизведены результаты работы [21], в которой рассматривалась устойчивость течения Пуазейля в канале с двумя гофрированными стенками (рис. 2а). В этой работе использовалась другая система безразмерных величин и в подписи рис. 3 они приведены с нижним индексом “ Y ”. Число Рейнольдса в [21] построено по “перепаду давления” (заранее неизвестная величина Z в уравнениях (1.1)). Для точного сравнения результатов потребовались несколько итераций по определению Re (см. подпись к рис. 3). Для трех значений числа Рейнольдса рассчитаны инкременты роста трехмерных возмущений с различными значениями Q (при этом $Q_z = 0$). Параметры гофрирования приведены в подписи к рис. 3. Сопоставление с результатами работы [21] демонстрирует полное согласие. Далее в расчетах мы ограничиваемся анализом течения в канале с одной гофрированной стенкой (см. рис. 2б) в широком диапазоне изменений числа Рейнольдса и параметров гофрирования.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На первом этапе была исследована устойчивость стационарного решения по отношению к возмущениям с $Q = Q_z = 0$. В задаче имеются три параметра $-2A/D$, $D/2L$ и число Рейнольдса. Диапазон исследований по параметру $2A/D$ составлял от 0.001 до 0.5 с шагом 0.05. Для каждого значения амплитуды гофрирования шаг расчетов устойчивости по параметру $D/2L$ составлял от 0.05 до 1.5 с шагом 0.05. Диапазон исследования по числу Рейнольдса был от 100 до 10000 с шагом 200. На втором этапе рассчитывалась устойчивость по отношению к возмущениям с конечными значениями параметра Флоке $Q_z \in [0, 0.5]$ ($Q = 0$), и шаг по этому параметру составлял 0.01.

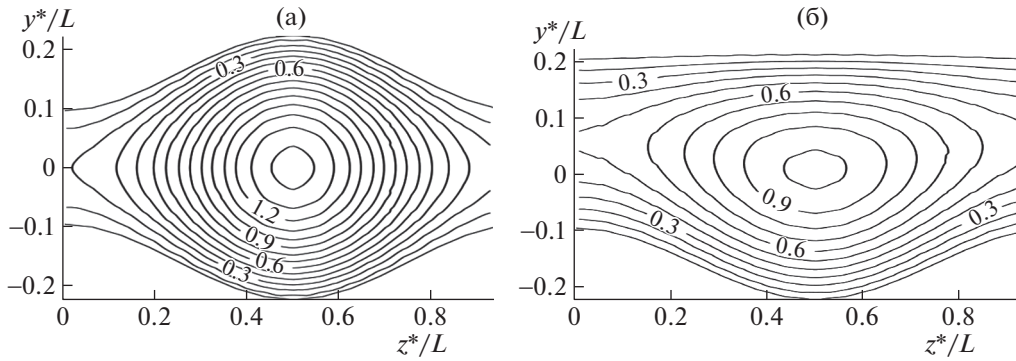


Рис. 2. Линии равного уровня для скорости основного течения $u(z^*, y^*)$ в канале с двумя гофрированными стенками (а) и с одной гофрированной стенкой (б). Здесь $\varepsilon_1 = 2A/D = 0.571$, $\varepsilon = D/(2L) = 0.223$ (см. подпись к рис. 3). Поле скорости представлено на одном периоде гофрирования в z -направлении и не зависит от x -координаты.

