МИКРОЭЛЕКТРОНИКА, 2022, том 51, № 2, с. 148–154

ПРИБОРЫ

УДК 539.23+539.216.1+537.311.31

# ЗАВИСИМОСТЬ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ ВНУТРИ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРОВОЛОКИ ИЗ МЕТАЛЛА ОТ МЕХАНИЗМА ПОВЕРХНОСТНОГО РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

© 2022 г. Э. В. Завитаев[a], *, О. В. Русаков[a], А. И. Уткин[a], К. Е. Харитонов[a]

[a]Государственный гуманитарно-технологический университет,
ул. Зеленая, 22, Орехово-Зуево, Московская область, 142611 Россия

*E-mail: EduardZavitaev@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.05.2021 г.
После доработки 30.06.2021 г.
Принята к публикации 02.07.2021 г.

Выполнен расчет магнитной индукции внутри прямой металлической проволоки круглого сечения. Рассмотрен общий случай, когда отношение длины свободного пробега электронов к радиусу проволоки может принимать произвольные значения. В качестве граничных условий задачи принято условие, учитывающее зависимость коэффициента зеркальности от дефектов поверхности и угла падения электронов на внутреннюю поверхность проволоки. Рассмотрен предельный случай и проведено обсуждение полученных результатов.

*Ключевые слова:* тонкая проволока, плотность тока, магнитная индукция

**DOI:** 10.31857/S0544126922020090

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в микроэлектронике наблюдается растущий интерес к электромагнитным свойствам малых проводящих объектов, включающих в себя металлические проволоки малого радиуса [1–5]. Электромагнитные свойства данных малых проводящих объектов определяются такими свойствами проволок как электропроводность и индукция. Для металлических проволок, радиус которых существенно превышает длину свободного пробега электронов внутри объемного образца, эти характеристики могут быть найдены с использованием макроскопической электродинамики [6].

В то же время электрические и магнитные свойства металлических проволок, радиус которых сравним с длиной свободного пробега электронов $\Lambda$, существенно отличаются от свойств “массивных” проволок [7–9].

Вопросы, касающиеся расчета электрической проводимости тонких цилиндрических проволок из металла, обсуждались в работах [7, 8]. Магнитная индукция внутри такой проволоки при условии зеркально-диффузного отражения электронов от внутренней поверхности определялась в работе [9]. В упомянутых работах применяется подход, основанный на решении кинетического уравнения Больцмана для электронов в металле.

В настоящей работе применяется рассчитанная кинетическим методом функция распределения, которая описывает линейный отклик электронов в цилиндрической проволоке из металла на переменное электрическое поле, ориентированное вдоль ее оси симметрии. С помощью данной функции распределения удается рассчитать зависимость магнитной индукции внутри проволоки как функцию от дефектов поверхности и угла падения электронов на внутреннюю поверхность проволоки.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается цилиндрическая проволока из немагнитного металла (относительная магнитная проницаемость $\mu = 1$) радиуса $R$ и длины $L$ (считаем, что $L \gg R$), к концам которой приложено переменное электрическое напряжение частоты $\omega$. Принимается, что направление электрического поля совпадает с осью цилиндра. Скин-эффект не учитывается (предполагается, что $R < \gamma$ – глубины скин-слоя).

Однородное периодическое по времени электрическое поле, вектор напряженности которого

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t), \tag{1}$$

воздействует на электроны проводимости внутри проволоки и вызывает появление внутри нее высокочастотного тока с плотностью $\mathbf{j}$.

Связь между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ в случае, когда радиус проволоки $R$ сравним с длиной свободного пробега электронов в металле $\Lambda$ или меньше ее: $R < \Lambda$, оказывается существенно нелокальной. Для описания этой связи применим кинетическое уравнение (в приближении времени релаксации) к вырожденному ферми-газу электронов находящемуся внутри проволоки.

