

УДК 532.546:536.421

НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ КИПЕНИЯ ВОДЫ В ГЕОТЕРМАЛЬНОМ РЕЗЕРВУАРЕ

© 2023 г. Г. Г. Цыпкин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

E-mail: tsypkin@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 05.06.2023 г.

После доработки 06.06.2023 г.

Принята к публикации 06.06.2023 г.

Исследуется устойчивость покоящейся поверхности кипения воды в высокотемпературных породах, когда область воды расположена над областью пара. Показано, что решение неединственно и существуют два положения поверхности раздела. При изменении параметров решения сближаются и происходит слияние решений, а в некотором диапазоне параметров стационарное решение не существует. Методом нормальных мод исследована устойчивость положений поверхности раздела. Получено дисперсионное уравнение, которое исследовалось численно и аналитически. Показано, что переход к неустойчивости происходит при уменьшении давления в области пара или увеличении давления в области воды. Представлены бифуркационные диаграммы, иллюстрирующие слияние и несуществование решений, а также выделены части ветвей, соответствующие устойчивым и неустойчивым режимам течения.

Ключевые слова: геотермальный резервуар, поверхность кипения, капиллярное давление, неединственность, устойчивость

DOI: 10.31857/S1024708423600355, **EDN:** FZUXAM

Исследование геотермальных резервуаров обусловлено перспективами извлечением тепла Земли, добычей глубоко залегающих полезных ископаемых, а также изучением активности вулканических систем [1]. Как показывают натурные наблюдения, существует большое количество геотермальных систем, в которых область воды находится над областью пара [1, 2]. Такая конфигурация геотермальной системы объясняется как возможным существенным нагревом нижерасположенных пород, так и значительным падением давления в нижних пластах вследствие интенсивного отбора пара при эксплуатации геотермального резервуара. С точки зрения классической теории гидродинамической устойчивости расположение тяжелой жидкости над легкой является неустойчивым. Для объяснения устойчивого существования такой конфигурации в геотермальных системах были выдвинуты различные гипотезы [3].

В работе [4] было проведено теоретическое исследование устойчивости слоя воды над слоем пара в геотермальном резервуаре. Предполагалось, что нижняя граница пласта является контактной поверхностью с непроницаемыми породами, поверхность раздела между областями воды и пара является неподвижной и поток фаз через нее в невозмущенном состоянии отсутствует. Методом нормальных мод было получено дисперсионное соотношение, которое исследовалось численно. Показано, что рассматриваемая конфигурация устойчива, если проницаемость пород удовлетворяет соотношению $k < 4 \times 10^{-17} \text{ м}^2$. При больших значениях проницаемости система теряет устойчивость. В [5] задача была обобщена на случай, допускающий переток фаз через поверхность раздела в невозмущенном состоянии. В результате геотермальная система, в которой слой воды располагается над слоем пара, становится более устойчивой, а критическое значение проницаемости, соответствующее потере устойчивости, увеличивается более чем на порядок. Анализ устойчивости такой системы представлен также в [6].

Роль капиллярных сил на процессы в геотермальных резервуарах изучались в [7–9]. В [8, 9] представлены результаты экспериментов, в которых, используя полуэмпирические формулы, содержащие остаточную водонасыщенность, определялась величина капиллярного давления как функция проницаемости пород. Экспериментально установлено, что капиллярное давление существенно зависит от температуры. Математическое моделирование течений в геотермальных

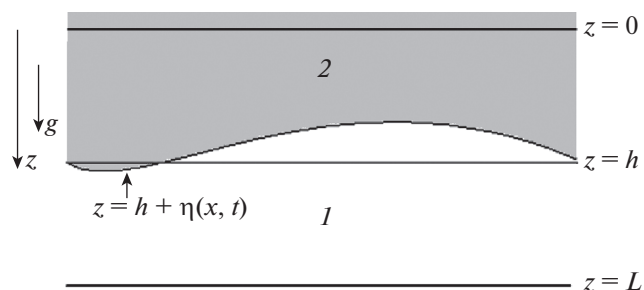


Рис. 1. Схема течения.

