

УДК 532.59

ЧАСТОТЫ И ПРОФИЛИ СТОЯЧИХ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

© 2023 г. В. А. Калинин^а

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

e-mail: kalin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 17.05.2023 г.

После доработки 06.06.2023 г.

Принята к публикации 06.06.2023 г.

Представлены новые результаты экспериментов по исследованию влияния плавающей тонкой пластины на регуляризацию стоячей гравитационной волны Фарадея на свободной поверхности воды в прямоугольном сосуде. Показано, что увеличение толщины плавающей пластины существенно сказывается как на собственной частоте колебаний гидроупругой системы, так и на форме профилей наблюдаемых стоячих изгибно-гравитационных волн. При толщине пластины ниже критического значения форма волны описывается теорией нелинейных гравитационных волн; при больших толщинах следует использовать в качестве аппроксимирующих зависимостей приближение “сухой балки”.

Ключевые слова: разрушающиеся поверхностные гравитационные волны Фарадея, плавающая пластина, изгибно-гравитационные волны, гидроупругость, дисперсионное уравнение

DOI: 10.31857/S1024708423600306, EDN: FZYONJ

Эксперименты [1] по изучению эффекта плавающей пластины на разрушение и регуляризацию гравитационной волны Фарадея на свободной поверхности воды в прямоугольном сосуде показали, что стоячие изгибно-гравитационные волны в исследуемой гидроупругой системе (плавающая пластина – вода) определяются толщиной пластины: при малой толщине превалирует гравитационная волна, при большой – волна изгибная.

Возбуждаемые при параметрическом резонансе колебания жидкости (гравитационные волны) обуславливают изгибные колебания пластины за счет работы обобщенных гидродинамических сил со стороны гравитационной волны. Интерпретация данных эксперимента [1] в рамках линейной теории упругости [2–4] позволила оценить энергозатраты гравитационной волны на изгиб пластины и ее критическую толщину, при которой колебания гидроупругой системы отсутствуют. Плавающую пластину можно рассматривать как своеобразный диссипативный элемент для волн гравитационных; именно энергозатратами на поддержание изгибных колебаний пластины определяется регуляризация разрушающихся волн Фарадея.

Цель настоящей работы – исследование в условиях лабораторного эксперимента частотных характеристик гидроупругой системы, определяемых толщиной и свойствами материала плавающей пластины, а также сравнение профилей гравитационных и изгибно-гравитационных волн. Полученные результаты могут способствовать решению прикладной проблемы определения толщины ледового покрова по частоте изгибно-гравитационных волн в маргинальной зоне океана [5–7].

1. ПОСТАНОВКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Аналогично [1] влияние плавающей пластины на колебания жидкости исследовалось для второй моды ($n = 2$) стоячих гравитационных волн на свободной поверхности воды в прямоугольном сосуде длиной $L = 50$ см и шириной $W = 4$ см. В экспериментах использовались пластины из пенополиэтилена и пенополистирола, характеристики которых приведены в табл. 1. Пластины имели длину 49.5 см и ширину 3.5 см.

Таблица 1. Параметры используемых пластин

Материал	Плотность, ρ_p (г/см ³)	Модуль упругости E , дин/см ² (МПа)	Толщина h_p (см)	Цилиндрическая жесткость, $D = \frac{Eh_p^3}{12(1-\nu^2)}$ (дин см)
Пенополиэтилен	$2.5-3 \times 10^{-2}$	2.6×10^6 (0.26)	0.09–1.8	$300-2 \times 10^6$
Пенополистирол	3.5×10^{-2}	$0.5-1.5 \times 10^8$ (5–15)	0.3	4×10^5

Отметим, что вследствие малой плотности ρ_p пенополиэтилена и пенополистирола по сравнению с плотностью воды ($\rho_w = 1 \text{ г/см}^3$) пластины из указанных материалов имели большую избыточную плавучесть в исследуемой гидроупругой системе, и при статическом равновесии глубина погружения пластины ($\sim h_p \rho_p / \rho_w$) мала. Для пластины максимальной толщины 2 см эта глубина порядка 0.03 см, и в статическом равновесии системы ею можно пренебречь.