Для достаточно слабых внешних полей это уравнение можно линеаризовать по внешнему полю $\mathbf{E}$ и по малым отклонениям $f_1(\mathbf{r},\mathbf{v})$ от равновесной фермиевской функции распределения $f_0(\varepsilon)$ [10–12]:

$$-i\omega f_1 + \mathbf{v}\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e(\mathbf{v}\mathbf{E})\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{f_1}{\tau}, \qquad (2)$$

Здесь $e$ и $\mathbf{v}$ – соответственно, заряд и скорость электронов; $\tau$ – электронное время релаксации.

Далее рассматривается квадратичная зависимость энергии электронов $\varepsilon$ от скорости: $\varepsilon = m\mathbf{v}^2/2$ ($m$– эффективная масса электрона) и используется ступенчатая аппроксимация для равновесной функции распределения электронов по энергиям [10]:

$$f_0(\varepsilon) = \theta(\varepsilon_F - \varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_F \\ 0, & \varepsilon_F < \varepsilon \end{cases},$$

где $\varepsilon_F = m\mathbf{v}_F^2/2$ – энергия Ферми ($\mathbf{v}_F$ – скорость Ферми). Предполагается, что поверхность Ферми имеет сферическую форму.

Функция распределения электронов

$$f(\mathbf{r},\mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{r},\mathbf{v}).$$

Отклонение $f_1(\mathbf{r},\mathbf{v})$ функции распределения электронов $f(\mathbf{r},\mathbf{v})$ от равновесного значения $f_0(\varepsilon)$, возникающее под действием электрического поля (1), позволяет рассчитать плотность высокочастотного тока внутри проволоки

$$\mathbf{j} = en\langle\mathbf{v}\rangle = en\left(\int f_0 d^3v\right)^{-1}\int f_1\mathbf{v}d^3v. \qquad (3)$$

Концентрация электронов $n$ в проволоке определяется по стандартной формуле, согласно которой

$$n = 2\frac{m^3}{h^3}\int f_0 d^3v = 2\frac{m^3}{h^3}\frac{4\pi v_F^3}{3}, \qquad (4)$$

где $h$ – постоянная Планка.

Применив формулу (4), выражение для плотности тока (3) можно записать в виде:

$$\mathbf{j} = \frac{3}{4}\frac{ne}{\pi\mathbf{v}_F^3}\int \mathbf{v}f_1 d^3v. \qquad (5)$$

Взяв в уравнении (2) поле $\mathbf{E}$ в виде (1), найдем $f_1(\mathbf{r},\mathbf{v})$ как решение этого уравнения. Затем, используя выражение (3), определим плотность тока и стандартным образом рассчитаем магнитную индукцию внутри проволоки.

Однозначное решение поставленной задачи возможно при выборе граничного условия для неизвестной функции $f_1(\mathbf{r},\mathbf{v})$ на цилиндрической поверхности металлической проволоки. В качестве такового принимаем условие, которое учитывает зависимость коэффициента зеркальности $q$ от дефектов поверхности – параметра шероховатости поверхности $H$ и угла падения электронов $\theta$ на внутреннюю поверхность проволоки (модель Соффера): [8, 13]

$$f_1(\mathbf{r}_\perp,\mathbf{v}_\perp,\mathbf{v}_z) = q(H,\cos\theta)\, f_1\left(\mathbf{r}_\perp,\mathbf{v}'_\perp,\mathbf{v}_z\right) \quad \text{при} \quad \begin{cases} |\mathbf{r}_\perp| = R, \\ \mathbf{r}_\perp\mathbf{v}_\perp < 0, \end{cases}$$
$$q(H,\cos\theta) = \exp\left(-(4\pi H\cos\theta)^2\right), \quad H = \frac{h_S}{\lambda_F}, \qquad (6)$$