резервуарах и изменения параметров течений в зависимости от капиллярного давления проведены в [7]. Показано, что скорость фронта кипения выше в случае несмачиваемых пород. Действие капиллярных сил может приводить к нарушению связности однофазных областей, что определяет показатель остаточной насыщенности [10].

Поскольку добыча пара более выгодна с энергетической точки зрения, то возникает вопрос о реализации стабильного процесса кипения воды в пористой среде, выбирая нужный режим отбора пара. В настоящей работе рассмотрены изотермические режимы кипения воды в низкопроницаемом горизонтальном слое, заключенном между высокопроницаемыми слоями или трещинами. Из условий баланса массы и импульса в стационарном режиме кипения следует существование двузначного решения задачи определения положения фронта кипения. Исследуются условия существования фронта и его устойчивость. Показано, что в несмачиваемых породах поверхность фазового перехода может быть как устойчивой, так и неустойчивой.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим высокотемпературный геотермальный резервуар, состоящий из двух горизонтальных высокопроницаемых слоев (трещин), разделенных относительно низкопроницаемым слоем. Предположим, что термодинамика жидкости в верхнем слое $z \leq 0$ соответствует условиям существования воды, а в нижнем слое $z \geq L$ — условиям существования пара. Область пара может располагаться под областью воды вследствие более высокой температуры или более низкого давления, которое обусловлено интенсивным отбором пара при эксплуатации геотермального резервуара. Тогда в среднем низкопроницаемом слое должна существовать поверхность $z = h$, разделяющая область 1, насыщенную паром, и область 2, насыщенную водой (рис. 1).

Предположим, что вертикальный температурный градиент невелик и исследуем задачу об устойчивости поверхности раздела в изотермическом приближении. Такое приближение является асимптотикой при стремлении пористости к нулю, когда поглощение энергии при кипении воды компенсируется теплом горных пород, и, как показывают оценки, изменение температуры на поверхности фазового перехода мало и не влияет на гидродинамику течения. Если температура T в некоторой области высокотемпературных пород постоянна, то, используя уравнение Клаузиуса–Клапейрона (1.5), по заданной температуре находим значение давления $P_*(T)$, при котором происходит фазовый переход. Поскольку предполагается, что область воды расположена над областью пара, то давление в верхнем водонасыщенном слое должно быть выше давления фазового перехода, а давление в области пара ниже давления фазового перехода. Отсюда следует, что вода всегда движется вниз, и происходит кипение, а режим конденсации пара не реализуется.

Следуя [4], предположим несжимаемость воды и пара: $\rho_w = \text{const}$, $\rho_v = \text{const}$. Тогда течения в обеих областях описываются законами сохранения масс воды и пара и законом Дарси с учетом действия силы тяжести. Система основных уравнений для обеих областей имеет вид

$$\text{div } v_j = 0, \quad v_j = -\frac{k}{\mu_j} (\text{grad } P_j - \rho_j g), \quad j = v, w \quad (1.1)$$

Здесь v — вектор скорости фильтрации, ϕ — пористость, k — проницаемость, μ — вязкость, P — давление, Индексы w, v — вода и пар соответственно.

Уравнения, описывающие распределения давления в обеих областях, следуют из системы (1.1) и сводятся к уравнениям Лапласа

$$\Delta P_{v,w} = 0 \tag{1.2}$$

На поверхности фазового перехода выполняются условия баланса массы, импульса и уравнение Клаузиуса–Клапейрона термодинамического равновесия воды и пара

$$\phi \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_w} \right) V_n = \frac{k \rho_v}{\mu_v \rho_w} (\text{grad } P)_{n+} - \frac{k}{\mu_w} (\text{grad } P)_{n-} + \frac{k}{\mu_w} \rho_w g \left(1 - \frac{\mu_w \rho_v^2}{\mu_v \rho_w^2} \right) \tag{1.3}$$

$$P_v + P_c = P_w, \quad P_v = P_* \tag{1.4}$$

$$\frac{P_*}{P_a} = \exp \left(A + \frac{B}{T_*} \right) \equiv f(T_*), \quad A = 12.512, \quad B = -4611.73 \tag{1.5}$$

Здесь V – скорость фронта, $P_a = 10^5$ Па – атмосферное давление, P_c – капиллярное давление. Индексы соответствуют: n – нормали, $*$ – величинам на фронте.