Аналогично [1, 8, 9] исследовались двумерные волновые движения в режиме основного резонанса Фарадея, когда частота вертикальных колебаний сосуда Ω в два раза превышала частоту возбуждаемых изгибно-гравитационных волн. Параметрическое возбуждение волн осуществлялось при изменении частоты Ω в диапазоне $18-26 \text{ с}^{-1}$, для которого крутизна $\Gamma = H/\lambda$ стоячей поверхностной волны оценивалась интервалом $0.02-0.4$. Здесь $\lambda = L = 50 \text{ см}$ – длина волны; H – высота волны, определяемая как расстояние между ложбиной волны и ее гребнем. В условиях эксперимента при амплитуде вертикальных колебаний сосуда $s = 0.75 \text{ см}$ перегрузка $\varepsilon = s\Omega^2/g$ изменялась от 0.24 до 0.52.

Проведены две серии экспериментов, для которых глубина воды составляла $h = 5$ и 15 см ; при длине второй моды гравитационной волны $\lambda = 50 \text{ см}$ отношение вертикального масштаба задачи к горизонтальному составляло $h/\lambda = 0.1$ и 0.3 .

Регистрация волновых движений системы пластина – жидкость производилась посредством фотокамеры Canon PowerShot SX50HS со скоростью видеосъемки 30 и 120 кадров/с. Для обработки видеоматериалов использовалась программа ImageJ. Эксперименты проводились при температуре $20-22^\circ\text{C}$.

В опытах собственная частота гравитационных и изгибно-гравитационных волн определялась следующим образом. На одной из резонансных частот Ω колебаний сосуда возбуждалась вторая волновая мода. Затем вибростенд выключался, и после полной остановки сосуда (время порядка периода волны) проводилась видеосъемка процесса затухания волновых движений воды / гидроупругой системы. Поскольку частота волн существенно превосходит коэффициент затухания, то предполагалось, что процесс затухания волн происходит с собственной частотой. Это позволило по материалам видеосъемки затухающих волн оценить собственную частоту с точностью 5–10%; кроме того, измерялась частота волн, высоты которых не превосходили 3–4 см.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Эксперименты показали, что наличие плавающей пластины на свободной поверхности воды приводит к регуляризации разрушающихся стоячих гравитационных волн – рис. 1. Результаты измерений собственных частот наблюдаемых волн приведены на рис. 2.

Для двух значений глубины воды $h = 5$ и 15 см на рис. 2 представлены экспериментальные зависимости собственной частоты стоячей изгибно-гравитационной волны от толщины плавающей пластины из пенополиэтилена (1, 2) и пенополистирола (3). Видно, что с ростом h_p частота ω увеличивается, причем нижняя граница диапазона изменения толщины определяется значением $h_p = 0$ (гравитационные волны), а верхняя граница – критической толщиной $h_p = 1.8 \text{ см}$, при превышении которой колебания гидроупругой системы отсутствуют.

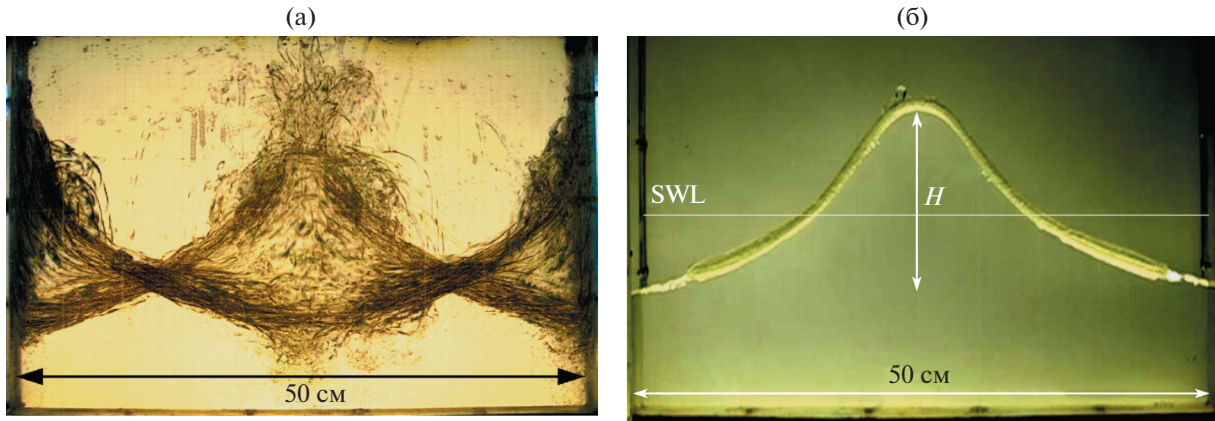


Рис. 1. (а) Разрушающаяся волна на свободной поверхности воды глубины $h = 15$ см и (б) регулярная изгибно-гравитационная волна высоты $H = 13$ см, толщина пластины $h_p = 0.5$ см; частоты волн $\omega = 10.10$ с⁻¹; скорость съемки 30 к/с; огибающие получены при наложении 60 кадров (три периода волны).