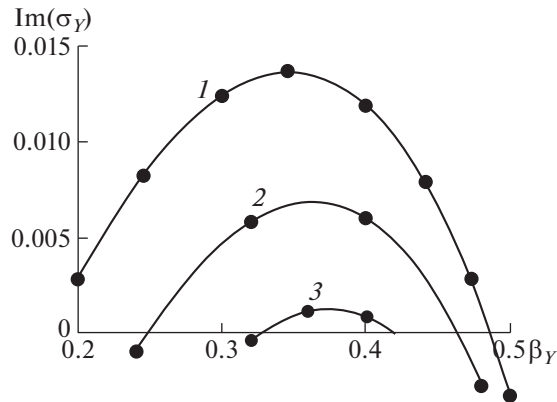


Рис. 3. Устойчивость течения в канале с двумя гофрированными стенками (см. рис. 2, $Q_z = 0$). Зависимость фактора роста $i\sigma_\gamma \text{Re}_\gamma = \gamma\varepsilon(1 - \varepsilon_1/2)^2 \text{Re}$ от значений волнового числа $\beta_\gamma = 2\pi Q\varepsilon(1 - \varepsilon_1/2)$. Символы (сплошные кружки) соответствуют расчетам работы [21] $S_\gamma = A/(D - A) = 0.4$, $\alpha_\gamma = 2\pi(D - A)/(2L) = 1$: 1–3 – $\text{Re}_\gamma = 90, 70, 60$. Сплошные линии соответствуют настоящим расчетам с параметрами $\varepsilon_1 = 2S_\gamma/(1 + S_\gamma) = 0.571$, $\varepsilon = 0.5\alpha_\gamma(1 + S_\gamma)/\pi = 0.223$, $Z \text{Re}^2 = -2 \text{Re}_\gamma / (\varepsilon(1 - \varepsilon_1/2)^3)$.

Найдено, что в исследованном диапазоне параметров стационарное течение Пуазейля в канале с гофрированной нижней стенкой (рис. 2б) устойчиво по отношению к возмущениям как с $Q_z = 0$ ($Q = 0$), так и с конечными значениями Q_z ($Q \neq 0$).

Дальнейшие исследования были посвящены устойчивости относительно продольных возмущений (1.3) с различными значениями параметра Q ($Q_z = 0$). Результаты представлены на рис. 4–6. Найдено, что в исследованном диапазоне параметров ($\varepsilon_1, \varepsilon, \text{Re}, Q$), в спектре собственных значений задачи (1.4) присутствует только одна мода с отрицательным значением $\text{Re al}(\gamma)$, либо ни одной. Примеры рассчитанных нейтральных кривых представлены на рис. 4. На линиях $2_1-2_5, 5_1-5_5$ рис. 4 величина $\text{Re al}(\gamma) = 0$ и они ограничивают области волновых чисел $\varepsilon Q = D/(2\lambda^*)$, λ^* – размерная длина волны возмущения, для которых существуют нарастающие во времени возмущения. Найдено, что в области неустойчивости зависимость инкремента $\text{Re al}(\gamma)$ от волнового числа имеет экстремум. Существуют наиболее быстро растущие возмущения, и они являются наиболее “опасными”. Рисунок 5, для тех же значений параметров гофрирования, что и на рис. 4, демонстрирует рассчитанные волновые числа наиболее “опасных” возмущений. Здесь решалось уравнение $\partial \text{Re al}(\gamma)/\partial Q = 0$ при различных числах Рейнольдса.