2. БАЗОВОЕ РЕШЕНИЕ

Пусть P_0 – давление в верхнем высокопроницаемом слое $z = 0$, а P^0 – давление в нижнем высокопроницаемом слое $z = L$. Если P_0 и P^0 являются постоянными величинами, то можно предположить, что поверхность кипения воды займет некоторое стационарное равновесное положение $z = h$, $0 < h < L$. Тогда, с учетом (1.4), стационарное решение уравнений (1.2) имеет вид

$$P_{wst} = P_0 + \frac{P_* + P_c - P_0}{h} z, \quad P_{vst} = \frac{P^0 - P_*}{L - h} z + \frac{LP_* - hP^0}{L - h} \tag{2.1}$$

Соответственно, условие баланса массы (1.3) принимает вид

$$\frac{\mu_w \rho_v}{\mu_v \rho_w} \left(\frac{dP}{dz} \right)_+ - \left(\frac{dP}{dz} \right)_- + \rho_w g \left(1 - \frac{\mu_w \rho_v^2}{\mu_v \rho_w^2} \right) = 0$$

или, после подстановки решений (2.1)

$$\frac{\mu_w \rho_v}{\mu_v \rho_w} \frac{P_* + P_c - P_0}{h} - \frac{P^0 - P_*}{L - h} + \rho_w g \left(1 - \frac{\mu_w \rho_v^2}{\mu_v \rho_w^2} \right) = 0 \tag{2.2}$$

Уравнение (2.1) сводится к квадратному уравнению для определения положения поверхности кипения, которое в безразмерной форме имеет вид

$$H^2 - \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_3}{R_2} \right) H + \frac{R_3}{R_2} = 0 \tag{2.3}$$

$$R_1 = \frac{\mu_w \rho_v}{\mu_v \rho_w} \left(\frac{P^0}{P_*} - 1 \right), \quad R_2 = \frac{\rho_w g L}{P_*} \left(1 - \frac{\mu_w \rho_v^2}{\mu_v \rho_w^2} \right), \quad R_3 = 1 + \frac{P_c}{P_*} - \frac{P_0}{P_*}$$

Заметим, что в стационарном случае в уравнение (2.2) пористость ϕ и проницаемость k не входят. Поэтому положение поверхности кипения, которое определяется из квадратного уравнения (2.3), не зависит от этих параметров.

Квадратное уравнение имеет два решения. Для нейтральной или смачиваемой водой пористой среды один большой корень H_1 положительный, а меньший H_2 – отрицательный. Для несмачиваемых пород оба корня могут быть положительными. Положения границы раздела, соответственно корни уравнения (2.3), зависят от толщины слоя L , значений давления на верхней и нижней границах, капиллярного давления P_c и температуры горных пород T , которая определяет давление кипения P_* . Если рассмотреть конкретный пласт, то управлять процессом кипения можно только, меняя значения давления P_0 и P^0 на границах. Вычисления показывают, что положение поверхности раздела более чувствительно к изменениям давления P^0 на нижней границе.

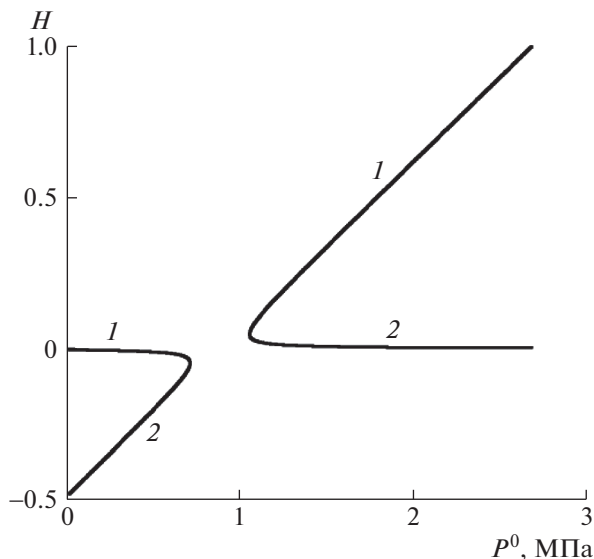


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая неединственность положения поверхности фазового перехода. 1, 2 – ветви решения H_1 и H_2 . Решение перестает существовать при достижении критических значений параметров: $L = 20$ м, $T_0 = 500$ К, $P_c = 0.02$ МПа, $P_0 = 2.7$ МПа, $P^0 = 1.058$ МПа.