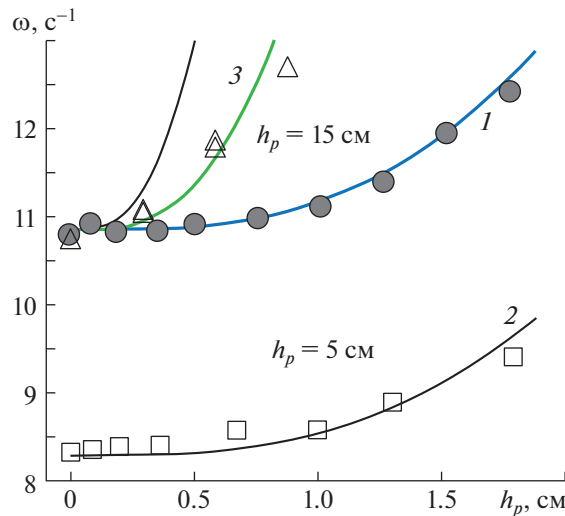


Рис. 2. Зависимость собственной частоты изгибно-гравитационных волн от толщины пластины при глубине воды $h = 5$ и 15 см: 1, 2 – пенополиэтилен; 3 – пенополистирол; кривые – расчет по соотношению (2.1).

При $h = 5$ и 15 см для чисто гравитационных волн ($h_p = 0$) измеренные собственные частоты равны $\omega_0 = 8.34$ и 10.78 с⁻¹ соответственно. Оценки частот по формуле

$$\omega_0 = \sqrt{gkthkh}$$

дают значения $\omega_0 = 8.29$ и 10.85 с⁻¹. Отметим, что для случая $h = 5$ см (т.е. $h/\lambda = 0.1$) приближение мелкой воды [10, 11] не применимо, поскольку рассчитанная частота $\omega_0 = k\sqrt{gh} = 8.80$ с⁻¹ значительно выше экспериментального значения 8.34 с⁻¹.

При увеличении толщины пластины из пенополиэтилена (данные 1, 2) до значения $h_p \leq 0.51$ см собственная частота изгибно-гравитационных практически совпадает с ω_0 и не превосходит значений 10.91 и 8.45 с⁻¹. Таким образом, в случае пластины из пенополиэтилена при $h_p \leq 0.51$ см собственная частота изгибно-гравитационной волны совпадает с частотой волны гравитационной. При дальнейшем увеличении h_p наблюдается быстрый рост частоты ω , которая при $h_p = 1.79$ см составляет $\omega = 9.42$ и 12.42 с⁻¹.

В экспериментах также использовались пластины из пенополистирола, модуль упругости которого почти на два порядка превосходит соответствующую величину для пенополиэтилена (табл. 1). Данные 3 показывают, что уже при $h_p = 0.3$ см частота изгибно-гравитационных волн составляла величину $\omega = 11.09$ с⁻¹, а при $h_p = 0.9$ см – $\omega = 12.73$ с⁻¹; какие-либо волновые движения отсутствовали при $h_p > 1.0$ см.

Для интерпретации полученных экспериментальных результатов используем линейную теорию гидроупругости [2, 3, 12]. В одномодовом приближении частота ω изгибно-гравитационных волн связана с толщиной пластины h_p следующим образом

$$\omega^2 = \frac{Ek^5 h_p^3 + 12gk(1 - \nu^2)\rho_w}{12(1 - \nu^2)(kh_p \rho_p + \rho_w \operatorname{cth} kh)}, \quad (2.1)$$

где для настоящего эксперимента $n = 2$; $L = 50$ см; $k = n\pi/L = 0.126$ см⁻¹; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; ускорение силы тяжести $g = 981.7$ см/с²; плотность воды $\rho_w = 1$ г/см³; ρ_p, E – плотность и модуль упругости материала пластины (табл. 1). Отметим, что при $h_p = 0$ формула (2.1) определяет частоту ω_0 гравитационных волн.