где $\mathbf{r}_\perp$ и $\mathbf{v}_\perp$ – соответственно, компоненты радиус-вектора электрона $\mathbf{r}$ и его скорости $\mathbf{v}$ в плоскости перпендикулярной оси симметрии проволоки, $\mathbf{v}'_\perp = \mathbf{v}_\perp - (2\mathbf{r}_\perp(\mathbf{r}_\perp\cdot\mathbf{v}_\perp))/R^2$ – вектор скорости, который при зеркальном отражении от внутренней поверхности проволоки в точке $\mathbf{r}_\perp(|\mathbf{r}_\perp| = R)$ переходит в вектор $\mathbf{v}_\perp$; $\mathbf{v}_z$ – составляющая скорости электрона вдоль оси симметрии проволоки; $h_S$ –

среднеквадратичная высота поверхностного рельефа, $\lambda_F$ – длина волны де-Бройля электрона на поверхности Ферми.

## 3. РАСЧЕТ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Решение кинетического уравнения (2) и расчет плотности тока (5) проведены в работе [7].

При вычислении плотности тока (5) и расчете магнитной индукции удобно перейти к цилиндрическим координатам как в пространстве координат ($r_\perp$, $\varphi$, $z$; полярная ось – ось $Z$; вектор $\boldsymbol{E}_0$ параллелен оси $Z$), так и в пространстве скоростей $v_\perp$, $\alpha$, $v_z$; полярная ось – ось $v_z$). Ось симметрии проволоки совпадает с осью $Z$.

Поле (1) в цилиндрических координатах имеет лишь $z$-компоненту:

$$\boldsymbol{E} = E_z\boldsymbol{e}_z, \quad E_z = E_0\exp(-i\omega t).$$

Соответственно, и плотность тока (5) обладает лишь $z$-компонентой (линии тока являются прямыми параллельными оси $Z$) и вычисляется по формуле [7] с учетом граничного условия (6):

$$j_z = \frac{3ne^2RE_z}{\pi v_F m}\int_0^1\int_0^\pi \frac{\rho\sqrt{1-\rho^2}}{z}\left(\frac{(q(H,\cos\theta)-1)\exp(-z\eta/\rho)}{(1-q(H,\cos\theta)\exp(-z\eta_0/\rho))}+1\right)d\rho d\alpha, \tag{7}$$

где

$$\rho = \frac{v_\perp}{v_F}, \quad z = \left(\frac{1}{\tau}-i\omega\right)\frac{R}{v_F}, \quad \xi = \frac{r_\perp}{R},$$

$$\eta = \xi\cos\alpha + \sqrt{1-\xi^2\sin^2\alpha}, \quad \eta_0 = 2\sqrt{1-\xi^2\sin^2\alpha}.$$

Для расчета вектора магнитной индукции **B** внутри тонкой цилиндрической проволоки будем применять теорему о циркуляции с учетом того факта, что распределение тока по поперечному сечению является неоднородным (линии индукции являются замкнутыми окружностями, лежащими в плоскостях, перпендикулярных к оси симметрии проволоки, поэтому $\mathbf{B} = B_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$):

$$\oint_L B_\varphi dl = \mu_0\int_S j_z dS,$$

где $\mu_0$ – магнитная постоянная вакуума.

После применения теоремы к контуру в виде окружности, получаем:

$$B_\varphi = \frac{\mu_0}{r_{\perp,B}}\int_0^{r_{\perp,B}} j_z r_\perp dr_\perp. \tag{8}$$

Для дальнейших вычислений и анализа результатов, введем новые переменные

$$\delta = \frac{r_{\perp,B}}{R}, \quad x = \frac{R}{\tau v_F} = \frac{R}{\Lambda}, \quad y = \omega\frac{R}{v_F},$$

где $\delta$ – “безразмерный радиус индукции”, $x$ – безразмерная обратная длина свободного пробега электронов, $y$ – безразмерная частота электрического поля.