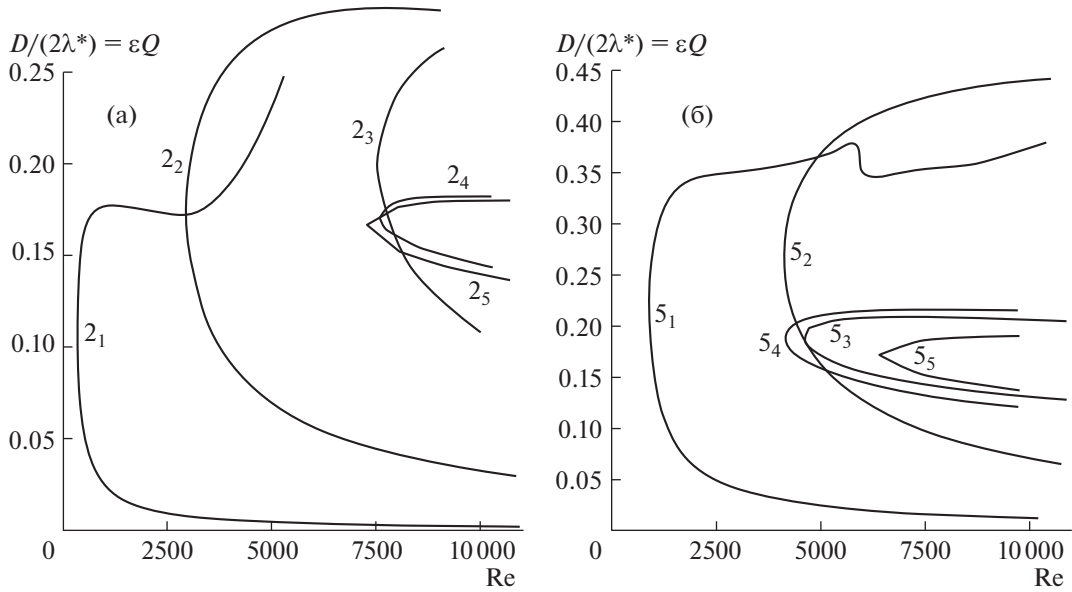


Рис. 4. Устойчивость течения в канале с одной гофрированной стенкой ($Q_z=0$). Зависимости волнового числа нейтральных возмущений от числа Рейнольдса: (а) расчет при $A/L = 0.1$ ($2_1 - 2A/D = 0.4, 2_2 - 0.25, 2_3 - 0.21, 2_4 - 0.15, 2_5 - 0.05$); (б) расчет при $A/L = 0.3$ ($5_1 - 2A/D = 0.6, 5_2 - 0.5, 5_3 - 0.4, 5_4 - 0.2, 5_5 - 0.1$). На линиях $2_1-2_5, 5_1-5_5$ $\text{Real}(\gamma) = 0$ и они ограничивают области волновых чисел, с которыми существуют нарастающие во времени возмущения. Минимальное значение числа Рейнольдса Re_{crit} , при котором существуют нарастающие возмущения, соответствует “носику” линий $2_1-2_5, 5_1-5_5$ (см. линии 2 и 5 рис. 6).

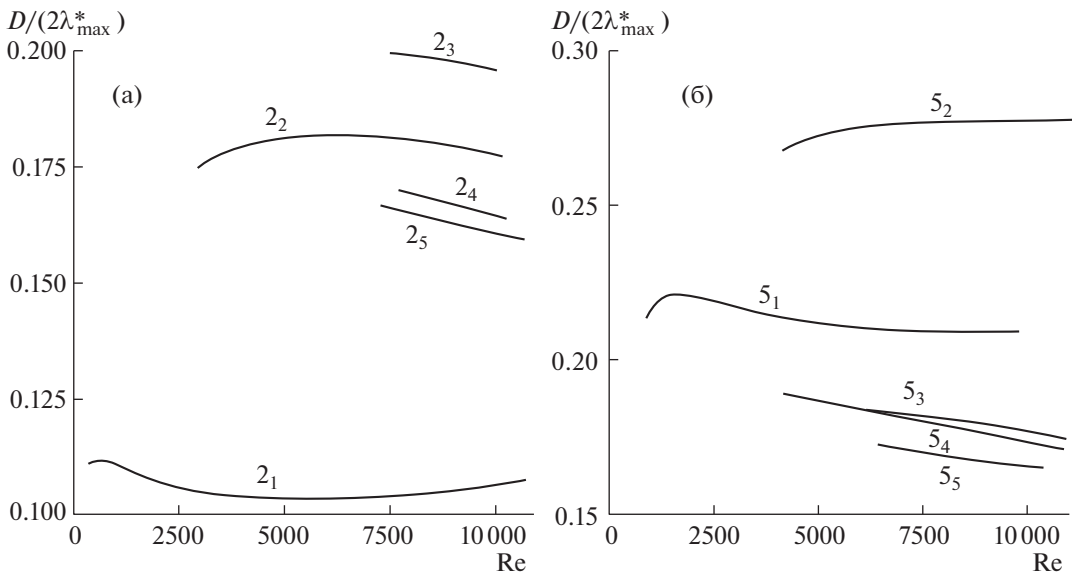


Рис. 5. Устойчивость течения в канале с одной гофрированной стенкой ($Q_z = 0$). Зависимость волнового числа линейных возмущений максимального роста от числа Рейнольдса: (а) расчет при $A/L = 0.1$ ($2_1 - 2A/D = 0.4, 2_2 - 0.25, 2_3 - 0.21, 2_4 - 0.15, 2_5 - 0.05$); (б) расчет при $A/L = 0.3$ ($5_1 - 2A/D = 0.6, 5_2 - 0.5, 5_3 - 0.4, 5_4 - 0.2, 5_5 - 0.1$). На линиях $2_1-2_5, 5_1-5_5$ выполняется равенство $\partial \text{Real}(\gamma) / \partial Q = 0$.