Кривые на рис. 2 соответствуют рассчитанным по (2.1) зависимостям частоты $\omega(h_p)$ волн от толщины h_p пластины. Если в случае пластины из пенополиэтилена для частоты изгибно-гравитационных волн получено неплохое соответствие между расчетными и экспериментальными оценками (1, 2), то для пенополистирола (3) наилучшее соответствие между теорией и экспериментом достигается при наименьшем значении модуля упругости материала 0.5×10^8 дин/см² (см. табл. 1, по данным производителя).

На рис. 3 а, б для двух глубин жидкости приведены профили волн максимального развития при $h_p = 1$ см. Из сравнения их с чисто гравитационными волнами (в, г) следует, что для изгибно-гравитационных волн отсутствуют асимметрия профиля и заострение гребня.

Для описания профиля стоячих гравитационных волн используем переменные Лагранжа (a, b, t); во втором приближении [13, 14] координаты (x, y) частиц жидкости на свободной поверхности ($b = 0$) имеют вид

$$\begin{cases} x = a - H \frac{\operatorname{ch} kh}{2\operatorname{sh} kh} \sin ka \cos \omega_0 t + H^2 k \frac{\sin 2ka}{32\operatorname{sh}^2 kh} (1 + \cos 2\omega_0 t) - \\ - \frac{3}{64} H^2 k \frac{\operatorname{ch} 2kh}{\operatorname{sh}^4 kh} \sin 2ka \cos 2\omega_0 t + \frac{1}{16} H^2 k \frac{\operatorname{ch} 2kh}{\operatorname{sh}^2 kh} \sin 2ka, \\ y = \frac{H}{2} \cos ka \cos \omega_0 t + H^2 k \frac{\operatorname{sh} 2kh}{32\operatorname{sh}^2 kh} (1 + \cos 2\omega_0 t) + \\ + \frac{3}{64} H^2 k \frac{\operatorname{sh} 2kh}{\operatorname{sh}^4 kh} \cos 2ka \cos 2\omega_0 t - \frac{1}{16} H^2 k \frac{1}{\operatorname{sh} 2kh} \cos 2ka. \end{cases} \quad (2.2)$$

На рис. 3 з, ж для сравнения приведены рассчитанные по (2.2) (кривые) и экспериментальные (точки) профили волн максимального развития, которые практически совпадают.

Применение формул (2.2) для изгибно-гравитационных волн дает отрицательный результат при сопоставлении с данными эксперимента – пунктирные кривые на рис. 3 д, е, причем наиболее сильно профили отличаются в случае малой глубины жидкости (е).

С математической точки зрения процедура построения выражений, описывающих профили изгибно-гравитационных волн, включает решение дисперсионного уравнения (2.1) относительно волнового числа k , задания определяющей профиль функции и нахождения входящих в нее констант. В случае конечной глубины жидкости решение находится численно. Задача несколько упрощается в длинноволновом приближении [10, 11] – корни дисперсионного уравнения находятся аналитически. Для определения профиля двумерных изгибно-гравитационных волн используется функция

$$y(x) = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx + A_3 \operatorname{sh} kx + A_4 \operatorname{ch} kx \quad (2.3)$$

Применим для описания наблюдаемых в эксперименте волн в качестве аппроксимирующей функцию (2.3). Отметим, что в теории упругости выражение (2.3) описывает изгибные колебания балки со свободными концами в вакууме – “сухая балка”.