Тогда магнитную индукцию (8) можно рассчитать по формуле

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 R}{\delta}\int_0^\delta j_z\xi d\xi,$$

или, с учетом формулы (7) и граничного условия (6),

$$B_\varphi = \frac{3\mu_0 ne^2R^2E_z}{\pi v_F m}\int_0^\delta\int_0^1\int_0^\pi \frac{\rho\sqrt{1-\rho^2}}{z\delta}\left(\frac{\left(\exp\left(-(4\pi H\rho\cos\alpha)^2\right)-1\right)\exp(-z\eta/\rho)}{\left(1-\exp\left(-(4\pi H\rho\cos\alpha)^2\right)\exp(-z\eta_0/\rho)\right)}+1\right)\xi d\xi d\rho d\alpha. \tag{9}$$

Магнитную индукцию (9), которая является комплексной величиной, представим в виде

$$B_\varphi = B_0 N(\delta, x, y, H), \tag{10}$$

где

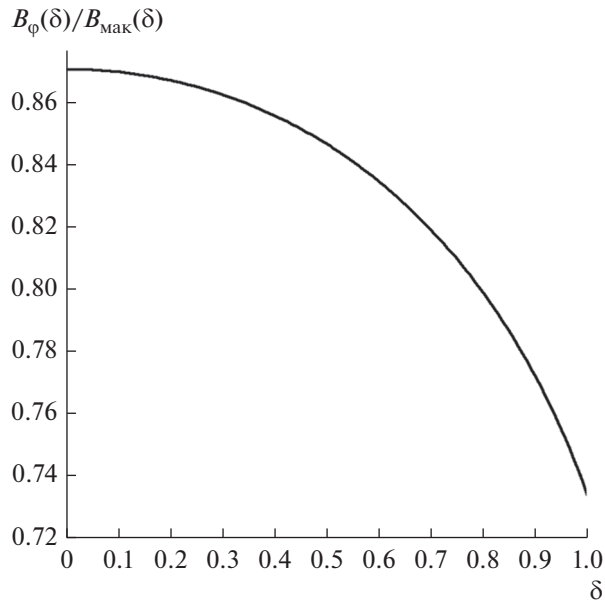


**Рис. 1.** Зависимость отношения модуля магнитной индукции $B_\varphi(\delta)$ к модулю магнитной индукции $B_{мак}(\delta)$ от "безразмерного радиуса индукции" $\delta$ при постоянных значениях безразмерной обратной длины свободного пробега электронов $x$, безразмерной частоты электрического поля $y$ и параметра шероховатости поверхности $H$: ($x = 1$, $y = 0.1$, $H = 1$).

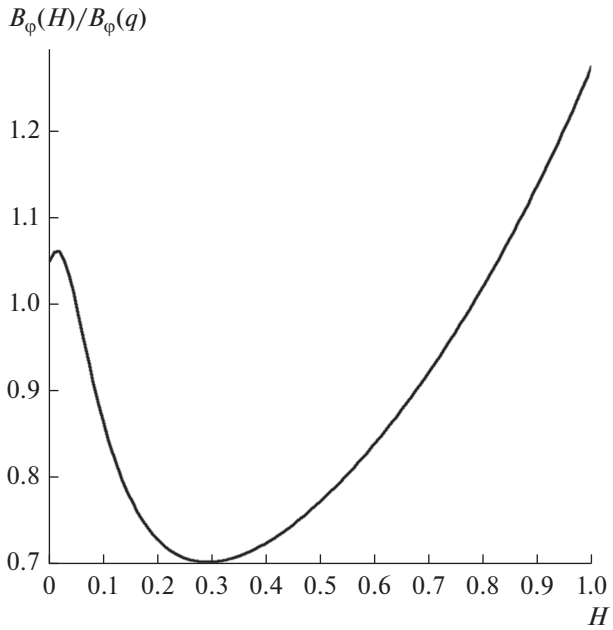


**Рис. 2.** Зависимость отношения модуля магнитной индукции $B_\varphi(H)$ к модулю магнитной индукции $B_\varphi(q)$ от параметра шероховатости поверхности $H$ ($q = 1 - H$) при постоянных значениях "безразмерного радиуса индукции" $\delta$, безразмерной обратной длины свободного пробега электронов $x$ и безразмерной частоты электрического поля $y$: ($\delta = 0.99$, $x = 0.1$, $y = 0.1$).