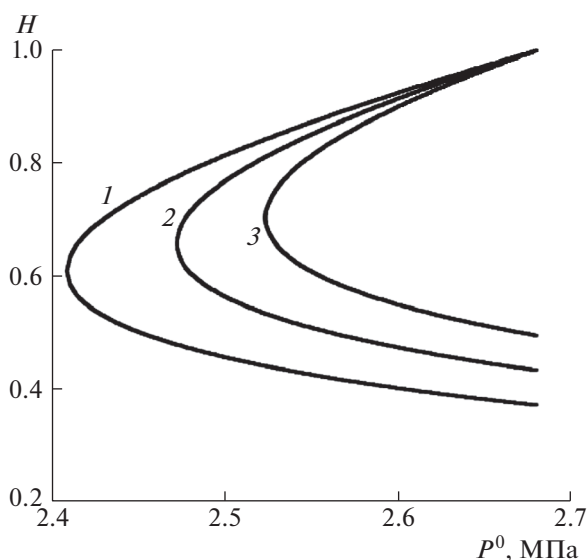


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма при больших значениях капиллярного давления. 1–3 – $P_c = 0.08, 0.09, 0.1$ МПа. Остальные параметры как на рис. 2.

На бифуркационной диаграмме (рис. 2) представлены значения корней уравнения (2.3) как функции давления P^0 при следующих значениях параметров: $T = 500$ К, $P_* = 2.68$ МПа, $P_0 = 2.7$ МПа, $P_c = 0.02$ МПа. Корни уравнения H_1 и H_2 имеют две ветви. Численные эксперименты показывают, что при больших значениях давления P^0 оба корня положительны, при умеренных – решение отсутствует, а при малых значениях оба корня отрицательны. Физический смысл имеют только положительные значения корней. Два других случая соответствуют либо наличию нестационарного режима кипения, либо невозможности существования фронта кипения и области пара внутри низкопроницаемого слоя пористой среды.

Расчеты показывают, что при увеличении капиллярного давления значения H_1 и H_2 уменьшаются, а область существования стационарного решения сжимается (рис. 3). При больших значениях капиллярного давления в несмачиваемых породах происходит слияние двух решений, ко-

гда дискриминант квадратного уравнения становится равным нулю, и решение перестает существовать. Расчеты показывают, что уменьшение давления P^0 в нижнем слое $z > L$ приводит к снижению уровня поверхности кипения, соответствующей первому корню H_1 и повышению уровня поверхности, соответствующей второму корню H_2 , так что решения сближаются. Падение давления P^0 ниже критического значения при фиксированных остальных параметрах приводит к слиянию корней и стационарный режим кипения становится нереализуемым. В нейтральных и смачиваемых породах решение единственно, т.к. меньший корень всегда меньше нуля. При уменьшении давления в нижнем слое или увеличении давления в верхнем слое единственное стационарное решение задачи также перестает существовать. Это объясняется тем, что хотя низкое давление P^0 вызывает кипение, но оно также инициирует интенсивный поток воды из верхнего слоя, который подавляет кипение в низкопроницаемом слое.

3. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Исследуем устойчивость стационарного решения методом нормальных мод. Пусть $P_j \equiv P_j(\xi, z, t) = P_{jst} + \delta P_j$, $j = v, w$, $\eta = \eta(z, t)$ – возмущение плоского фронта $z = h$. Возмущения стационарного решения представим в виде:

$$\delta P_{v,w} = P'_{v,w}(z) \exp(ikz + \sigma t), \quad \eta = \eta' \exp(ikz + \sigma t), \quad \eta' = \text{const}$$

Из уравнений (1.2) следуют уравнения для амплитуд $P'_{v,w}$

$$\frac{d^2 P'_{v,w}}{dz^2} - \kappa^2 P'_{v,w} = 0 \tag{3.1}$$

Учитывая граничные условия для возмущений

$$z = h: \delta P_v = 0, \quad z = 0: \delta P_w = 0$$

решения уравнений (3.1) имеют вид

$$\begin{aligned} P'_v &= P'_+ \frac{\exp[\kappa(L-z)] - \exp[-\kappa(L-z)]}{\exp[\kappa(L-h)] - \exp[-\kappa(L-h)]} \\ P'_w &= P'_- \frac{\exp(\kappa z) - \exp(-\kappa z)}{\exp(\kappa h) - \exp(-\kappa h)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

где P'_+ и P'_- – постоянные.