Минимальное значение числа Рейнольдса Re_{crit} , при котором существуют нарастающие возмущения, соответствует “носику” линий $2_1-2_5, 5_1-5_5$ рис. 4. На “носике” этих линий как $\text{Real}(\gamma) = 0$, так и $\partial \text{Real}(\gamma) / \partial Q = 0$. Используя эти уравнения для расчета заранее неизвестных Re_{crit}

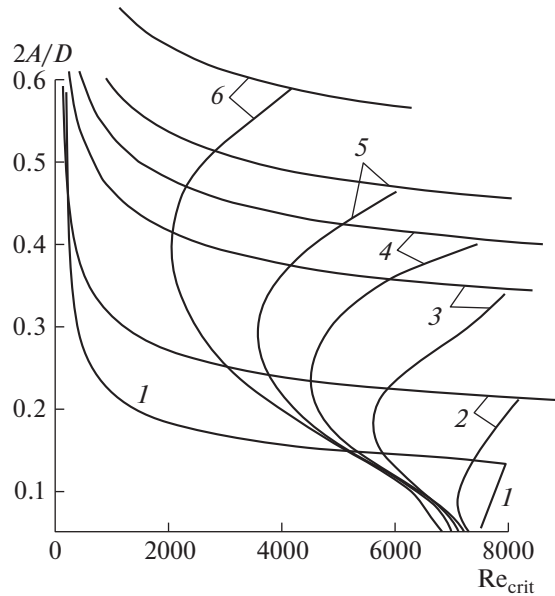


Рис. 6. Устойчивость течения в канале с одной гофрированной стенкой ($Q_z = 0$). Для различных значений параметра гофрирования $2A/D$, линии 1–6 определяют минимальное значение числа Рейнольдса Re_{crit} , при котором появляются нарастающие возмущения (см. рис. 4): 1–6 – $A/L = 0.05, 0.1, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4$.

и Q_{crit} (значение волнового числа на “носике”), были рассчитаны линии 1–6 на рис. 6. Поясним, что значения Re_{crit} для параметров гофрирования ϵ_1 , $A/L = 0.05, 0.1, 0.2, 0.25, 0.3$ и 0.4 определяются пересечением прямой $2A/D = \text{const} = \epsilon_1$ с линиями 1–6 рис. 6 соответственно. Отметим, что $\epsilon\epsilon_1 = A/L$. Для указанных значений параметра A/L соответствующие линии на рис. 6 ограничивают область параметров $(2A/D, Re)$, где основное течение устойчиво относительно всех рассмотренных возмущений с конечными значениями Q .

Найдено, что для каждого значения A/L (см. рис. 6) существует величина параметра $(\epsilon_1)^*$, когда зависимость $Re_{crit}(\epsilon_1)$ качественно меняется и происходит “стыковка” двух различных ветвей. На рис. 4(а) и 4(б) эта “стыковка” происходит при переходе от линии 2_3 к линии 2_4 и от 5_2 к 5_3 соответственно (Re_{crit} на рис. 6 соответствует носиком линии на рис. 4). При значениях $\epsilon_1 < (\epsilon_1)^*$, на рис. 4 появляется вторая область неустойчивых возмущений, которая на этом рисунке не показана. “Носик” этой второй области неустойчивости лежит на продолжении линий рис. 6 $Re_{crit}(\epsilon_1)$, $\epsilon_1 < (\epsilon_1)^*$ после “стыковки”. В данной работе, при одинаковых величинах ϵ и ϵ_1 , нас интересует ветвь с меньшими значениями числа Рейнольдса на носике кривой нейтральной устойчивости. Для аналогичной нашей работе конфигурации стенок канала, ограничиваясь малыми значениями амплитуды гофрирования $2A/D < 0.1$, две области неустойчивых возмущений были впервые найдены в работе [27]. Для таких малых значений ϵ_1 в работе [28] показано, что гофрирование дестабилизирует стационарное течение для $2\pi\epsilon < 4.22$ и стабилизирует для $2\pi\epsilon > 4.22$. На рис. 6, при значении $2A/D = 0.05$, величина $2\pi\epsilon$ меняется примерно от шести до пятидесяти при изменении A/L от 0.05 до 0.4. Критическое число Рейнольдса увеличивается с уменьшением A/L , и гофрирование дестабилизирует течение при $2A/D = 0.05$ (см. рис. 6). Критическое число Рейнольдса при $A/L = 0.05$ близко к значению $Re_{crit}^P \approx 7500$ для гладкой стенки (см. рис. 6) и соответствующее значение $2\pi\epsilon$ близко к вычисленному в [28]. В данной работе показано, что увеличение параметра ϵ_1 качественно меняет характер зависимости критического числа Рейнольдса от параметров гофрирования.