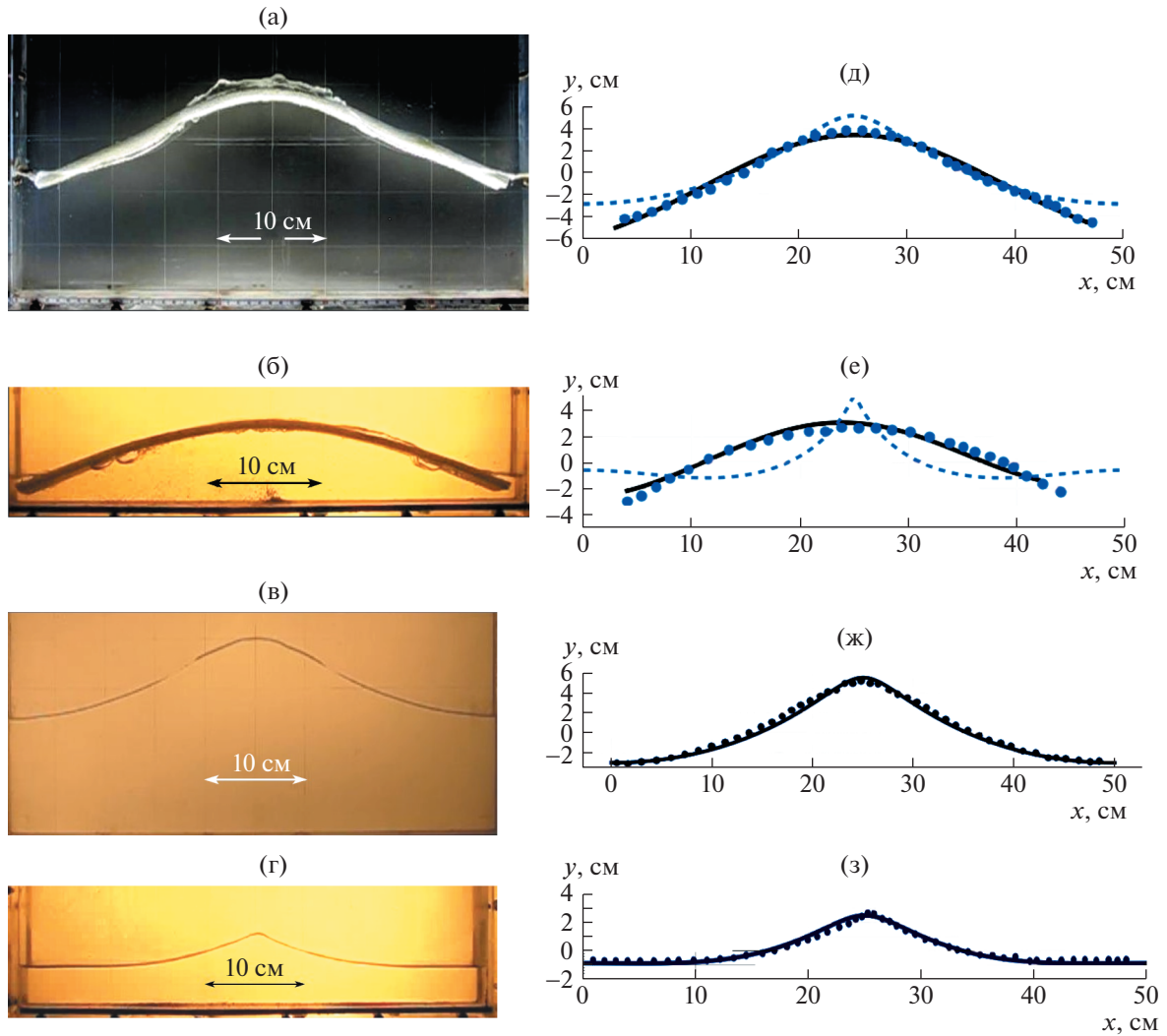


Рис. 3. Профили максимального развития изгибно-гравитационных волн (а, б) при толщине пластины $h_p = 1$ см ($h = 5$ и 15 см, $H = 8$ и 5.6 см) и гравитационных волн $h_p = 0$ (в, г) ($h = 5$ и 15 см, $H = 8.6$ и 4 см); (д–з) – экспериментальные (точки) и рассчитанные (сплошные и пунктирные кривые) профили.

Значения констант $A_1 - A_4$, найденные при аппроксимации данных эксперимента, приведены в табл. 2.

Из рис. 3 д, е следует, что наблюдаемые в эксперименте волны можно отнести к волнам изгибным, поскольку описываются (2.3) – сплошные кривые. Аналогичный вывод можно сделать и для изгибно-гравитационных волн при толщине пластины $h_p = 1.8$ см – рис. 4.

Анализ волновых профилей показал, что при толщине пластины не более 0.6 см колебания системы пластина – вода определяются волнами гравитационными. На рис. 5 показана изгибно-

Таблица 2. Значения $A_1 - A_4$ (см) при $k = 0.126 \text{ см}^{-1}$

h_p (см)	h (см)	A_1	A_2	A_3	A_4
1.0 Рис. 3, д	15	-0.09	-3.56	2.48	-2.48
1.0 Рис. 3, е	5	0.46	-2.93	-0.26	0.27
1.8 Рис. 4	15	0.5	-3.87	1.74	-1.75