Уравнение баланса массы на поверхности кипения (1.3) для возмущений имеет вид

$$\phi \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_w} \right) \eta = \frac{k \rho_v}{\mu_v \rho_w} \text{grad}(\delta P_v) - \frac{k}{\mu_w} \text{grad}(\delta P_w) \tag{3.3}$$

Из условий баланса импульса для возмущенной поверхности раздела имеем

$$P'_v + \frac{dP_{vst}}{dz} \eta' = 0, \quad P'_w + \frac{dP_{wst}}{dz} \eta' = 0$$

или

$$P'_w = -\frac{P_* + P_c - P_0}{h} \eta', \quad P'_v = -\frac{P^0 - P_*}{L - h} \eta' \tag{3.4}$$

Подставляя соотношения (3.4) в граничное условие (3.3), на поверхности фазового перехода получаем дисперсионное уравнение, которое в безразмерной форме приводится к виду $\Sigma = \sigma L^2 / \omega_v$, $K = \kappa L$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_w} \right) \Sigma &= \frac{\rho_v}{\rho_w} \frac{P_1 - 1}{1 - H} K \text{cth}(K(1 - H)) + \frac{\omega_w}{\omega_v} \frac{1 + P_{cc} - P_2}{H} K \text{cth}(KH) \\ P_1 &= \frac{P^0}{P_*}, \quad P_2 = \frac{P_0}{P_*}, \quad P_{cc} = \frac{P_c}{P_*}, \quad \omega_v = \frac{k P_*}{\phi \mu_v}, \quad \omega_w = \frac{k P_*}{\phi \mu_w} \end{aligned} \tag{3.5}$$

В изотермическом приближении из термодинамического условия существования воды и пара, когда водонасыщенная область располагается над областью пара, следует $P^0 < P_*$ и $P_0 > P_*$. Поэтому из уравнения (3.5) получаем, что правая часть может принимать положительные значения только в несмачиваемых породах, когда $P_c > 0$. Соответственно, Σ становится больше нуля и поверхность кипения является неустойчивой.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим асимптотические условия перехода к неустойчивости, когда волновое число K стремится к нулю или бесконечности. Используя асимптотическую формулу для гиперболического котангенса, получаем в пределе при $K \rightarrow 0$

$$\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_w}\right) \Sigma = \frac{\rho_v}{\rho_w} \frac{P_1 - 1}{(1 - H)^2} + \frac{\mu_v}{\mu_w} \frac{1 + P_{cc} - P_2}{H^2} \quad (4.1)$$

При $K \rightarrow \infty$ имеем

$$\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_w}\right) \Sigma = \frac{\rho_v}{\rho_w} \frac{P_1 - 1}{1 - H} K + \frac{\mu_v}{\mu_w} \frac{1 + P_{cc} - P_2}{H} K \quad (4.2)$$

Асимптотические дисперсионные уравнения (4.1) и (4.2) показывают, что при стремлении волнового числа к нулю скорость роста возмущений Σ стремится к константе, а при $K \rightarrow \infty$ скорость роста Σ растет линейно с K .

Критерии перехода к неустойчивости соответствуют условию нейтральной устойчивости $\Sigma = 0$ и принимают вид, записанный для наглядности в размерной форме

$$K \rightarrow 0 \quad \frac{\rho_v}{\rho_w} \frac{P^0 - P_*}{(1 - H)^2} + \frac{\mu_v}{\mu_w} \frac{P_* + P_c - P_0}{H^2} = 0 \quad (4.3)$$

$$K \rightarrow \infty \quad \frac{\rho_v}{\rho_w} \frac{P^0 - P_*}{1 - H} + \frac{\mu_v}{\mu_w} \frac{P_* + P_c - P_0}{H} = 0 \quad (4.4)$$

Условия потери устойчивости (4.3) и (4.4) не совпадают. Отсюда следует, что спонтанный переход к неустойчивости, когда одновременно начинается рост всех мод [11], в сформулированной задаче не реализуется.