$$B_0 = \frac{3\mu_0 n e^2 R^2 E_z}{\pi v_F m},$$
$$N(\delta, x, y, H) = \int_0^\delta\int_0^1\int_0^\pi \frac{\rho\sqrt{1-\rho^2}}{z\delta}\left(\frac{\left(\exp\left(-\left(4\pi H\rho\cos\alpha\right)^2\right)-1\right)\exp\left(-z\eta/\rho\right)}{\left(1-\exp\left(-\left(4\pi H\rho\cos\alpha\right)^2\right)\exp\left(-z\eta_0/\rho\right)\right)}+1\right)\xi d\xi d\rho d\alpha. \quad (11)$$

Численный расчет модуля $M(\delta, x, y, H)$ и аргумента $A(\delta, x, y, H)$ (фазы) безразмерной магнитной индукции $N(\delta, x, y, H)$ вытянутой цилиндрической проволоки представлен на рисунках ниже.

## 4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В пределе абсолютно гладкой поверхности тонкой металлической проволоки ($H = 0$) для расчета магнитной индукции получаем выражение:

$$B_{мак} = \frac{\mu_0 n e^2 R^2 E_z \delta}{2 v_F m z}. (12) \quad (12)$$

Выражение (12) соответствует классическому макроскопическому результату для цилиндрической проволоки, когда при расчете магнитной индукции применяется локальный закон Ома, в котором удельная проводимость проволоки определяется по формуле Друде [7]. Это связано с тем, что при $H = 0$ граница проволоки не оказывает влияния на функцию распределения электронов $f(r_\perp, v_\perp, v_z)$. Высокочастотный ток внутри металлической проволоки с абсолютно гладкой поверхностью удовлетворяет локальному закону Ома при любом соотношении между радиусом проволоки $R$ и длиной свободного пробега электронов $\Lambda$. Таким образом, при наличии границы проволоки по свойствам близкой к идеальной, отсутствуют нелокальные (поверхностные) эффекты.

Независимо от характера отражения электронов на границе (при любых $H$) с ростом размера проволоки (при $x \gg 1$) (в этом случае в формуле (11) можно пренебречь членами с экспонентами в виду их быстрого затухания) также имеет место макроскопическая асимптотика (12).

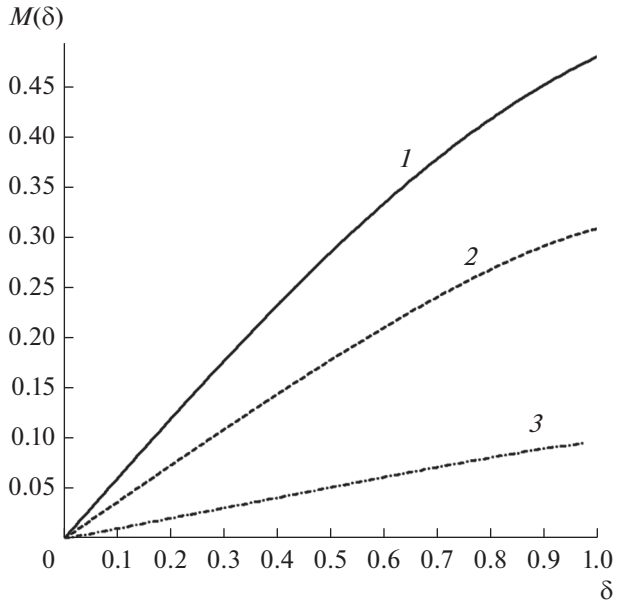


**Рис. 3.** Зависимость модуля $M(\delta)$ безразмерной магнитной индукции от "безразмерного радиуса индукции" $\delta$ при фиксированном значении безразмерной обратной длины свободного пробега электронов $x$ и постоянных значениях безразмерной частоты электрического поля $y$ и параметра шероховатости поверхности $H$: *1* – ($x = 0.1$, $y = 1$, $H = 0.5$), *2* – ($x = 1$, $y = 1$, $H = 0.5$), *3* – ($x = 5$, $y = 1$, $H = 0.5$).