Таким образом, мы исследовали устойчивость стационарного решения относительно трехмерных возмущений трех типов: (1) $Q = Q_z = 0$, (2) $Q = 0, Q_z > 0$, и (3) $Q > 0, Q_z = 0$. В этой статье, ввиду ограничений по объему, не исследуется устойчивость к возмущениям с $Q > 0$ и $Q_z > 0$. Опираясь на результаты по устойчивости к возмущениям типа (2), предполагается, что возмущения

с $Q > 0$ и $Q_z > 0$ являются менее опасными в сравнении с рассмотренными возмущениями 3-го типа и их анализ не изменит существенным образом результатов и выводов данной работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя полные уравнения Навье–Стокса, рассмотрена линейная устойчивость плоского течения Пуазейля в канале с гофрированной нижней стенкой. Стенка гофрирована поперек потока, и основное течение имеет одну компоненту скорости. Возмущения полей скорости и давления являются трехмерными с двумя волновыми числами. Проанализированы нейтральные кривые и наиболее опасные линейные возмущения в широком диапазоне изменений параметров гофрирования и числа Рейнольдса. В зависимости от параметров гофрирования рассчитано критическое число Рейнольдса, выше которого основное течение неустойчиво, и существуют нарастающие во времени возмущения.

В канале с гладкими стенками течение Пуазейля неустойчиво, начиная с числа Рейнольдса $Re_{crit}^P \approx 7500$. Для течения в канале со стенкой, гофрированной поперек потока, найдено, что критическое число Рейнольдса сложным образом зависит от амплитуды и периода гофрирования. Для каждого из рассмотренных в статье значений $A/L \in [0.05–0.4]$ существует величина $(2A/D)^*$, зависящая только от A/L и разделяющая весь рассмотренный в статье диапазон значений $2A/D \in [0.05–0.7]$ на две области – (1) $2A/D < (2A/D)^*$ и (2) $2A/D > (2A/D)^*$. В первой области зависимость $Re_{crit}(A/L, 2A/D)$ является немонотонной. Во второй области величина $Re_{crit}(A/L, 2A/D)$ монотонно уменьшается с ростом амплитуды гофрирования вплоть до малых значений $Re_{crit} \approx 100–200$. Значения $(2A/D)^*$ рассчитаны для семи значений параметра $A/L = 0.05, 0.1, 0.2, 0.25, 0.3$ и 0.4 и возрастают с ростом A/L .