Проведенные расчеты дисперсионного уравнения (3.5) показывают, что нижняя ветвь решения, соответствующая корню H_2 , всегда неустойчива. Верхняя ветвь может быть как устойчивой, так и неустойчивой, что зависит, главным образом, от значения капиллярного давления. При добыче пара из геотермального месторождения интенсивность отбора пара определяется давлением P^0 в нижнем высокопроницаемом пласте или трещине. Исследуем влияние P^0 на устойчивость фронта кипения.

На рис. 4 приведена характерная деформация дисперсионной кривой при большом значении капиллярного давления $P_c = 0.8 \times 10^5$ Па, когда поверхность кипения теряет устойчивость при уменьшении давления P^0 . Кривая 1 соответствует устойчивому режиму, когда $P^0 = 2.461 \times 10^6$ Па. При достижении критического значения давления $P^0 = 2.451 \times 10^6$ Па кривая 2 на рис. 2 практически совпадает с осью абсцисс, но переход к неустойчивому режиму происходит при бесконечном волновом числе, когда удовлетворяется соотношение (4.2). При дальнейшем снижении давления дисперсионная кривая переходит в область положительных значений скорости роста возмущений Σ и поверхность раздела становится неустойчивой.

На бифуркационной диаграмме (рис. 2) ветвь кривой 1, соответствующая большему корню и лежащая в верхней полуплоскости, всегда устойчива, поскольку капиллярное давление мало и, как показывают вычисления, Σ всегда отрицательна. Нижняя ветвь (кривая 2) всегда неустойчива. При больших значениях капиллярного давления поверхность раздела может быть как устойчивой, так и неустойчивой. На рис. 5 сплошной линией обозначены части кривой, соответствующие устойчивым решениям, а пунктирная часть линий — неустойчивым. Видно, неустойчивость фронта подавляется увеличением давления пара, одновременно со снижением уровня

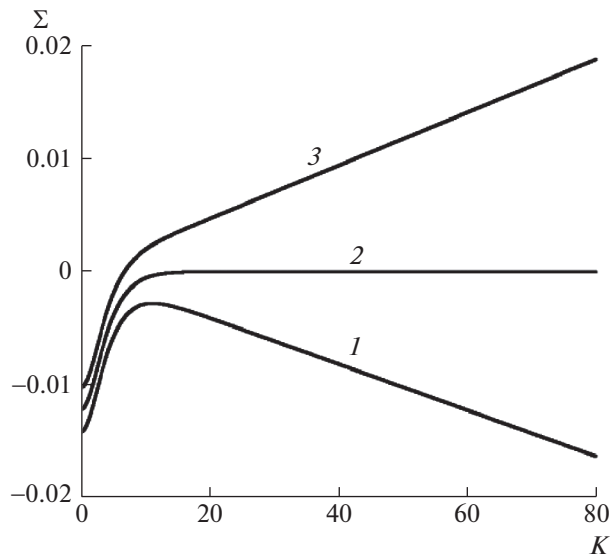


Рис. 4. Дисперсионные кривые, соответствующие состоянию устойчивости (1), нейтральному положению (2) и неустойчивому состоянию (3). $P^0 = 2.441, 2.451, 2.461$ МПа, $P_c = 0.08$ МПа. Остальные параметры как на рис. 2.

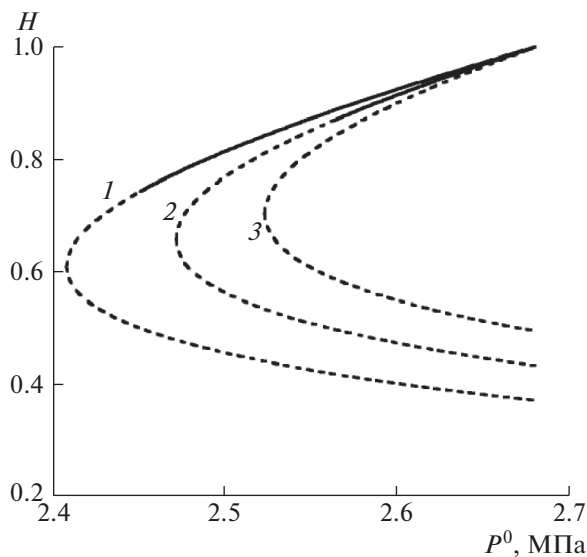


Рис. 5. Пунктирные части кривых бифуркационной диаграммы соответствуют параметрам, при которых возникает неустойчивость. Остальные параметры как на рис. 2.