На рис. 1 приведено сравнение результатов численного расчета магнитной индукции внутри тонкой цилиндрической проволоки, выполненного с применением кинетического (11) и макроскопического (12) подходов.

Отношение модуля магнитной индукции $B_{\varphi}(\delta)$, вычисленной с помощью кинетической модели, к модулю магнитной индукции $B_{\text{мак}}(\delta)$, вычисленной в рамках классической электродинамики, определялось при постоянных значениях безразмерной обратной длины свободного пробега электронов $x$, безразмерной частоты электрического поля $y$ и параметра шероховатости поверхности $H$. Из анализа хода кривой можно сделать вывод о том, что отличие модуля магнитной индукции, рассчитанной с использованием кинетической модели, и модуля магнитной индукции, рассчитанной в рамках классической электродинамики, при фиксированных значениях параметров расчета составляет от 13 до 26%.

Это обстоятельство подтверждает существенное влияние на абсолютную величину магнитной индукции вклада поверхностных механизмов рассеяния в случае, когда радиус проволоки будет одного порядка с длиной свободного пробега электронов.

На рис. 2 приведено сравнение результатов численного расчета магнитной индукции внутри тонкой цилиндрической проволоки, выполнен-

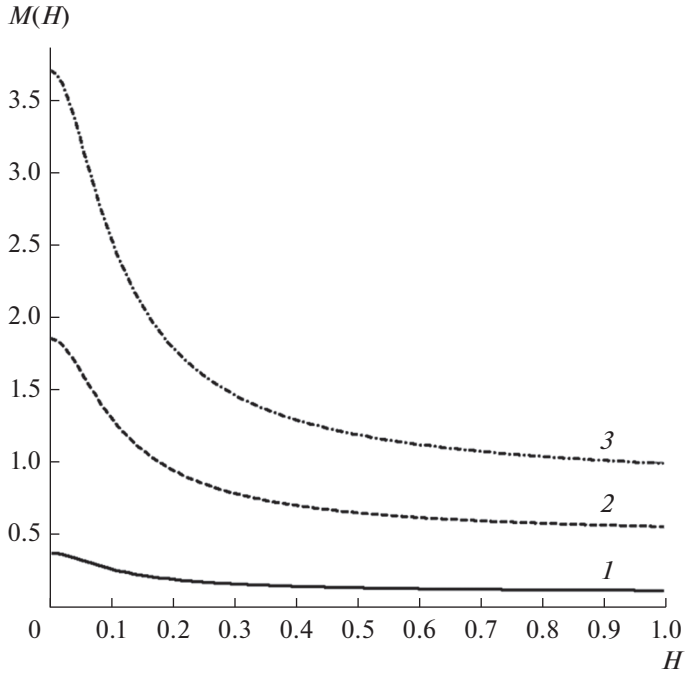


**Рис. 4.** Зависимость модуля $M(H)$ безразмерной магнитной индукции от параметра шероховатости поверхности $H$ при фиксированном значении "безразмерного радиуса индукции" $\delta$ и постоянных значениях безразмерной обратной длины свободного пробега электронов $x$ и безразмерной частоты электрического поля $y$: *1* – ($\delta = 0.1$, $x = 0.1$, $y = 0.1$), *2* – ($\delta = 0.5$, $x = 0.1$, $y = 0.1$), *3* – ($\delta = 1$, $x = 0.1$, $y = 0.1$).