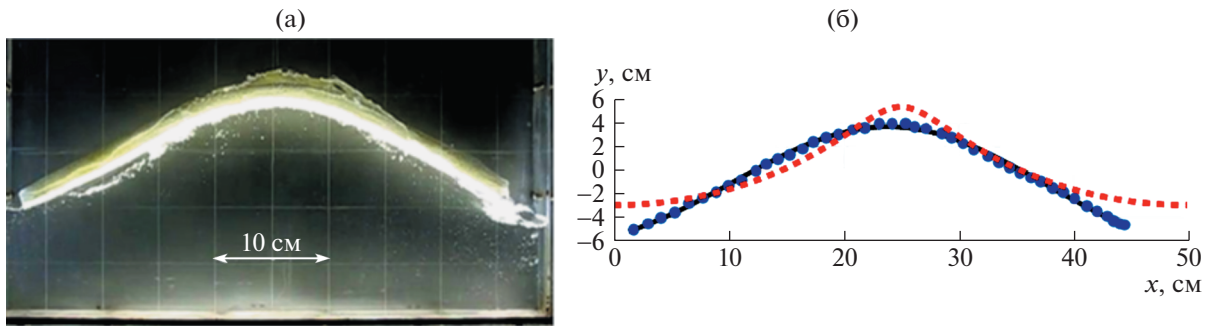


Рис. 4. Наблюдаемый в эксперименте (а) и рассчитанный (б) профиль изгибно-гравитационной волны при толщине пластины $h_p = 1.8$ см ($h = 15$ см, $H = 8.4$ см): пунктирная и сплошная кривые – расчет по (2.2) и (2.3).

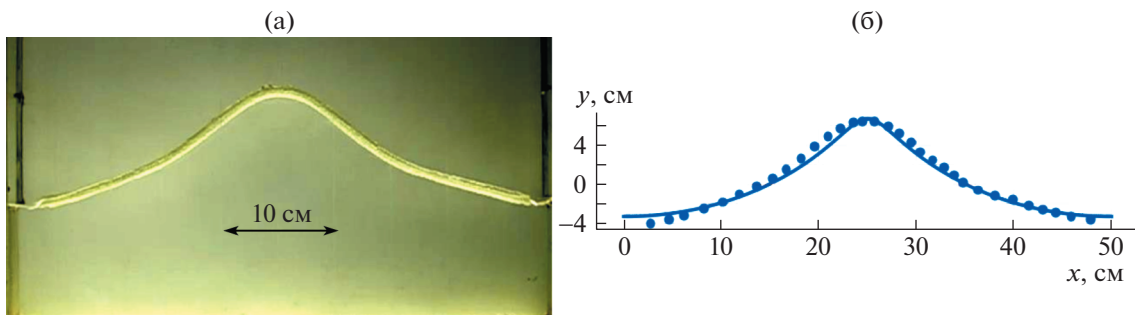


Рис. 5. Наблюдаемый в эксперименте (а) и рассчитанный (б) профиль гравитационной волны при толщине пластины $h_p = 0.51$ см ($h = 15$ см, $H = 9.9$ см).

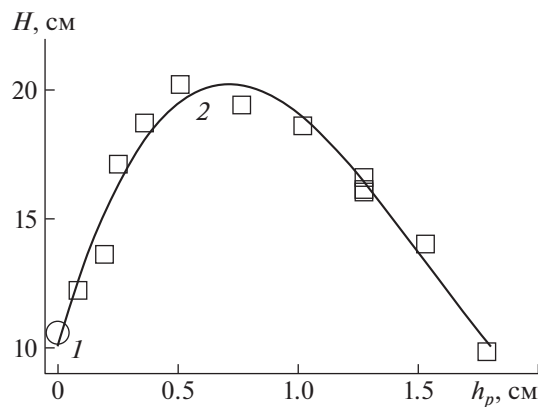


Рис. 6. Зависимость измеренной предельной высоты регулярной изгибно-гравитационной волны от толщины пластины при глубине воды $h = 15$ см: 1 – гравитационная волна ($h_p = 0$); 2 – гидроупругая система (вода – плавающая пластина из пенополиэтилена).

гравитационная волна при $h_p = 0.51$ см, которая может рассматриваться как волна гравитационная, поскольку ее профиль описывается соотношениями (2.2). Аналогичный результат получен для колебаний рассматриваемой гидроупругой системы при уменьшении толщины плавающей пластины до минимального значения $h_p = 0.09$ см.