поверхности раздела. С ростом капиллярного давления часть кривых, соответствующая неустойчивым режимам, увеличивается. При капиллярном давлении $P_c = 10^5$ Па вся кривая 3 соответствует неустойчивым режимам. Дальнейшее повышение давления пара невозможно в силу термодинамического условия его существования $P^0 < P_*$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирована задача об устойчивости фронта кипения в геотермальном резервуаре в изотермическом приближении, когда область воды находится над областью пара. Показано, что в

несмачиваемых породах решение стационарной задачи двузачно. Методом нормальных мод проведено исследование устойчивости покоящегося фронта кипения. Полученное дисперсионное соотношение исследовано численно и асимптотически. Найдено, что одно решение всегда неустойчиво, а другое может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Численные эксперименты показали, что переход к неустойчивости реализуется при бесконечно больших значениях волнового числа. Представлена бифуркационная диаграмма, на которой выделены части кривых, соответствующие устойчивому и неустойчивому состояниям поверхности кипения.

Большие значения волнового числа соответствуют малым линейным размерам возмущений, которые лежат за рамками применимости теории фильтрации. Поэтому полученный критерий потери устойчивости указывает границы существования устойчивого решения, но не дает характерный размер наиболее неустойчивого возмущения. Аналогичный вывод также справедлив для спонтанного перехода к неустойчивости Саффмана–Тейлора [11], когда все моды становятся одновременно неустойчивыми. Было показано [12], что развитие возмущений на нелинейной стадии существенно зависит от начальных условий для возмущений, которые определяются наиболее неустойчивой модой возмущения. Поэтому для расчетов развития нелинейных возмущений требуется усовершенствование математических моделей, в которых происходит спонтанный переход к неустойчивости или переход при бесконечно больших волновых числах.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 21-11-00126.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grant M., Bixley P.F. Geothermal reservoir engineering. London: Acad. Press, 2011. 378 p.
2. White D.E., Muffler L.J.P., Truesdell A.H. Vapor-dominated hydrothermal systems compared with hot water systems // Econ. Geol. 1971. V. 66. P. 75–97.
3. Grant M.A. Geothermal reservoir modeling // Geothermics. 1983. V. 12. P. 251–263.
4. Schubert G., Straus J.M. Gravitational stability of water over steam in vapor-dominated geothermal system // J. Geophys. Res. 1980. V. 85. № B11. P. 6505–6512.
5. Tsytkin G.G., Il'ichev A.T. Gravitational stability of the water-vapor phase transition interface in geothermal systems // ТiPM. 2004. V. 55. P. 183–199.
6. Khan Z.H., Pritchard D. Liquid–vapour fronts in porous media: Multiplicity and stability of front positions // Int. J. Heat Mass Transfer. 2013. V. 61. P. 1–17.
7. Tsytkin G.G., Calore C. Role of capillary forces in vapour extraction from low permeability, water saturated geothermal reservoir // Geothermics. 2003. V. 32. P. 219–237.
8. Li K., Horne R.N. Systematic study of steam–water capillary pressure // Geothermics. 2007. V. 36. P. 558–574.
9. Li K., Horne R.N. Estimation of wettability in gas-liquid-rock systems // Geothermics. 2008. V. 37. P. 429–443.
10. Tsytkin G.G., Shargatov V.A. Influence of capillary pressure gradient on connectivity of flow through a porous medium // Int. J. Heat Mass Transfer. 2018. V. 127. P. 1053–1063.
11. Saffman P.G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. R. Soc. Lond. A 1958. V. 245. P. 312–329.
12. Soboleva E.B. Instability Problems and Density-Driven Convection in Saturated Porous Media Linking to Hydrogeology: A Review // Fluids. 2023. V. 36. № 8. 28 p.