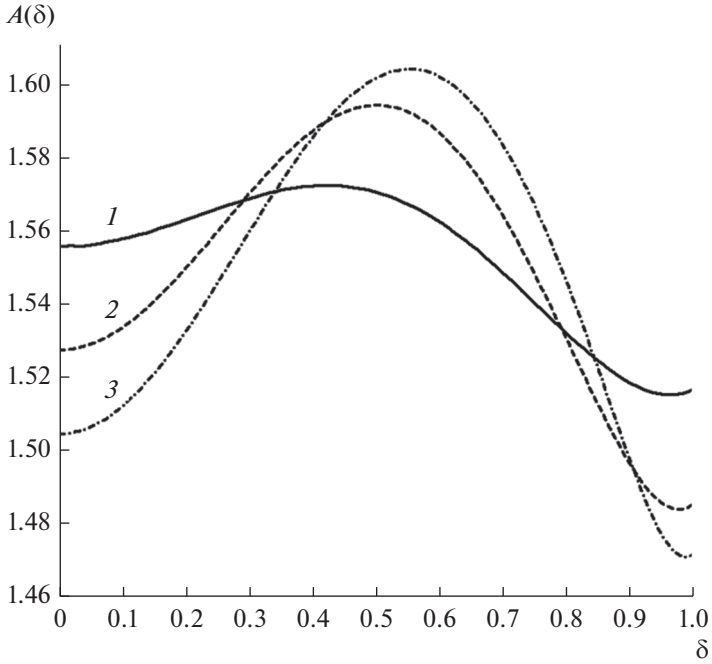


**Рис. 5.** Зависимость аргумента $A(\delta)$ (фазы) безразмерной магнитной индукции от "безразмерного радиуса индукции" $\delta$ при фиксированном значении параметра шероховатости поверхности $H$ и постоянных значениях безразмерной обратной длины свободного пробега электронов $x$ и безразмерной частоты электрического поля $y$: *1* – ($H = 0.1$, $x = 0.1$, $y = 5$), *2* – ($H = 0.2$, $x = 0.1$, $y = 5$), *3* – ($H = 0.5$, $x = 0.1$, $y = 5$).

ного с применением кинетических подходов с различными граничными условиями: Соффера (см. [11]) и Фукса (см. [9]).

Отношение модуля магнитной индукции $B_\varphi(H)$, вычисленной с помощью кинетической модели с граничными условиями Соффера, к модулю магнитной индукции $B_\varphi(q)$, вычисленной с помощью кинетической модели с граничными условиями Фукса, также определялось при постоянных значениях безразмерной обратной длины свободного пробега электронов $x$ и безразмерной частоты электрического поля $y$. Из анализа хода кривой можно сделать вывод о том, что данное отношение имеет нетривиальный характер из-за наличия вырождения, когда результаты расчета магнитной индукции внутри проволоки совпадают при двух значениях параметра шероховатости $H$ поверхности (или двух значениях коэффициента зеркальности $q$).

На рис. 3 построены графики зависимости модуля $M(\delta)$ безразмерной магнитной индукции цилиндрической проволоки $N(\delta, x, y, H)$ от "безразмерного радиуса индукции" $\delta$ для случая, когда все кривые построены при одинаковом значении безразмерной частоты электрического поля $y$ и параметра шероховатости поверхности $H$. Безразмерная обратная длина свободного пробега электронов $x$ варьируется для каждой кривой.

Из хода кривых на рисунке видно, что модуль безразмерной магнитной индукции в значительной степени зависит от текущего расстояния, отсчитываемого от оси симметрии проволоки(интересно, что на аргумент (фазу) безразмерной индукции этот параметр практически не влияет).