Автор выражает признательность А.З. Квон и И.В. Бондаренко за обсуждение и выполнение части работы по оформлению рукописи и проведению расчетов.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00507, <https://rscf.ru/project/23-29-00507/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boiko A.V., Dovgal A.V., Grek G.R., Kozlov V.V.* Physics of transitional shear flows. Berlin: Springer, 2011. 271 p.
2. *Goldstein D.B., Tuan T-C.* Secondary flow induced by riblets // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 363. P. 115–151.
3. *Sobey I.J.* On flow through furrowed channels. Part I. Calculated flow patterns // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 96. P. 1–26.
4. *Stepanoff K.D., Sobey I.J., Bellhouse B.J.* On flow through furrowed channels. Part II. Observed flow patterns // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 96. № 01. P. 27–32.
5. *Sparrow E.M., Hossfeld L.M.* Effect of rounding of protruding edges on heat transfer and pressure drop in a duct // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1984. V. 27. P. 1715–1723.
6. *Beebe David J., Mensing Glennys A., Walker Glenn M.* Physics and applications of microfluidics in biology // *Annu. Rev. Biomed. Eng.* 2002. V. 4. № 1. P. 261–286.
7. *Бойко А.В., Ключнев Н.В., Нечепуренко Ю.М.* Устойчивость течения жидкости над оребренной поверхностью. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. 123 с.
8. *Григорьев О.А., Ключнев Н.В.* Устойчивость течения Пуазейля в канале с гребенчатым оребрением // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2018. Т. 58. № 4. С. 595–606.
9. *Kistler S.F., Schweizer P.M.* Liquid Film Coating (Chapman and Hall, New York, 1997).
10. *Weinstein S.J., Ruschak K.J.* Coating flows // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2004. V.36. P. 29–53.
11. *DeSantos J.M., Melli T.R., Scriven L.E.* Mechanics of gas-liquid flow in packed-bed contactors // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1991. V. 23. P. 233–260.
12. *Trifonov Y.Y.* Modeling of mixture separation in column with structured packing // *Multiph. Sci. Technol.* 2022. V. 34. № 1. P. 23–51.
13. *Kachanov Y.S.* Physical mechanisms of laminar-boundary-layer transition // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1994. V. 26. P. 411–482.
14. *Nishimura T., Otori Y., Kawamura Y.* Flow characteristics in a channel with symmetric wavy wall for steady flow // *J. Chem. Eng. Jpn.* 1984. V. 17. № 5. P. 466–471.
15. *Nishimura T., Otori Y., Kajimoto Y., Kawamura Y.* Mass transfer characteristics in a channel with symmetric wavy wall for steady flow // *J. Chem. Eng. Jpn.* 1985. V. 18. № 6. P. 550–555.

16. *Nishimura T., Kajimoto and Kawamura Y.* Mass transfer enhancement in channels with a wavy wall // *J. Chem. Eng. Japan.* 1986. V. 19. P. 142–144.
17. *Guzman A.M., Amon C.H.* Transition to chaos in converging-diverging channel flows: Ruelle-Takens-Newhouse scenario // *Phys. Fluids.* 1994. V. 6. № 6. P. 1994–2002.
18. *Guzman A.M., Amon C.H.* Dynamical flow characterization of transitional and chaotic regimes in converging-diverging channels // *J. Fluid Mech.* 1996. V. 321. P. 25–57.
19. *Amon C.H., Guzman A.M., Morel B.* Lagrangian chaos, Eulerian chaos, and mixing enhancement in converging diverging channel flows // *Phys. Fluids.* 1996. V. 8. № 5. P. 1192–1206.
20. *Szumbariski J.* Instability of viscous incompressible flow in a channel with transversely corrugated walls // *J. Theor. App. Mech-Pol.* 2007. V.45. № 3. P. 659–683.
21. *Yadav Nikesh, Gepner S.W., Szumbariski J.* Instability in a channel with grooves parallel to the flow // *Phys. Fluids.* 2017. V. 29. № 10. 084104.
22. *Cho K.J., Kim M.-U., Shin H.D.* Linear stability of two-dimensional steady flow in wavy-walled channels // *Fluid Dyn. Res.* 1998. V. 23. № 6. P. 349–370.
23. *Cabal A., Szumbariski J., Floryan J.M.* Stability of flow in a wavy channel // *J. Fluid Mech.* 2002. V. 457. P. 191–212.
24. *Floryan J.M., Floryan C.* Traveling wave instability in a diverging converging channel // *Fluid Dyn. Res.* 2010. V. 42. № 2. 025509.
25. *Trifonov Y.Y.* Stability of a film flowing down an inclined corrugated plate: The direct Navier-Stokes computations and Floquet theory // *Phys. Fluids.* 2014. V. 26. 114101.
26. *Schörner M., Reck D., Aksel N., Trifonov Y.* Switching between different types of stability isles in films over topographies // *Acta Mech.* 2018. V. 229. P. 423–436.
27. *Mohammadi A., Moradi H.V., Floryan J.M.* New instability mode in a grooved channel // *J. Fluid Mech.* 2015. V. 778. P. 691–720.
28. *Moradi H.V., Floryan J.M.* Stability of flow in a channel with longitudinal grooves // *J. Fluid Mech.* 2014. V. 757. P. 613–648.