Таким образом, при $h_p \leq 0.5$ см колебания гидроупругой системы пластина–вода определяются стоячей гравитационной волной (не замечающей наличия пластины), а при увеличении h_p начинают сказываться свойства изгибных колебаний пластины.

Зависимость предельной высоты H регулярной изгибно-гравитационной волны от толщины h_p пластины приведена на рис. 6.

Данные на рис. 6 показывают, что размещение пластины на свободной поверхности воды значительно изменяет предельную высоту волны. Отметим, что предельная высота гравитационной волны (H) оценивается как $H \sim 12$ см. При увеличении толщины h_p сначала наблюдается рост H , причем максимальное значение $H \sim 20$ см достигается при $h_p \sim 0.5\text{--}0.6$ см. Дальнейшее увеличение h_p приводит к уменьшению высоты H волны, которая при $h_p = 1.8$ см составляет всего 9.7 см, т.е. ниже предельной высоты гравитационной волны. Данные (2) аппроксимируются полиномом третьей степени $H = 6.4h_p^3 - 29.2h_p^2 + 31.7h_p + 10.16$. Отметим, что отвечающее максимальной высоте волн значение толщины пластины определяет переход от гравитационных волн к волнам изгибным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментально установлено, что увеличение толщины плавающей пластины существенно сказывается как на собственной частоте колебаний гидроупругой системы, так и форме профилей наблюдаемых стоячих изгибно-гравитационных волн.

Анализ волновых профилей изгибно-гравитационных волн показал, что при толщине пластины ниже критического значения форма волны описывается теорией нелинейных гравитационных волн; при больших толщинах следует использовать в качестве аппроксимирующих зависимости приближения “сухой балки” или решение соответствующей задачи гидроупругости.

Выявленное значение критической толщины пластины соответствует максимальной высоте регулярной изгибно-гравитационной волны.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 23-19-00451.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калиниченко В.А.* Эксперименты по подавлению интенсивных колебаний жидкости плавающей пластиной // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 6. С. 74–83.
2. *Хейсин Д.Е.* Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
3. *Robin G.D.Q.* Wave propagation through fields of pack ice // Philos. Trans. R. Soc. A:1963. V. 255. № 1057. P. 313–339.
4. *Тимошенко С.П.* Сопротивление материалов. Элементарная теория и задачи. М.: Наука, 1966, 365 с.
5. *Wadhams P.* The Seasonal ice zone // The Geophysics of Sea Ice. Springer, Boston, 1986. P. 825–991. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-5352-0_15
6. *Sergienko O.V.* Behavior of flexural gravity waves on ice shelves: application to the Ross Ice Shelf // J. Geophys. Res. Oceans. 2017. V. 122. № 8. P. 6147–6164. <https://doi.org/10.1002/2017JC012947>
7. *Dethloff K., Maslowski W., Hendricks S., Lee Y.J., Goessling H.F., Krumpen T., Haas C., Handorf D., Ricker R., Bessonov V., Cassano J.J., Kinney J.C., Osinski R., Rex M., Rinke A., Sokolova J., Sommerfeld A.* Arctic sea ice anomalies during the MOSAiC winter 2019/20 // Cryosphere. 2022. V. 16. P. 981–1005. <https://doi.org/10.5194/tc-16-981-2022>
8. *Калиниченко В.А.* Регуляризация гравитационных баротропных волн в двухслойной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 6. С. 25–37. <https://doi.org/10.1134/S0568528119060069>
9. *Калиниченко В.А.* Подавление интенсивных колебаний жидкости слоем плавающих частиц // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 6. С. 85–97. <https://doi.org/10.1134/S0568528120060067>
10. *Стурова И.В.* Влияние ледяного покрова на колебания жидкости в замкнутом бассейне // Изв. РАН. ФАО. 2007. Т. 43. № 1. С. 128–135.
11. *Зырянов В.Н.* Сейши подо льдом // Водные ресурсы. 2011. Т. 38. № 3. С. 259–271.
12. *Букатов А.Е.* Волны в море с плавающим ледяным покровом. Севастополь: ФГБУН МГИ, 2017. 360 с.
13. *Секерж-Зенькович Я.И.* К теории стоячих волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости // Докл. АН СССР. 1947. Т. 8. № 4. С. 551–553.
14. *Нестеров С.В.* Параметрическое возбуждение волн на поверхности тяжелой жидкости // Морские гидрофиз. исследования. 1969. № 3 (45). С. 87–97.