На рис. 4 построены графики зависимости модуля $M(H)$ безразмерной магнитной индукции цилиндрической проволоки $N(\delta, x, y, H)$ от параметра шероховатости поверхности $H$ для случая, когда все кривые построены при одинаковом значении безразмерной частоты электрического поля $y$ и безразмерной обратной длины свободного пробега электронов $x$, а "безразмерный радиус индукции" $\delta$ варьируется для каждой кривой.

Из хода кривых на рисунке видно, что модуль безразмерной магнитной индукции по мере увеличения параметра шероховатости поверхности $H$ монотонно убывает по всему поперечному сечению проволоки. Причем для каждой кривой, начиная с определенного значения $H$, имеет место выход индукции на постоянные значения.

На рис. 5 построены графики зависимости аргумента $A(\delta)$ (фазы) безразмерной магнитной индукции цилиндрической проволоки $N(\delta, x, y, H)$ от "безразмерного радиуса индукции" $\delta$ для случая, когда все кривые построены при одинаковом зна-

чении безразмерной частоты электрического поля $y$ и безразмерной обратной длины свободного пробега электронов $x$. Параметр шероховатости поверхности $H$ варьируется для каждой кривой.

Из хода кривых на рисунке видно, что аргумент (фаза) безразмерной магнитной индукции имеет локальный максимум, который зависит от параметра шероховатости и смещается в направлении к поверхности проволоки по мере его увеличения (пока не будут достигнуты значения соответствующие практически диффузному отражению электронов).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Op't Root W.P.E.M., Brussaard G.J.H., Smorenburg P.W., Luiten O.J.* Single-cycle surface plasmonpolaritons on bare metal wire excited by relativistic electrons // Nat. Commun. 2016. 7:13769.
2. *Yang J., Cao Q., Zhou C.* Explicit formula for metal wire plasmon of terahertz wave // Opt. Express. 2009. V. 17. № 23. P. 20806–20815.
3. *Maier S.A., Andrews S.R., Martin-Moreno L., Garcia-Vidal F.J.* Terahertz Surface Plasmon-Polariton Propagation and Focusing on Periodically Corrugated Metal Wires // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 176805 (1–4).
4. *Manjavacas A., Garcia de Abajo F.J.* Coupling of gap plasmons in multi-wire waveguides // Opt. Express. 2009. V. 17. № 22. P. 19401–19413.
5. *Neubrech F., Kolb T., Lovrincic R., Fahsold G., Pucci A., Aizpurua J., Cornelius T.W., Toimil-Molares M.E., Neumann R., Karim S.* Resonances of individual metal nanowires in the infrared // Appl. Phys. Lett. 2006. V. 89. P. 253104 (1–3).
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Физмат-лит, 2016. 656 с.
7. *Завитаев Э.В., Юшканов А.А.* Высокочастотная проводимость тонкой цилиндрической проволоки из металла // Микроэлектроника. 2008. Т. 37. № 6. С. 429–438.
8. *Кузнецова И.А., Чапкин А.В., Юшканов А.А.* Влияние механизма поверхностного рассеяния электронов на высокочастотную проводимость тонкой металлической проволоки // Микроэлектроника. 2011. Т. 40. № 1. С. 45–51.
9. *Завитаев Э.В., Русаков О.В., Харитонов К.Е.* Расчет магнитной индукции внутри тонкой цилиндрической проволоки из металла // Вестник МГОУ. Серия Физика-Математика. 2016. № 2. С. 74–84.
10. *Харрисон У.* Теория твердого тела. М.: Мир, 1972. 616 с.
11. *Займан Дж.* Электроны и фононы. М.: ИЛ, 1962. 488 с.
12. *Лифшиц И.М., Азбель М.Я., Каганов М.И.* Электронная теория металлов. М.: Наука, 1971. 415 с.
13. *Завитаев Э.В., Русаков О.В., Харитонов К.Е.* К вопросу о расчете плотности тока внутри тонкой цилиндрической проволоки из металла в продольном магнитном поле // Вестник МГОУ. Серия Физика-Математика. 2016. № 3. С. 72–83.